SANTIAGO BURBANO DE ERCILLA
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICO-QUIMICAS

ENRIQUE BURBANO GARCIA
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICAS

FISICA GENERAL

PROBLEMAS

VIGESIMOTERCERA EDICION

Editorial MIRA EDITORES, S. A.
ZARAGOZA
1989

INDICE GENERAL

Capítulo I

UNIDADES FISICAS - ANALISIS DIMENSIONAL ERRORES EN LAS MEDIDAS

A) UNIDADES Y SISTEMAS

FORMULARIO

EQUIVALENCIA ENTRE UNIDADES FUNDAMENTALES EXPRESADAS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL (SI) O GIORGI.

LONGITUD

1 decímetro (dm)	$= 10^{-1}$ m
1 centímetro (cm)	$= 10^{-2}$ m
1 milímetro (mm)	$= 10^{-3}$ m
1 micra (μ)	$= 10^{-6}$ m
1 milimicra (mμ)	$= 10^{-9}$ m
1 angström (Å)	$= 10^{-10}$ m
1 unidad X (uX)	$= 10^{-13}$ m
1 fermi (fm)	$= 10^{-15}$ m
1 decámetro (dam)	$= 10$ m
1 hectómetro (hm)	$= 10^{2}$ m
1 kilómetro (km)	$= 10^{3}$ m
1 año luz	$= 0{,}965 \times 10^{16}$ m
1 parsec (pc)	$= 3{,}07 \times 10^{16}$ m
1 milla* (mile)	$= 1\,609$ m
1 pie (ft)	$= 0{,}3048$ m
1 pulgada (in)	$= 2{,}54 \times 10^{-2}$ m
1 yarda (yd)	$= 0{,}9144$ m

MASA

1 gramo (g)	$= 10^{-3}$ kg
1 tonelada métrica (t)	$= 10^{3}$ kg
1 libra-masa (lbm)	$= 0{,}4536$ kg
1 slug	$= 14{,}59$ kg
1 ton, long (2240 lb)	$= 1\,016$ kg
1 ton, short (2000 lb)	$= 907{,}2$ kg
1 unidad de masa atómica (u)	$= 1{,}661 \times 10^{-27}$ kg
1 unidad técnica de masa (utm)	$= 9{,}806$ kg

TIEMPO

1 año (a)	$= 3{,}156 \times 10^{7}$ s
1 día (d)	$= 86\,400$ s
1 hora (h)	$= 3\,600$ s
1 minuto (min)	$= 60$ s

INTENSIDAD DE CORRIENTE ELECTRICA

1 UEEI $= 3{,}336 \times 10^{-10}$ A

* Esta es la *milla terrestre.* La *milla marina* equivale a 1 852 m.

SISTEMAS DE UNIDADES		
SISTEMA	MAGNITUDES FUNDAMENTALES	UNIDADES
S.I. (GIORGI)	Longitud *(L)* Masa *(M)* Tiempo *(T)* Intensidad *(A)*	Metro Kilogramo Segundo Amperio
UEE (CGS en mecánica)	Longitud *(L)* Masa *(M)* Tiempo *(T)* Permitividad (ϵ)	Centímetro Gramo Segundo $\epsilon_0 = 1/4\,\pi$
TÉCNICO	Longitud *(L)* Fuerza *(F)* Tiempo *(T)*	Metro Kilopondio Segundo
ABSOLUTO INGLES	Longitud *(L)* Masa *(M)* Tiempo *(T)* Intensidad *(A)*	Pie Libra-masa Segundo Amperio

Problema 1. Teniendo en cuenta la equivalencia entre las unidades fundamentales (véase el formulario), determinar los factores de conversión de:

1. km/h a mile/h
2. lb/ft^3 a g/cm^3
3. t · m/s^2 a slug · yd/s^2

Solución

1)

$$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 10^3\ \frac{\text{m}}{\text{h}} = \frac{10^3}{1\,609}\ \frac{\text{mile}}{\text{h}} = 0{,}6215\ \frac{\text{mile}}{\text{h}}$$

2)

$$1\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = \frac{0{,}4536}{0{,}3048^3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = \frac{0{,}4536 \times 10^3}{0{,}3048^3 \times 10^6}\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0{,}016\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

3)

$$1\ \frac{\text{t} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 10^3\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \frac{10^3}{14{,}59 \times 0{,}9144}\ \frac{\text{slug} \cdot \text{yd}}{\text{s}^2} = 74{,}9564\ \frac{\text{slug} \cdot \text{yd}}{\text{s}^2}$$

Problema 2. Pasar al SI las siguientes unidades:

1. 1 yarda/s
2. 1 milla/h

3. 1 poundal (pdl) = 1 lb · ft / s²
4. 1 slug/ft³

Solución

1)

$$1\ \frac{\text{yd}}{\text{s}} = 0{,}9144\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2)

$$1\ \frac{\text{mile}}{\text{h}} = \frac{1\,609}{3\,600}\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}4469\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3)

$$1\ \frac{\text{lb}\cdot\text{ft}}{\text{s}^2} = 0{,}4536 \times 0{,}3048\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2} = 0{,}1382\ \text{N}$$

4)

$$1\ \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} = \frac{14{,}59}{0{,}3048^3}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 515{,}241\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Problema 3. Pasar al sistema absoluto inglés las siguientes unidades:
1. $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
2. utm / cm^3
3. $\text{kg}\cdot\text{m}^2 / \text{h}$

Solución

1)

$$1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 = \frac{1}{0{,}4536 \times 0{,}3048^2}\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2 = 23{,}73\ \text{lb}\cdot\text{ft}^2$$

2)

$$1\ \frac{\text{utm}}{\text{cm}^3} = \frac{9{,}806 \times 10^6\ 0{,}3048^3}{0{,}4536}\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} = 6{,}1216 \times 10^5\ \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}$$

3)

$$1\ \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{h}} = \frac{1}{0{,}4536 \times 0{,}3048^2\ 3\,600}\ \frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{s}} = 6.592 \times 10^{-6}\ \frac{\text{lb}\cdot\text{ft}^2}{\text{s}}$$

Problema 4. Definir el esteno, unidad de fuerza en el sistema MTS (metro, tonelada masa, segundo). Calcular su equivalencia con la dina, el newton y el kilopondio.

Solución

Si en la ecuación fundamental de la dinámica:

$$F = Ma$$

hacemos:

$$M = 1\ \text{t} \quad \text{y} \quad a = 1\ \text{m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad F = 1\ \text{esteno}$$

«El esteno es la fuerza que aplicada a una tonelada masa, le comunica una aceleración de un metro por segundo cada segundo.»

$$\left.\begin{array}{r} 1\ \text{t} = 10^6\ \text{g} \\ 1\ \text{m/s}^2 = 100\ \text{cm/s}^2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = 10^8\ \text{dyn}$$

$$1\ \text{N} = 10^5\ \text{dyn} \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = \frac{10^8}{10^5} = 10^3\ \text{N}$$

$$1\ \text{kp} = 9{,}8\ \text{N} \quad \Rightarrow \quad 1\ \text{esteno} = \frac{10^3}{9{,}8} = 102{,}04\ \text{kp}$$

B) ANALISIS DIMENSIONAL

FORMULARIO

ECUACION DIMENSIONAL DE UNA MAGNITUD S EN BASE L, M, T:

$$[S] = L^a M^b T^c$$

CONDICIONES DE EQUIDIMENSIONALIDAD (HOMOGENEIDAD) de una magnitud tal que:

$$[S] = L^a M^b T^c$$

cuando viene expresada en función de otras tres P, Q y R por la fórmula:

$$[S] = P^{x_1} Q^{x_2} R^{x_3}$$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} [P] = L^{a_1} M^{b_1} T^{c_1} \\ [Q] = L^{a_2} M^{b_2} T^{c_2} \\ [R] = L^{a_3} M^{b_3} T^{c_3} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = a \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = b \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = c \end{array}\right.$$

Problema 5.

1. Conocida la ecuación de dimensiones de la velocidad $[v] = LT^{-1}$ determinar las de la aceleración a y la fuerza F, sabiendo que: $[a] = [v]/[t]$ y que $[F] = [M][a]$, siendo t el tiempo y M la masa.

2. Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de gravitación universal que interviene en la conocida Ley de Newton: $F = GMM'/r^2$ (M y M' masas; F = fuerza; r = distancia entre los cuerpos).

3. Determinar la ecuación de dimensiones del número π.

4. Determinar la ecuación de dimensiones de un seno, un coseno y una tangente.

5. Determinar la ecuación de dimensiones de la energía *(W)* sabiendo que: $[W] = [F]\,[r]$

6. Determinar la ecuación de dimensiones de la constante de tensión superficial (σ) sabiendo que: $[\sigma] = [W]/[A]$, (A: superficie).

7. Determinar la ecuación de dimensiones del coeficiente de viscosidad (η) sabiendo que: $[\eta] = [F]\ [r]\ /\ [A]\ [v]$.

8. Determinar la ecuación de dimensiones del número de Reynolds *(R)*, sabiendo que $[v] = [R]\ [\eta]/[\rho]\ [r]$ (ρ: densidad).

Solución

1) Sistema

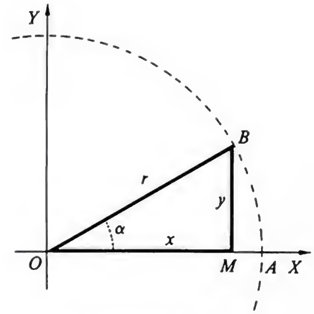
Giorgi: $[a]=\dfrac{[v]}{[t]}=\dfrac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}$ $\qquad [F]=[M][a]=MLT^{-2}$

Técnico: $[a]=\dfrac{[v]}{[t]}=\dfrac{LT^{-1}}{T}=LT^{-2}$ $\qquad [F]=F$

2) Sistema

Giorgi: $[G]=\dfrac{[r^2][F]}{[M][M']}=\dfrac{L^2MLT^{-2}}{M\,M}=L^3M^{-1}T^{-2}$

Técnico: $[G]=\dfrac{[r^2][F]}{[M][M']}=\dfrac{L^2F}{\dfrac{F^2}{(LT^{-2})^2}}=L^4T^{-4}F^{-1}$



Problema I- 5

3) $\pi=\dfrac{C}{D}$ | C: longitud de la circunferencia; D: longitud del diámetro | $[\pi]=\dfrac{[C]}{[D]}=\dfrac{L}{L}=1$

4) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{y}{r}$ $\qquad [\operatorname{sen}\alpha]=\dfrac{[y]}{[r]}=\dfrac{L}{L}=1$

$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ $\qquad [\cos\alpha]=\dfrac{[x]}{[r]}=\dfrac{L}{L}=1$

$\operatorname{tag}\alpha=\dfrac{y}{x}$ $\qquad [\operatorname{tag}\alpha]=\dfrac{[y]}{[x]}=\dfrac{L}{L}=1$

5) Sistema

Giorgi: $[W]=[F][r]=MLT^{-2}L=ML^2T^{-2}$

Técnico: $[W]=[F][r]=FL$

6) Sistema

Giorgi: $[\sigma]=\dfrac{[W]}{[A]}=\dfrac{ML^2T^{-2}}{L^2}=MT^{-2}$

Técnico: $[\sigma]=\dfrac{[W]}{[A]}=\dfrac{FL}{L^2}=FL^{-1}$

7) Sistema

Giorgi: $[\eta]=\dfrac{[F][r]}{[A][v]}=\dfrac{MLT^{-2}L}{L^2LT^{-1}}=ML^{-1}T^{-1}$

Técnico: $[\eta]=\dfrac{[F][r]}{[A][v]}=\dfrac{FL}{L^2LT^{-1}}=FL^{-2}T$

8) Sistema

Giorgi: $[R]=\dfrac{[v][\rho][r]}{[\eta]}=\dfrac{LT^{-1}ML^{-3}L}{ML^{-1}T^{-1}}=1$

Técnico: $[R]=\dfrac{[v][\rho][r]}{[\eta]}=\dfrac{LT^{-1}FL^{-1}T^{2}L}{FL^{-2}T}=1$

El número de Reynolds es adimensional.

Problema 6. Determinar en el SI la ecuación de dimensiones de las siguientes magnitudes eléctricas (Base: *L, M, T, A).*

1. De la constante de Coulomb *(K)* que interviene en la ley del mismo nombre: $F = K\,qq'/r^2$, sabiendo que: $[q] = [I]\,[t] = AT$

2. De ϵ sabiendo que: $K = 1/4\pi\epsilon$

3. Del potencial eléctrico *(V)*: $[V] = [W]/[q]$

4. De la resistencia eléctrica *(R)*: $[R] = [V]/[I]$

5. Del campo eléctrico *(E)*: $[E] = [F]/[q]$

6. De la capacidad *(C)*: $[C] = [q]/[V]$

7. Del desplazamiento eléctrico *(D)*: $[D] = [\epsilon]\,[E]$

8. Del campo magnético: $[B] = [F]/[q]\,[v]$

9. De la permeabilidad magnética (μ): $[B] = [\mu]\,[I]/[r]$

10. De la autoinducción *(L)*: $[L] = [B]\,[A]/[I]$

Solución

1) $$[K] = \frac{[F]\,[r^2]}{[q]\,[q']} = \frac{MLT^{-2}L^2}{A^2T^2} = ML^3T^{-4}A^{-2}$$

2) $$[\epsilon] = \frac{1}{[K]} = M^{-1}L^{-3}T^4A^2$$

3) $$[V] = \frac{[W]}{[q]} = \frac{ML^2T^{-2}}{AT} = ML^2T^{-3}A^{-1}$$

4) $$[R] = \frac{[V]}{[I]} = \frac{ML^2T^{-3}A^{-1}}{\mathrm{A}} = ML^2T^{-3}A^{-2}$$

5) $$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{MLT^{-2}}{AT} = MLT^{-3}A^{-1}$$

6) $$[C] = \frac{[q]}{[V]} = \frac{AT}{ML^2T^{-3}A^{-1}} = M^{-1}L^{-2}T^4A^2$$

7) $$[D] = [\epsilon]\,[E] = M^{-1}L^{-3}T^4A^2MLT^{-3}A^{-1} = L^{-2}TA$$

8) $$[B] = \frac{[F]}{[q]\,[v]} = \frac{MLT^{-2}}{ATLT^{-1}} = MT^{-2}A^{-1}$$

9) $$[\mu] = \frac{[B]\,[r]}{[I]} = \frac{MT^{-2}A^{-1}L}{A} = MLT^{-2}A^{-2}$$

10) $$[L] = \frac{[B]\,[A]}{[I]} = \frac{MT^{-2}A^{-1}L^2}{A} = ML^2T^{-2}A^{-2}$$

Problema 7. Teniendo en cuenta los factores de conversión entre las unidades de las magnitudes fundamentales en los sistemas GIORGI, CGS y ABSOLUTO INGLÉS, determinar las equivalencias entre las unidades, en estos sistemas de las magnitudes:

1. Fuerza ($[F] = [M]\,[a]$)

2. Potencial eléctrico ($[V] = [W]\,/\,[q]$)

Solución

1) Como:

$$[F] = MLT^{-2}$$

de acuerdo con esto:

1 unidad (GIORGI) de fuerza $= 1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$
1 unidad (CGS) de fuerza $= 1\ \mathrm{dyn} = 1\ \mathrm{g \cdot cm \cdot s^{-2}}$
1 unidad (AI) de fuerza $= 1\ \mathrm{pdl} = 1\ \mathrm{lb \cdot ft \cdot s^{-2}}$

luego:

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}} = 10^3 \times 10^2\ \frac{\mathrm{g \cdot cm}}{\mathrm{s^2}} = 10^5\ \mathrm{dyn}$$

$$1\ \mathrm{N} = 1\ \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}} = \frac{1}{0{,}4536 \times 0{,}3048}\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft}}{\mathrm{s^2}} = 7{,}233\ \mathrm{pdl}$$

$$1\ \mathrm{dyn} = 10^{-5}\ \mathrm{N} = 7{,}233 \times 10^{-5}\ \mathrm{pdl}$$

$$1\ \mathrm{pdl} = \frac{1}{7{,}233}\ \mathrm{N} = 0{,}13825\ \mathrm{N} = 13\,825\ \mathrm{dyn}$$

2) Como:

$$[V] = ML^2T^{-3}A^{-1}$$

de acuerdo con esto:

1 unidad (GIORGI) de potencial $= 1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}}$
1 unidad (UEE) de potencial $= 1\ \mathrm{g \cdot cm^2 \cdot s^{-3} \cdot (UEEI)^{-1}}$
1 unidad (AI) de potencial $= 1\ \mathrm{lb \cdot ft^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}}$

luego:

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = 10^3 \times 10^4 \times 3{,}336 \times 10^{-10}\ \frac{\mathrm{g \cdot cm^2}}{\mathrm{(UEEI) \cdot s^3}} = \frac{1}{300}\ \text{UEE de Potencial}$$

$$1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = \frac{1}{0{,}4536 \times 0{,}3048^2}\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = 23{,}73\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}}$$

$$1\ \text{UEE de Potencial} = 300\ \mathrm{V} = 300 \times 23{,}73\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = 7\,119\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}}$$

$$1\ \frac{\mathrm{lb \cdot ft^2}}{\mathrm{A \cdot s^3}} = 0{,}042\ \mathrm{V} = 1{,}4 \times 10^{-4}\ \text{UEE de Potencial}$$

Problema 8. Sabemos que el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre (g_0) es $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$. ¿Cual es la aceleración de la gravedad expresada en el sistema absoluto inglés?

Solución

$$[g_0] = LT^{-2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} 1 \text{ unidad (SI) de aceleración} = 1 \text{ m/s}^2 \\ 1 \text{ unidad (AI) de aceleración} = 1 \text{ ft/s}^2 \end{array}$$

$$1 \text{ m/s}^2 = \frac{1}{0{,}3048} \text{ ft/s}^2 = 3{,}2808 \text{ ft/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_0 = 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \times 3{,}2808 \text{ ft/s}^2 = 32{,}15 \text{ ft/s}^2}$$

Problema 9. En las gasolineras inglesas los aparatos de medida de presión de neumáticos de coche se miden en pdl/in^2 (poundal/pulgada^2). Si queremos hinchar la rueda de nuestro coche, a la presión de 1,8 kp/cm^2. ¿Qué presión debe solicitarse en Inglaterra para obtener este resultado?

Solución

Sabemos que:

$$[p] = \frac{[F]}{[A]}$$

y que por la definición del kilopondio se obtiene:

$$1 \text{ kp} = 9{,}8 \text{ N}$$

y como:

$$1 \text{ kp/cm}^2 = 9{,}8 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

tendremos que:

$$1{,}8 \text{ kp/cm}^2 = 1{,}8 \times 9{,}8 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

en el problema 7 veíamos que:

$$1 \text{ N} = 7{,}233 \text{ pdl}$$

y como:

$$1 \text{ m}^2 = \frac{1}{2{,}54^2 \times 10^{-4}} \text{ in}^2$$

la presión que debe solicitarse será:

$$\boxed{p = 1{,}8 \times 9{,}8 \times 10^4 \times 7{,}233 \times 2{,}54^2 \times 10^{-4} = 823 \text{ pdl/in}^2}$$

Problema 10. Determinar la ecuación de dimensiones del momento de inercia y comprobar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas:

$$N = I\alpha \qquad Nt = \Delta(I\omega) \qquad N\varphi = \Delta\left(\frac{1}{2} I\omega^2\right)$$

[N = momento del par; I = momento inercia; t = tiempo; φ, ω y α son respectivamente el ángulo de giro, la velocidad angular y la aceleración angular].

Solución

Para la solución tenemos que determinar la ecuación de dimensiones de un ángulo, de una velocidad angular y una aceleración angular.

$$[\varphi] = \frac{[\text{arco}]}{[\text{radio}]} = \frac{L}{L} = 1 \qquad \omega = \frac{[\varphi]}{[t]} = \frac{1}{T} = T^{-1} \qquad \alpha = \frac{[\omega]}{[t]} = T^{-2}$$

Ecuación de dimensiones de I será:

$$I = \Sigma\, m_i r_i^2 \quad \Rightarrow \quad [I] = ML^2$$

Ecuaciones de dimensiones del momento de un par:

$$[N] = [F]\,[r] \qquad \Rightarrow \qquad [N] = ML^2T^{-2}$$

$$[N] = [I]\,[\alpha] \qquad \left|\begin{array}{l} [N] = ML^2T^{-2} \\ [I\alpha] = ML^2T^{-2} \end{array}\right. \quad \text{homogénea}$$

$$[N]\,[t] = [I]\,[\omega] \qquad \left|\begin{array}{l} [Nt] = ML^2T^{-1} \\ [I\omega] = ML^2T^{-1} \end{array}\right. \quad \text{homogénea}$$

$$[N]\,[\varphi] = [I]\,[\omega^2] \qquad \left|\begin{array}{l} [I\omega^2] = ML^2T^{-2} \\ [N\varphi] = ML^2T^{-2} \end{array}\right. \quad \text{homogénea}$$

Problema 11. **1.** Demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas: *Impulso = variación momento lineal:* $Ft = \Delta\,(Mv)$ (F = fuerza; t = tiempo; M = masa; v = velocidad) *Trabajo = variación energía cinética.* $F s \cos\varphi = \Delta\,(Mv^2/2)$ (s = espacio; φ = ángulo formado por F y *s.)*
2. Demostrar que el *«trinomio de Bernouilli»* es homogéneo, es decir, que sus tres sumandos tienen la misma ecuación dimensional; el trinomio es:

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 + h\rho g = \text{constante}$$

(p = presión = fuerza/superficie; ρ = densidad = masa/volumen; v = velocidad; h = altura; g = aceleración de la gravedad).

Solución

1) Las ecuaciones anteriores serán homogéneas si las ecuaciones de dimensiones de los dos miembros son idénticas.

Ecuación de dimensiones del impulso:

$$[F]\,[t] = MLT^{-2}T = MLT^{-1}$$

Ecuación de dimensiones, variación momento lineal:

$$[M]\,[v] = MLT^{-1}$$

Ecuación de dimensiones del trabajo:

$$[F]\,[s] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

Ecuación de dimensiones variación energía cinética:

$$\left[\frac{1}{2}\,Mv^2\right] = ML^2T^{-2}$$

2)

$$[p] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$\left[\frac{1}{2}\rho v^2\right] = \frac{M}{[V]}(LT^{-1})^2 = ML^{-3}L^2T^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[h\rho g] = [h][\rho][g] = LML^{-3}LT^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$$

Problema 12. Teniendo en cuenta el problema 6, demostrar la homogeneidad de las siguientes fórmulas físicas:

1. $W = VIt = \dfrac{V^2}{R}\, t = I^2Rt$

2. $B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$

3. $v = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

Solución

1) $$[W] = ML^2T^{-2}$$

$$[VIt] = ML^2T^{-3}A^{-1}AT = ML^2T^{-2}$$

$$\left[\frac{V^2}{R}t\right] = \frac{M^2L^4T^{-6}A^{-2}}{ML^2T^{-3}A^{-2}}\ T = ML^2T^{-2}$$

$$[I^2Rt] = A^2ML^2T^{-3}A^{-2}T = ML^2T^{-2}$$

2) $$[B] = MT^{-2}A^{-1}$$

$$\left[\frac{\mu I}{2\pi r}\right] = \frac{MLT^{-2}A^{-2}A}{L} = MT^{-2}A^{-1}$$

3) $$[v] = LT^{-1}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}\right] = \frac{1}{[\epsilon]^{1/2}[\mu]^{1/2}} = \frac{1}{M^{-1/2}L^{-3/2}T^2AM^{1/2}L^{1/2}T^{-1}A^{-1}} = \frac{1}{L^{-1}T} = LT^{-1}$$

Problema 13. Suponiendo que el período de oscilación de un péndulo simple *(T =* tiempo que tarda en dar una oscilación) depende exclusivamente de la longitud del hilo *(l)*, de la masa *(M)* de la partícula que oscila y de la aceleración de la gravedad *(g)* y que en la fórmula del período no intervienen más que las magnitudes indicadas, en producto entre sí (elevadas a exponentes diversos) y ligadas por un coeficiente numérico, deducir las leyes a que obedece el período de oscilación de dicho péndulo.

Solución

La fórmula del péndulo tendrá que ser de la forma:

$$T = Kl^xM^yg^z$$

Siendo la ecuación de dimensiones de g (aceleración), LT^{-2}, se debe verificar para que la igualdad anterior sea homogénea:

$$T = L^x M^y L^z T^{-2z} = L^{x+z} M^y T^{-2z}$$

y por tanto:

$$x + z = 0 \qquad y = 0 \qquad -2z = 1$$

y de aquí:

$$z = -\frac{1}{2} \qquad x = \frac{1}{2} \qquad y = 0$$

Luego la ecuación será:

$$T = Kl^{1/2} M^0 g^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = K\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

(el período es independiente de la masa; la hipótesis hecha en el enunciado, no es cierta.)

Problema 14. Sabiendo que la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared de una vasija es proporcional a la distancia vertical *(h)* del centro del orificio a la superficie libre del líquido y a la aceleración de la gravedad *(g)*; dudamos si tal velocidad es proporcional también a la masa específica o densidad absoluta del líquido. Deseamos resolver nuestra duda y hallar la forma de la función: $v = f(h, g, \rho)$.

Solución

Hagamos:

$$v = K h^x g^y \rho^z$$

(K = constante abstracta de ecuación dimensional 1).

$$[v] = LT^{-1} \qquad [h] = L \qquad [g] = LT^{-2} \qquad [\rho] = ML^{-3}$$

Igualemos las ecuaciones de dimensiones de primero y segundo miembro

$$LT^{-1} = L^x L^y T^{-2y} M^z L^{-3z} = L^{x+y-3z} M^z T^{-2y}$$

los exponentes de las mismas magnitudes simples, habrán de ser iguales en el primero y segundo miembro, por lo que obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= z \\ 1 &= x + y - 3z \\ -1 &= -2y \end{aligned}\right| \begin{aligned} z &= 0 \\ y &= 1/2 \\ x &= 1/2 \end{aligned}$$

Valores que sustituidos en el de v, dan:

$$\boxed{v = Kh^{1/2} g^{1/2} = K\sqrt{hg}}$$

Hemos obtenido la forma de la función y deducido que la velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en la pared de una vasija, es independiente de la densidad de tal líquido.

Problema 15. Sabemos que la energía disipada en forma de calor *(Q)* por el efecto Joule en una resistencia eléctrica depende de la intensidad de corriente que la atraviesa *(I)*, de la resistencia *(R)* y del tiempo *(t)* que circula la corriente por ella. Calcular la forma de la función: $Q = f(I, R, t)$

Solución

La función tendrá que ser de la forma:

$$Q = KI^x R^y t^z$$

siendo:

$$[Q] = ML^2T^{-2} \qquad [I] = A \qquad [R] = ML^2T^{-3}A^{-2} \qquad [t] = T$$

tendrá que verificarse:

$$ML^2T^{-2} = A^x\, M^y\, L^{2y}\, T^{-3y}\, A^{-2y}\, T^z \quad \Rightarrow \quad ML^2T^{-2} = M^y\, L^{2y}\, T^{z-3y}\, A^{x-2y}$$

y por tanto:

$$y = 1 \qquad z - 3y = -2 \quad \Rightarrow \quad z = 1$$
$$x - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

luego la ecuación será:

$$\boxed{Q = KI^2Rt}$$

C) CALCULO DE ERRORES

FORMULARIO

ERROR ABSOLUTO: *«Es la diferencia entre la medida exacta de una magnitud (x_0) y la medida obtenida experimentalmente (x)».*

$$\epsilon = \Delta x = x_0 - x$$

ERROR RELATIVO: *«Es el cociente del error absoluto al valor exacto de la magnitud».*

$$E = \frac{\Delta x}{x_0}$$

MEDIA ARITMETICA DE UN CONJUNTO DE n DATOS:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} \qquad \qquad \bar{x} = \frac{\Sigma n_i x_i}{n}$$

ERROR EN LA MEDIA ARITMÉTICA DE UN CONJUNTO DE n DATOS (Fórmula de Gaus):

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \qquad \qquad \epsilon = \pm \sqrt{\frac{\Sigma n_i(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

CÁLCULO DE ERROR RELATIVO EN MEDIDAS INDIRECTAS:

Supongamos que la magnitud a queda determinada al conocer las medidas de b y c por la fórmula:

$$a = k\,\frac{b^n}{c^m}$$

en la que k, m y n son constantes conocidas. Se trata de calcular el error relativo de a una vez calculados los de b y c. Tomemos logaritmos neperianos en la expresión anterior:

$$\ln a = \ln k + n \ln b - m \ln c \qquad \Rightarrow \qquad \frac{da}{a} = n \frac{db}{b} - m \frac{dc}{c}$$

sustituyendo las diferenciales por incrementos finitos, haciendo positivos todos los términos del segundo miembro:

$$\epsilon = \frac{\Delta a}{a} = n \frac{\Delta b}{b} + \mathrm{m} \frac{\Delta c}{c}$$

quedando, así, determinado el error máximo de a en función de los de b y c.

Se ha dado signo + a todos los términos del segundo miembro puesto que la probabilidad de errores accidentales por exceso y defecto es la misma y de esta manera nos colocamos en las *condiciones más desfavorables* (sin compensaciones de errores) obteniendo el *máximo error relativo.*

ACOTACION DE ERRORES:

En una medida directa, el valor de la magnitud problema está comprendido entre los valores máximo y mínimo obtenidos al realizar varias determinaciones experimentales. Las cifras comunes de tales medidas extremas, pueden considerarse ciertas.

En el caso de las medidas indirectas nos pondremos en las *condiciones más desfavorables,* para obtener los valores extremos; es decir si:

$$a = k \frac{b^2}{c^3}$$

calcularemos el valor *máximo* de la medida de a, empleando el valor máximo experimental de b y el mínimo de c; para obtener el *mínimo* valor de la medida de a, emplearemos el mínimo de b, y el máximo de c; a estará comprendida entre los dos valores obtenidos y las cifras comunes de ellos, pueden considerarse como ciertas.

Problema 16.

1. En la medida de 1 m se ha cometido un error de 1 mm, y en 300 km, 300 m. ¿Qué error relativo es mayor?

2. ¿Qué preferirías ganar, dos pesetas por cada cinco duros o el 8 %?

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{0{,}001}{1} = \frac{1}{1\,000} \\ E_2 &= \frac{300}{300\,000} = \frac{1}{1\,000} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\text{Los dos son iguales.}}$$

2) $$8\ \%\ \text{de } 25 \text{ ptas} = \frac{8 \times 25}{100} = 2 \text{ ptas} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\text{La ganancia es la misma}}$$

Problema 17. Como medida de un radio de 7 dm hemos obtenido 70,7 cm. Calcular:
1. El error absoluto.
2. El error relativo.
3. El error absoluto y relativo en la medida de la longitud de la circunferencia de tal radio.
4. El error absoluto y el relativo en la medida del área del círculo.
5. El error absoluto y el relativo en la medida del volumen de la esfera de 7 dm de radio.

Solución

1) $$\Delta x = 70{,}7 - 70 = 0{,}7 \text{ cm}$$

2) $$E = \frac{0{,}7}{70} = 0{,}01 \qquad (1\ \%)$$

3) $$\Delta x = 2\pi(70{,}7 - 70) = 2\pi 0{,}7 = 1{,}4\pi \text{ cm}$$
$$E = \frac{1{,}4\pi}{2\pi 70} = \frac{1{,}4}{140} = 0{,}01 \qquad (1\ \%)$$

4) $$\Delta x = \pi(70{,}7^2 - 70^2) = 98{,}49\pi \text{ cm}^2$$
$$E = \frac{98{,}49\pi}{70^2\pi} = \frac{98{,}49}{70^2} = 0{,}0201 \quad (2{,}01\ \%)$$

5) $$\Delta x = \frac{4}{3}\pi(70{,}7^3 - 70^3) = 13\,857{,}66\pi \text{ cm}^3$$
$$E = \frac{\frac{3}{4}\pi(70{,}7^3 - 70^3)}{\frac{4}{3}\pi 70^3} = 0{,}03 \qquad (3\ \%)$$

Problema 18. Midiendo una longitud con una cinta de agrimensor cometemos errores del 0,5 %. ¿Cuál es el error absoluto y el relativo en la medida del área de un terreno rectangular de 100×50 m?

Solución

$$A = ab$$
$$\ln A = \ln a + \ln b$$
$$\frac{dA}{A} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b}$$
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = 0{,}5\ \% \qquad \frac{\Delta b}{b} = 0{,}5\ \%$$

$$\boxed{\frac{\Delta A}{A} = 1\ \%} \qquad \frac{\Delta A}{5000} = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta A = 50 \text{ m}^2}$$

Problema 19.
1. Demostrar que los errores relativos de $a = b/c$ y de $a' = bc$, son iguales.
2. Demostrar que el error relativo en la medida del volumen de un cubo es tres veces mayor que en el de su arista.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{ll} \ln a = \ln b - \ln c & \ln a' = \ln b + \ln c \\ \dfrac{da}{a} = \dfrac{db}{b} - \dfrac{dc}{c} & \dfrac{da'}{a'} = \dfrac{db}{b} + \dfrac{dc}{c} \\ \dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta b}{b} - \dfrac{\Delta c}{c} & \dfrac{\Delta a'}{a'} = \dfrac{\Delta b}{b} + \dfrac{\Delta c}{c} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta a'}{a'}}$$

2)

$$V = l^3 \Rightarrow \ln V = 3 \ln l \Rightarrow \frac{dV}{V} = 3\,\frac{dL}{l} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta V}{V} = 3\,\frac{\Delta l}{l}}$$

Problema 20. Determinar el error relativo en la medida de la aceleración de la gravedad, conocidos los errores relativos en las medidas de la longitud de un péndulo simple y de su período. Se suponen oscilaciones suficientemente pequeñas para que cumpla la ley: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$

Solución

$$g = 4\pi^2\,\frac{l}{T^2}$$

tomando logaritmos:

$$\ln g = \ln 4 + 2\ln\pi + \ln l - 2\ln T \Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dl}{l} - 2\,\frac{dT}{T} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\,\frac{\Delta T}{T}}$$

Problema 21. La ecuación de estado de los gases perfectos es: $pV = nRT$ al aplicarla para calcular la temperatura de un gas una vez medidos la presión, 1,22 atm con un error de $\pm$ 1 mm de Hg, y el volumen 1,92 l, con un error de $\pm$ 1 cm^3, nos dio 125 °C. ¿Cuál es el error absoluto máximo que se puede esperar en esta última cantidad si se considera como exacto n (número de moles), siendo R la constante universal de los gases perfectos?

Solución

$$pV = nRT \Rightarrow \ln p + \ln V = \ln n + \ln R + \ln T \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

ya que:

$$\frac{dn}{n} = 0 \qquad \frac{dR}{R} = 0$$

luego:

$$\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}$$

y como:

$$\Delta p = 1 \text{ mm de Hg} = \frac{0,1}{76} \text{ atm} \qquad \Delta V = 1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{l} \qquad T = 398 \text{ °K}$$

obtenemos:

$$\frac{0,1}{76 \times 1,2} + \frac{10^{-3}}{1,92} = \frac{\Delta T}{398} \Rightarrow \boxed{\Delta T = 0,65 \text{ °K}} \Rightarrow \qquad T = 398 \pm 0,65 \text{ °K}$$

Problema 22. Hemos realizado diez veces la pesada de un cuerpo obteniendo los siguientes resultados expresados en gramos:

12,372	12,373	12,372	12,371	12,370
12,374	12,372	12,372	12,371	12,373

calcular el error de la media aritmética.

Solución

Núm. de la pesada	x_i *en gramos*	$x_i - x_m$ *en mg*	$(x_i - x_m)^2$
1.ª	12,372	0	0
2.ª	12,373	+1	1
3.ª	12,372	0	0
4.ª	12,371	−1	1
5.ª	12,370	−2	4
6.ª	12,374	+2	4
7.ª	12,372	0	0
8.ª	12,372	0	0
9.ª	12,371	−1	1
10.ª	12,373	+1	1
$n(n-1) = 10 \times 9 = 90$	$\bar{x} = 12,372$ g		$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 12$

$$\boxed{\Delta x = \pm \sqrt{\frac{12}{90}} = \pm 0,36 \text{ mg}}$$

El resultado de nuestras pesadas es:

$$m = 12,372 \pm 0,00036 \text{ g}$$

que corresponde a un error relativo:

$$\boxed{E = \pm \frac{0,00036 \times 100}{12,372} \% = \pm 3 \times 10^{-3} \%}$$

Problema 23. En la medida de una longitud hemos determinado los siguientes valores:

1,32 cm	1,30 cm	1,32 cm	1,33 cm	1,32 cm
1,31 cm	1,32 cm	1,31 cm	1,31 cm	1,31 cm

Hallar el error de la media aritmética y los errores relativos de las medidas del área y volumen de un cuadrado y un cubo que tenga por arista tal longitud.

Solución

Número de la medida	*x en décimas de milímetro*	$x_i - x_m$ *en centésimas de milímetro*	$(x_i - x_m)^2$
1.ª	132	+ 5	25
2.ª	131	− 5	25
3.ª	130	−15	225
4.ª	132	+ 5	25
5.ª	132	+ 5	25
6.ª	131	− 5	25
7.ª	133	+15	225
8.ª	131	− 5	25
9.ª	132	+ 5	25
10.ª	131	− 5	25
$n(n-1) = 90$	$x_m = 131{,}5$		$\sum_1^n (x_i - x_m)^2 = 650$

$$\Delta l = \epsilon = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} [x_i - x_m]^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{650}{90}} \simeq \pm\, 2{,}687 \text{ centésimas de mm}$$

$$A = l^2 \Rightarrow \ln A = 2 \ln l \Rightarrow \frac{dA}{A} = 2\frac{dl}{l}$$

$$\frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta l}{l} = 2\frac{2{,}687}{1\,315} = 4{,}087 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{0{,}4\ \%}$$

$$V = l^3 \Rightarrow \ln V = 3 \ln l \Rightarrow \frac{dV}{V} = 3\frac{dl}{l}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\frac{\Delta l}{l} = \frac{3}{2}\frac{\Delta A}{A} = \frac{3}{2} 4{,}087 \times 10^{-3} = 6{,}13 \times 10^{-3} \Rightarrow \boxed{0{,}6\ \%}$$

Problema 24. Al determinar el valor de la expresión: $x = 7a^2/b$ se han hallado para a y b los siguientes valores:

	valores de a		valores de b
valores de a	2,2000	valores de b	4,1000
	2,1990		4,0990
	2,2010		4,1001
	2,1985		4,1002

Acotar el valor de x

Solución

$$\text{Valor máximo de } x = 7\frac{2{,}201^2}{4{,}099} = 8{,}2729$$

$$\text{Valor mínimo de } x = 7\frac{2{,}1985^2}{4{,}1002} = 8{,}2517$$

$$\Rightarrow \boxed{8{,}2729 \geqslant x \geqslant 8{,}2517}$$

Capítulo II

MEDIDAS DE LONGITUDES Y ANGULOS

FORMULARIO

PRECISIÓN DEL NONIUS

$$p = D - d = \frac{D}{n}$$

D: longitud de la división de la regla. *d:* longitud de la división del nonius. *n:* número de divisiones del nonius.

ESFERÓMETRO

$$R = \frac{f^2 + r^2}{2f} \qquad r = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

R: radio de la esfera a medir. *f:* «flecha» (Medida efectuada con el aparato). *l:* media aritmética de los tres lados del triángulo que determinan las tres patas del esferómetro. *r:* radio de la circunferencia que pasa por los puntos en que se apoyan las patas del esferómetro.

Problema 1. Calcular la precisión de un nonius que tiene 20 divisiones si la regla está dividida en mm.

Solución

$$\boxed{p = \frac{D}{n} = \frac{1 \text{ mm}}{20} = 0{,}05 \text{ mm}}$$

Problema 2. Se tiene una regla dividida en medios milímetros y se desea colocarle un nonius para que aprecie centésimas de milímetro. ¿Cómo hay que construirlo?

Solución

$$p = \frac{D}{n}$$

(p = precisión; D = longitud de una división de la regla; n = número de divisiones del nonius que tienen la misma longitud que $n - 1$ divisiones de la regla).

$$n = \frac{0{,}5}{0{,}01} = 50$$

$$\boxed{\text{Se tomarán 49 divisiones de la regla y se dividirán en 50 partes iguales en el nonius.}}$$

Problema 3. Un limbo circular está dividido en medios grados y se le aplica un nonius construido de forma que 29 divisiones del limbo se han dividido en 30 partes iguales en el nonius. ¿Cuál es su precisión?

Solución

$$\boxed{p = \frac{D}{n} = \frac{0{,}5 \text{ grados}}{30} = \frac{30 \text{ minutos}}{30} = 1 \text{ minuto}}$$

Problema 4. El paso de rosca de un palmer es de medio milímetro y su cabeza tiene 50 divisiones. ¿Cuál es el espesor de un objeto si se han dado 6 vueltas y 23 divisiones?

Solución

$$p = \frac{D}{n}$$

D: paso de rosca. *n:* número de divisiones del tambor.

$$p = \frac{0{,}5 \text{ mm}}{50} = 0{,}01 \text{ mm}$$

luego el espesor *(e)* será:

$$\boxed{e = 6 \times 0{,}5 + 23 \times 0{,}01 = 3{,}23 \text{ mm}}$$

Problema 5. Las patas de un esferómetro forman un triángulo equilátero de lado 8,65 cm. Aplicando el aparato a una superficie esférica, la medida de su flecha es de 0,1 cm. Calcular en litros la capacidad de la esfera.

Solución

El radio de la circunferencia que pasa por los puntos en que se apoyan las patas del esferómetro es:

$$r = \frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{8{,}65}{\sqrt{3}} = 5 \text{ cm}$$

El radio de la esfera viene dado por la fórmula:

$$R = \frac{f^2 + r^2}{2f} = \frac{0{,}1^2 + 5^2}{2 \times 0{,}1} \simeq 125 \text{ cm}$$

El volumen de la esfera es:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 \simeq 8181231 \text{ cm}^3 \simeq 8181 \text{ l}}$$

Problema 6. Supongamos que el aplicar un esferómetro a un casquete esférico, la medida de la flecha —*f*— es la tercera parte de la longitud del lado —*l*— del triángulo equilátero que forman los puntos de apoyo de esferómetro. Demostrar que el radio de la esfera es de doble longitud que la flecha —*f*—.

Solución

$$R = \frac{f^2 + r^2}{2f} \qquad \left| \begin{array}{l} r = \dfrac{l}{\sqrt{3}} \\[2ex] f = \dfrac{l}{3} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{f^2 + \dfrac{l^2}{3}}{2f} = \frac{f^2 + \dfrac{9f^2}{3}}{2f} = 2f}$$

Problema 7. Considerando como cierta la definición de metro en función del cuadrante del meridiano terrestre, calcular:

1. El número de km del radio terrestre.
2. Dibujar en escala de $1/10^8$, un círculo máximo terrestre.
3. ¿Qué relación hay entre la longitud de un meridiano terrestre y la de la circunferencia dibujada?
4. En el dibujo que has realizado ¿cuántas veces es menor el área de tal círculo, que la de un círculo máximo de la Tierra?
5. ¿Cuántas veces es mayor el volumen de la Tierra comparado con el volumen de la esfera cuyo círculo máximo has dibujado?

Solución

1) El radio terrestre vale:

$$R_0 = \frac{4 \times 10^7}{2\pi} \text{ m} = \frac{2 \times 10^4}{\pi} \text{ km}$$

2) El radio de la circunferencia terrestre en escala $\dfrac{1}{10^8}$ será:

$$R = \frac{R_0}{10^8} = \frac{2 \times 10^7}{\pi 10^8} = \frac{0{,}2}{\pi} \text{ m} = \frac{20}{\pi} \text{ cm}$$

3) Circunferencia terrestre: $C_0 = 2\pi R_0$

Circunferencia de la representación: $C = \dfrac{2\pi R_0}{10^8}$

$$\frac{C_0}{C} = 10^8$$

4) Area de un círculo máximo: $A_0 = \pi R_0^2$

Area de la representación: $A = \pi \left(\dfrac{R_0}{10^8} \right)^2$

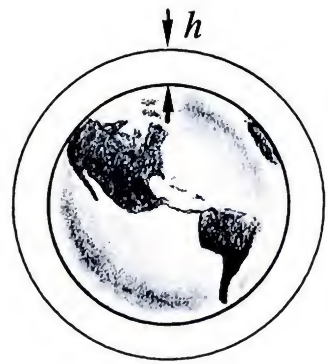
$$\frac{A_0}{A} = 10^{16}$$

5) Volumen de la Tierra: $V_0 = \dfrac{3}{4}\ \pi R_0^3$

Volumen de la representación: $V_r = \dfrac{4}{3}\ \pi \left(\dfrac{R}{10^8} \right)^3$

$$\frac{V_0}{V} = 10^{24}$$

Problema 8. Suponiendo la Tierra perfectamente esférica y sin ningún relieve, la rodeamos con un alambre por una circunferencia máxima. Aumentamos la longitud de tal hilo metálico en 6,28 m y volvemos a rodear la Tierra con él, de forma que todos sus puntos queden a la misma altura sobre el suelo; ¿cuánto valdrá esta altura? (h de la figura).



Problema II-8

Solución

Tomemos para π el valor 3,14:

$$2\pi R_0 + 6{,}28 = 2\pi\ (R_0 + \Delta R) \quad \Rightarrow \quad 6{,}28 = 2\pi\Delta R \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \Delta R = \frac{6{,}28}{2\pi} = 1\ \text{m}}$$

Problema 9. Calcular la distancia entre dos puntos del meridiano terrestre para que los radios de la Tierra que pasan por ellos formen un ángulo de un minuto. (Radio terrestre = = 6 370 km).

Solución

El número de radianes que corresponde a un minuto se calcula:

$$\left.\begin{array}{l} 180° \ \ldots\ldots\ \pi \\ \dfrac{1}{60} \ \ldots\ldots\ \varphi \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{10\,800}\ \text{rad}$$

luego:

$$\boxed{d = \varphi\ R_0 = \frac{\pi}{10\,800}\ 6\,370 \simeq 1{,}853\ \text{km}}$$

Problema 10. La unidad de ángulos empleada en artillería es la «milésima verdadera» o ángulo bajo, el cual se ve un metro a mil metros de distancia. Calcular en grados y radianes el valor de tal unidad. (Sustituir el arco de mil metros de radio y cuya cuerda es un metro, por la cuerda).

Solución

$$\text{ángulo} = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \quad \Rightarrow \quad 1^{\circ\circ}\ (1\ \text{milésima}) = \frac{1\ \text{m}}{1\,000} = 0{,}001\ \text{radianes}$$

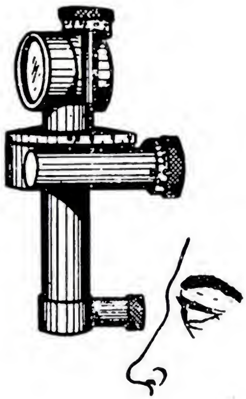
$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } 180° \text{ equivalen a } & \pi \text{ radianes} \\ x & 0{,}001 \end{array}\right| \quad \boxed{x = \frac{0{,}180}{\pi} = 0{,}0573°}$$

Problema 11. Para redondear se emplea prácticamente en artillería la «milésima artillera», que es el resultado de dividir un giro (360°) en 6 400 partes iguales. Los goniómetros militares emplean esta unidad de medida. El más general es un limbo

dividido en 64 partes iguales y un tambor dividido en 100 partes iguales, de forma que un giro de tambor corresponde a una división del limbo. Se desea saber:

1. ¿A cuántas milésimas artilleras corresponde una división del limbo? ¿Cuál es la precisión del aparato en milésimas artilleras?

2. Cuando el capitán de una batería dé la deriva a sus piezas de 3 543 milésimas artilleras. ¿Cómo colocará el apuntador, el limbo y el tambor con respecto a los índices que marcan su giro?



Problema II-11

Solución

1) Como los 6400°° las hemos dividido en 64 partes, cada una de estas partes valdrá:

$$\frac{6\,400}{64} = 100°°$$

La precisión del aparato será de 1°°, puesto que las 100 divisiones del tambor corresponden a 1 división del limbo.

2) Cuando el capitán ordene la deriva 3 543, el apuntador colocará en el limbo la división 35 y luego buscará en el tambor la división 43, colocándola frente al índice.

Capítulo III

CALCULO VECTORIAL *

A) ALGEBRA VECTORIAL

FORMULARIO

DIVERSAS FORMAS DE EXPRESAR UN VECTOR EN FUNCION DE SUS COMPONENTES COORDENADAS:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad \boldsymbol{a}(x, y, z) \qquad \boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

MÓDULO Y COSENOS DIRECTORES:

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{a} \qquad \cos\beta = \frac{y}{a} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{a}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

SUMA DE VECTORES:

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \ldots + \boldsymbol{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i$$

siendo:

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{z}_1$$
$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{z}_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n + \boldsymbol{z}_n$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} \qquad s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \Sigma x_i$$
$$y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \Sigma y_i$$
$$z = z_1 + z_2 + \ldots + z_n = \Sigma z_i$$

* Los problemas referentes a operadores (**grad**, **rot**, div, etc.) se verán en Teoría de Campos (capítulo X).

Producto de un escalar por un vector: es un vector:

$$\alpha \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \qquad a = \alpha b$$

Vectores unitarios: Son los que tienen de módulo uno:

$$\boldsymbol{u}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{v}}{v} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Producto escalar de dos vectores: Es un escalar:

$$\boldsymbol{v}(xyz) \qquad \boldsymbol{v}'(x'y'z')$$
$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}' = vv' cos\alpha$$

en función de las componentes de los vectores:

$$\boldsymbol{v} \cdot v' = xx' + yy' + zz'$$

Propiedades:

a) Goza de las propiedades conmutativa y distributiva.
b) Si dos vectores son perpendiculares su producto escalar es cero.
c) Si dos vectores tienen la misma dirección y sentido su producto escalar es igual al producto de sus módulos.

Producto vectorial de dos vectores: Es un vector:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}'$$
$$p = vv'\text{sen}\alpha$$

en función de las componentes de los vectores:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

Propiedades:

a) Goza de las propiedades anticonmutativa y distributiva.
b) Si dos vectores son paralelos su producto escalar es nulo.
c) El módulo del producto vector es igual al área del paralelogramo que tiene a los dos vectores como lados.

PRODUCTO MIXTO: Es un escalar cuyo valor es el volumen del paralelepípedo que tiene los tres vectores como lados.

$$V = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$$

Propiedad:

$$V = \boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{c} \cdot [\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b} \cdot [\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}]$$

en función de las componentes coordenadas de los vectores:

$$\boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

DOBLE PRODUCTO VECTORIAL: Es un vector:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}]$$

Propiedad:

$$\boldsymbol{a} \times [\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

Problema 1. Dados los vectores:

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{b} = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

calcular:

1. El vector suma y su módulo.
2. El vector diferencia y el ángulo que forma con el eje OX.
3. El vector $\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ y el vector unitario que define la dirección y sentido de $\boldsymbol{c}$.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}} \Rightarrow \boxed{s = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}}$

2) $\boxed{\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = 7\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}} \Rightarrow \operatorname{tag} \varphi = -\dfrac{3}{7} \Rightarrow \boxed{\varphi = -23° \; 11' \; 55''}$

3)
$$\left.\begin{aligned} 2\boldsymbol{a} &= 6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} \\ -3\boldsymbol{b} &= 12\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c} = 18\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}} \Rightarrow c = \sqrt{18^2 + 7^2} = \sqrt{373}$$

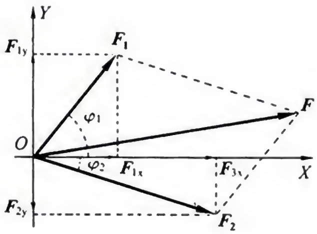
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{c}}{c} = \frac{18}{\sqrt{373}}\boldsymbol{i} - \frac{7}{\sqrt{373}}\boldsymbol{j}}$$

Problema 2. Se tienen dos fuerzas coplanarias y concurrentes cuyos módulos son: $F_1 = 5$ kp y $F_2 = 7$ kp, que forman respectivamente los siguientes ángulos con el eje OX: 60° y −30°. Calcular:

1. La fuerza resultante.
2. Su módulo.
3. Angulo que forma con el eje OX.

Solución

1)
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$
$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$



Problema III-2

$$\varphi_1 = 60° \quad \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1 \cos\varphi_1 = \dfrac{5}{2}\,\text{kp} \\[2ex] F_{1y} = F_1 \,\text{sen}\varphi_1 = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{kp} \end{array} \right.$$

$$\varphi_2 = -30° \quad \left| \begin{array}{l} F_{2x} = F_2 \cos\varphi_2 = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}\,\text{kp} \\[2ex] F_{2y} = F_2 \,\text{sen}\varphi_2 = -\dfrac{7}{2}\,\text{kp} \end{array} \right.$$

$$F_x = \frac{5 + 7\sqrt{3}}{2}\,\text{kp} \qquad F_y = \frac{5\sqrt{3} - 7}{2}\,\text{kp}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{5 + 7\sqrt{3}}{2}\,\boldsymbol{i} = \frac{5\sqrt{3} - 7}{2}\,\boldsymbol{j} \quad \text{kp}}$$

2)
$$\boxed{F = \sqrt{\left(\frac{5 + 7\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3} - 7}{2}\right)^2} = 8{,}6 \text{ kp}}$$

3)
$$\text{tag}\varphi = \frac{5\sqrt{3} - 7}{5 + 7\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 5°\ 32'\ 15''}$$

Problema 3. Deseamos volar en un avión a 500 km/h hacia el E, la velocidad del viento es 80 km/h. ¿Cuál debe ser la velocidad y rumbo de nuestro avión?
1. Si el viento sopla hacia el S.
2. Si el ciento sopla hacia el SE.
3. Si el viento sopla hacia el SO.

Solución

En los tres casos se verificará:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} - \mathbf{c} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

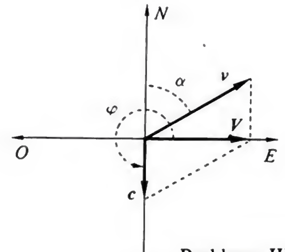
$$\boldsymbol{V} \quad \left| \begin{array}{l} V_x = 500 \text{ km/h} \\[1ex] V_y = 0 \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{c} \quad \left| \begin{array}{l} c_x = c \cos\varphi \\[1ex] c_y = c \,\text{sen}\varphi \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= V_x - c_x = 500 - c\cos\varphi \\ v_y &= V_y - c_y = -c_y \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} c &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \text{tag}\alpha &= \frac{v_x}{v_y} \end{aligned}$$

1)
$$\varphi = 270° \quad \left| \begin{aligned} c_x &= 0 \\ c_y &= -80 \text{ km/h} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_x &= 500 \text{ km/h} \\ v_y &= 80 \text{ km/h} \end{aligned} \right.$$

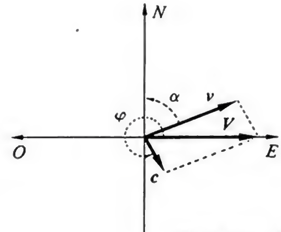
$$\boldsymbol{v} = 500\boldsymbol{i} + 80\boldsymbol{j} \quad \left| \begin{aligned} &\boxed{v = \sqrt{500^2 + 80^2} = 506{,}3 \text{ km/h}} \\ &\text{tag}\varphi = \frac{500}{80} \Rightarrow \boxed{\alpha = 80°\ 54'\ 35''} \end{aligned} \right.$$



Problema III-3-1.ª

2)
$$\varphi = 315° \quad \left| \begin{aligned} c_x &= 40\sqrt{2} \text{ km/h} \\ c_y &= -40\sqrt{2} \text{ km/h} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_x &= 500 - 40\sqrt{2} \text{ km/h} \\ v_y &= 40\sqrt{2} \text{ km/h} \end{aligned} \right.$$

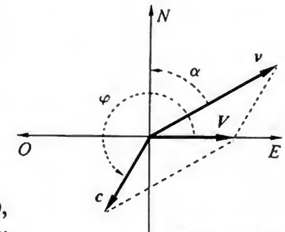
$$\boldsymbol{v} = (500 - 40\sqrt{2})\boldsymbol{i} + 40\sqrt{2}\boldsymbol{j} \quad \left| \begin{aligned} &\boxed{v = 447 \text{ km/h}} \\ &\text{tag}\alpha = \frac{500 - 40\sqrt{2}}{40\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 82°\ 43'\ 48''} \end{aligned} \right.$$



Problema III-3-2.ª

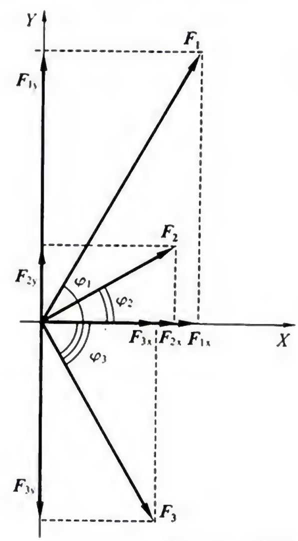
3)
$$\varphi = 225° \quad \left| \begin{aligned} c_x &= -40\sqrt{2} \text{ km/h} \\ c_y &= -40\sqrt{2} \text{ km/h} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} v_x &= 500 + 40\sqrt{2} \text{ km/h} \\ v_y &= 40\sqrt{2} \text{ km/h} \end{aligned} \right.$$

$$\boldsymbol{v} = (500 + 40\sqrt{2})\boldsymbol{i} + 40\sqrt{2}\boldsymbol{j} \quad \left| \begin{aligned} &\boxed{v = 559{,}4 \text{ km/h}} \\ &\text{tag}\alpha = \frac{500 + 40\sqrt{2}}{40\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 84°\ 11'\ 47''} \end{aligned} \right.$$



Problema III-3-3.ª

Problema 4. Se tienen tres fuerzas concurrentes cuyos módulos son: $F_1 = 6$ kp, $F_2 = 3$ kp, $F_3 = 4$ kp, que forman, respectivamente, los siguientes ángulos con el eje *OX:* 45°, 30° y −60°. Las tres fuerzas están en el mismo plano. Calcular el módulo de la resultante y el coseno del ángulo que forman con el eje *OX*.



Problema III-4

Solución

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ F_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos\varphi &= \frac{F_x}{F} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F}_1 \quad \left| \begin{aligned} F_{1x} &= F_1\cos\varphi_1 = 6\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ kp} \\ F_{1y} &= F_1\text{sen}\varphi_1 = 6\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ kp} \end{aligned} \right.$$

$$\boldsymbol{F}_2 \quad \left| \begin{aligned} F_{2x} &= F_2\cos\varphi_2 = 3\ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ kp} \\ F_{2y} &= F_2\text{sen}\varphi_2 = 3\ \frac{1}{2} \text{ kp} \end{aligned} \right.$$

$$F_3 \quad \begin{cases} F_{3x} = F_3\cos\varphi_3 = 4\ \dfrac{1}{2} = 2 \text{ kp} \\ F_{3y} = F_3\text{sen}\varphi_3 = 4\left(-\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \text{ kp} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_x = 3\sqrt{2} + 3\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 8{,}84 \text{ kp} \\ F_y = 3\sqrt{2} + 3\ \dfrac{1}{2} - 2\sqrt{3} = 2{,}28 \text{ kp} \end{array}\right| \quad \boldsymbol{F} = 8{,}84\boldsymbol{i} + 2{,}28\boldsymbol{j} \text{ kp}$$

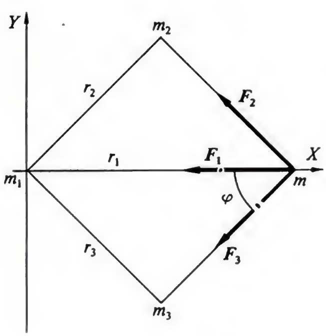
$$\boxed{F = \sqrt{8{,}84^2 + 2{,}28^2} = 9{,}1 \text{ kp}} \qquad \boxed{\cos\varphi = \frac{8{,}84}{9{,}1} = 0{,}97}$$

Problema 5. Teniendo en cuenta que la fuerza de interacción Newtoniana entre dos partículas de masa m y m' que distan entre sí r, es:

$$\boldsymbol{F} = -G\ \frac{mm'}{r^3}\ \boldsymbol{r} \qquad \left[G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}\right]$$

resolver el siguiente problema: Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) definimos un sistema de ejes rectangulares. Tres partículas de masa 4 kg las colocamos en (0,0), (2,2), (2, −2) medidas estas coordenadas en metros. Calcular la fuerza que ejercerán sobre una partícula de masa 1 kg colocada en (4,0) m.

Solución



Problema III-5

$$m_1 = m_2 = m_3 = 4 \text{ kg}$$
$$r_1 = 4\text{m} \qquad r_2 = r_3 = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

Los módulos de las fuerzas que actúan sobre la partícula de masa $m = 1$ kg son:

$$F_1 = G\ \frac{mm_1}{r_1^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{1 \times 4}{16} = 1{,}667 \times 10^{-11} \text{ N}$$
$$F_2 = G\ \frac{mm_2}{r_2^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{1 \times 4}{8} = 3{,}335 \times 10^{-11} \text{ N}$$
$$F_3 = G\ \frac{mm_3}{r_3^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{1 \times 4}{8} = 3{,}335 \times 10^{-11} \text{ N}$$
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

siendo:

$$\varphi_1 = -180° \qquad \varphi_2 = 135° \qquad \varphi_3 = 225°$$

obtenemos:

$$\boldsymbol{F}_1 \quad \begin{cases} F_{1x} = F_1\cos\varphi_1 = -F_1 = -1{,}667 \times 10^{-11} \text{ N} \\ F_{1y} = F_1\text{sen}\varphi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F}_2 \quad \begin{cases} F_{2x} = F_2\cos\varphi_2 = -3{,}335 \times 10^{-11}\sqrt{2} / 2 = -2{,}358 \times 10^{-11} \text{ N} \\ F_{2y} = F_2\text{sen}\varphi_2 = 2{,}358 \times 10^{-11} \text{ N} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F_3} \quad \left| \begin{array}{l} F_{3x} = F_3\cos\varphi_3 = -2{,}358 \times 10^{-11}\ \text{N} \\ F_{3y} = F_3\text{sen}\varphi_3 = -2{,}358 \times 10^{-1}\ \text{N} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = -6{,}384 \times 10^{-11}\ \text{N} \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = -6{,}384 \times 10^{-11}\ \boldsymbol{i}\ \text{N}}$$

La fuerza resultante está en el eje X y su sentido es hacia el origen.

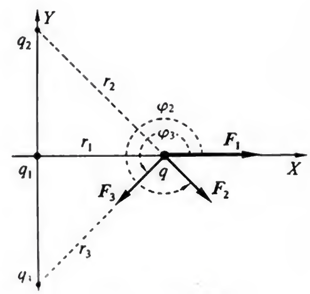
Problema 6. Si la expresión de la ley de Coulomb es:

$$\boldsymbol{F} = K_0 \frac{qq'}{r^3}\boldsymbol{r} \qquad \left(K_0 = 9 \times 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right)$$

Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de 1 μC colocada en el punto (6, 0)m debida a la siguiente distribución: En el origen de coordenadas una carga $q_1 = 2\mu$C, en el punto (0,3)m una carga $q_2 = 3\mu$C y en el punto (0,−3)m una carga $q_3 = -3\mu$C (suponemos las cargas en el vacío).

Solución

$$r_1 = 6\ \text{m} \qquad r_2 = r_3 = \sqrt{45}\ \text{m}$$



Problema III-6

Los módulos de las fuerzas que actúan sobre q son:

$$F_1 = K_0 \frac{qq_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{36} = 5 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

$$F_2 = K_0 \frac{qq_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{45} = 6 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

$$F_3 = K_0 \frac{qq_3}{r_3^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{45} = 6 \times 10^{-4}\ \text{N}$$

Siendo:

$$\varphi_1 = 0° \quad \left| \begin{array}{l} \cos\varphi_2 = \dfrac{6}{\sqrt{45}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\[2ex] \text{sen}\varphi_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{45}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right| \begin{array}{l} \cos\varphi_3 = -\dfrac{6}{\sqrt{45}} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\[2ex] \text{sen}\varphi_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{45}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{F_1} \left| \begin{array}{l} F_{1x} = 5 \times 10^{-4}\ \text{N} \\ F_{1y} = 0 \end{array} \right. \\[2ex] \boldsymbol{F_2} \left| \begin{array}{l} F_{2x} = \dfrac{12}{\sqrt{5}} 10^{-4}\ \text{N} \\[2ex] F_{2y} = -\dfrac{6}{\sqrt{5}} 10^{-4}\ \text{N} \end{array} \right. \\[2ex] \boldsymbol{F_3} \left| \begin{array}{l} F_{3x} = -\dfrac{12}{\sqrt{5}} 10^{-4}\ \text{N} \\[2ex] F_{3y} = -\dfrac{6}{\sqrt{5}} 10^{-4}\ \text{N} \end{array} \right. \end{array} \left| \begin{array}{l} F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 5 \times 10^{-4}\ \text{N} \\[2ex] F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = -\dfrac{12}{\sqrt{5}} 10^{-4}\ \text{N} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = 5 \times 10^{-4}\boldsymbol{i} - \frac{12}{\sqrt{5}}\ 10^{-4}\boldsymbol{j} \quad \text{N}}$$

Problema 7. Si un vector forma con los ejes X e Y ángulos de 60° y tiene de módulo 4 unidades. Calcular
1. Sus componentes coordenadas.
2. Angulo que forma con el eje Z.

Solución

1.^er^ Método

1) Sea $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ el vector que nos piden, entonces:

$$\boxed{x = a\cos\alpha = 4\,\frac{1}{2} = 2}$$

$$\boxed{y = a\cos\beta = 4\,\frac{1}{2} = 2}$$

como:

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - 4 - 4} = 2\sqrt{2}}$$

2)

$$\cos\gamma = \frac{z}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = 45°}$$

2.º Método

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\gamma = 45°}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = a\cos\alpha = 4\,\dfrac{1}{2} = 2 \\ y = a\cos\beta = 4\,\dfrac{1}{2} = 2 \\ z = a\cos\gamma = 4\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \end{array}}$$

Comprobación

$$a^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 + 4 + 4 \times 2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Problema 8. Un vector tiene por origen respecto de cierto sistema de referencia el punto $O\,(-1, 2, 0)$ y de extremo $P\,(3, -1, 2)$. Calcular:
1. Componentes del vector $\boldsymbol{OP}$.
2. Módulo y cosenos directores.
3. Un vector unitario en la dirección de él pero de sentido contrario.

Solución

1) $\boldsymbol{OP}\,(x, y, z)$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - (-1) = 4 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 2 - 0 = 2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{OP} = 4\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}$$

2)

$$\boxed{OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{29}}} \qquad \boxed{\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{29}}} \qquad \boxed{\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{29}}}$$

3)

$$\boxed{-\frac{\boldsymbol{OP}}{OP} = -\frac{4}{\sqrt{29}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\boldsymbol{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\boldsymbol{k}}$$

Problema 9. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ (2, 4, 6) y $\boldsymbol{b}$ (1,−2, 3). Calcular:
1. El vector suma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, su módulo y cosenos directores.
2. El vector diferencia $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ y el vector unitario que define su dirección y sentido.

Solución

1)

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{s}\,(2 + 1, 4 - 2, 6 + 3) = \boldsymbol{s}\,(3, 2, 9)$$

$$s = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{94}} \qquad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{94}} \qquad \cos\gamma = \frac{9}{\sqrt{94}}$$

2)

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}\,(2 - 1, 4 + 2, 6 - 3) = \boldsymbol{d}\,(1, 6, 3) \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{1 + 36 + 9} = \sqrt{46}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{d} = \frac{1}{\sqrt{46}}\boldsymbol{i} + \frac{6}{\sqrt{46}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{46}}\boldsymbol{k}$$

Problema 10. Dados los vectores: **a** de módulo 3 y cosenos directores proporcionales a 2, 1 y −2, **b** que tiene de origen respecto de cierto sistema el punto O (−1, −2, 1) y de extremo el punto P (3, 0, 2) y el vector **c** (2, 0, −3). Calcular:
1. $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$
2. $|\ 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c}\ |$

Solución

Calculamos primeramente las componentes coordenadas de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.
Si $\boldsymbol{a}\ (x_1, y_1, z_1)$ como:

$$\frac{\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\beta}{1} = \frac{\cos\gamma}{-2} = K \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = 2K \\ \cos\beta = K \\ \cos\gamma = -2K \end{array}\right.$$

que junto con:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

nos queda:

$$4K^2 + K^2 + 4K^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{2}{3} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{3} \\ \cos\gamma = -\dfrac{2}{3} \end{array} \right.$$

luego:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a\cos\alpha = 2 \\ y_1 = a\cos\beta = 1 \\ z_1 = a\cos\gamma = -2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a}\,(2, 1, -2)$$

Si $\boldsymbol{b}\,(x_2, y_2, z_2)$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 3 - (-1) = 4 \\ y_2 = 0 - (-2) = 2 \\ z_2 = 2 - \ \ 1 \ = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b}\,(4, 2, 1)$$

1)

$$\left. \begin{array}{rl} 2\boldsymbol{a} = & 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \\ -3\boldsymbol{b} = & -12\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{c} = & 2\boldsymbol{i} \qquad\quad - 3\boldsymbol{k} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}}$$

2)

$$\left. \begin{array}{rl} 3\boldsymbol{a} = & 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k} \\ -2\boldsymbol{b} = & -8\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \\ 2\boldsymbol{c} = & 4\boldsymbol{i} \qquad\quad - 6\boldsymbol{k} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 14\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{|\, 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} \,| = \sqrt{4 + 1 + 196} = \sqrt{201}}$$

Problema 11. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}\,(1,-1, 2)$ y $\boldsymbol{b}\,(-1, 3, 4)$. Calcular:
1. El producto escalar de ambos vectores.
2. El ángulo que forman.
3. La proyección de $\boldsymbol{b}$ sobre $\boldsymbol{a}$.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 1\,(-1) + (-1)\,3 + 2 \times 4 = 4}$

2)

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi \\ a = \sqrt{1 + 1 + 4} \ = \sqrt{6} \\ b = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{4}{\sqrt{6}\,\sqrt{26}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 71^\circ\ 19'\ 18''}$$

3)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a\ \text{proy}_a\boldsymbol{b} \quad\Rightarrow\quad \text{proy}_a\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{a} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\text{proy}_a\boldsymbol{b} = \frac{4}{\sqrt{6}}}$$

Problema 12. Demostrar que el vector unitario $\boldsymbol{a}$, cuyos cosenos directores son: $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = 2/3$ y $\cos\gamma > 0$ es perpendicular al vector $\boldsymbol{b}$ (6,−9, 6).

Solución

«Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar tiene que ser cero.»

Siendo:

$$\left.\begin{array}{r} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \\ \cos\gamma > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \cos^2\gamma = \frac{4}{9} \quad\Rightarrow\quad \cos\gamma = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

y como:

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \frac{1}{3}\,6 + \frac{2}{3}(-9) + \frac{2}{3}\,6 = 2 - 6 + 4 = 0}$$

queda demostrado que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son perpendiculares.

Problema 13. Demuéstrese que si la suma y diferencia de dos vectores tienen el mismo módulo, entonces son perpendiculares.

Solución

Sean:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (x_1 + x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 + y_2)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (x_1 - x_2)\boldsymbol{i} + (y_1 - y_2)\boldsymbol{j} \end{array}\right.$$

$$|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| \quad\Rightarrow\quad (x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \quad\Rightarrow$$

$$4x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0}$$

que establece que $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son perpendiculares.

Problema 14. Dados dos vectores **a** (2, 1, −3) y **b** (1, 0, −2) hállese un vector unitario que sea perpendicular a ambos.

Solución

Al ser $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ un vector perpendicular a ambos, el vector que nos piden tendrá la misma dirección que $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

el vector unitario es:

$$\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} = \frac{-2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{4+1+1}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$$

Problema 15. Dados los siguientes vectores:

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{7}(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{7}(3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$$

$$\boldsymbol{c} = \frac{1}{7}(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})$$

demuéstrese:

1. Que sus respectivos módulos valen la unidad.
2. Que son perpendiculares entre sí.
3. Que $\boldsymbol{c}$ es el producto vectorial de $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{b}$.

Solución

1)

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6}{7}\right)^2} = 1$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2} = 1$$

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{3}{7}\right)^2} = 1$$

2) Será verdad si:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \qquad \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0 \qquad \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{2}{7}\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\frac{6}{7} + \frac{6}{7}\frac{2}{7} = 0$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \frac{3}{7}\frac{6}{7} - \frac{6}{7}\frac{2}{7} - \frac{2}{7}\frac{3}{7} = 0$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{6}{7}\frac{2}{7} + \frac{2}{7}\frac{3}{7} - \frac{3}{7}\frac{6}{7} = 0$$

3)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{7}\frac{2}{7}+\frac{6}{7}\frac{6}{7}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{6}{7}\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\frac{2}{7}\right)\boldsymbol{j}+\left(-\frac{2}{7}\frac{6}{7}-\frac{3}{7}\frac{3}{7}\right)\boldsymbol{k}=\frac{6}{7}\,\boldsymbol{i}+\frac{2}{7}\boldsymbol{j}-\frac{3}{7}\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}$$

Problema 16. Si el producto vectorial de dos vectores $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ y sus módulos son 4 y $\sqrt{7}$, respectivamente, calcular su producto escalar.

Solución

$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=ab\operatorname{sen}\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|}{ab}$$

$$|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|=\sqrt{49}=7 \qquad ab=4\sqrt{7}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\varphi=ab\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}=ab\sqrt{1-\frac{(|\,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\,|)^2}{(ab)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{(ab)^2-(|\mathbf{a}\times\boldsymbol{b}|)^2}=3\sqrt{7}}$$

Problema 17. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}(2,-1,0)$, $\boldsymbol{b}(3,-2,1)$ y $\boldsymbol{c}(0,-2,1)$. Calcular:

1. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$
2. $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$
3. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\mathbf{c}$ (producto mixto) $=\boldsymbol{abc}$
4. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$
5. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ (doble producto vectorial)

Solución

1)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=5\times0+(-3)(-2)+1\times1=7$$

2)

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&1&-1\\0&-2&1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$$

3)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&0\\3&-2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-1)0+(-2)(-2)+(-1)1=3$$

o también:

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&-2&1\\0&-2&1\end{vmatrix}=3$$

4)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+(-1)(-2)+0\times1=8 \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}=8\boldsymbol{c}=-16\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$$

5) Teniendo en cuenta 3):

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

Problema 18. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}\,(1, 0, -1)$, $\boldsymbol{b}\,(1, 3, 0)$, $\boldsymbol{c}\,(2, -1, 1)$ y $\boldsymbol{d}\,(0, -2, -1)$. Calcular:

1. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d})$
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$
3. $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$
4. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$

Solución

1)
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= 1 \times 1 + 0 \times 3 + (-1)0 = 1 \\ \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d} &= 2 \times 0 + (-1)\,(-2) + 1\,(-1) = 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{d}) = 1 \times 1 = 1$$

2)
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = 3 \times 3 + (-1)2 + 3(-4) = -5$$

3)
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= 1 \\ \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} &= 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

4)
$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}$$

Problema 19. Demuéstrese que si $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$, se verifica que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$

Solución

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{aligned} \boldsymbol{c} &= -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{b} &= -(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \end{aligned}\right.$$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times [-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} = [-(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

Problema 20. Demostrar la identidad de Lagrange: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2$, siendo: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ y $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

Solución

1.^{er} MÉTODO

Calculemos: $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$ (Producto escalar de cuatro vectores)

Llamando $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}$ y empleando las propiedades del producto mixto y del doble producto vectorial:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{m}) = \boldsymbol{a} \cdot [\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})] =$$
$$\boldsymbol{a} \cdot [(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})$$

Si se hace $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ se obtiene:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2}$$

2.º MÉTODO

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi$$

$$|\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,| = ab\,\mathrm{sen}\varphi = ab\sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{a^2b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b})^2}$$

y como:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,|)^2$$

ya que *el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de su módulo;* obtenemos:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2}$$

3.^{er} MÉTODO

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (ab\,\mathrm{sen}\varphi)^2 = a^2b^2\mathrm{sen}^2\varphi$$
$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (ab\cos\varphi)^2 = a^2b^2\cos^2\varphi$$

sumando:

$$\boxed{(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2\,(\mathrm{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = a^2b^2}$$

Problema 21. Demostrar que el producto vectorial de cuatro vectores verifica:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{abc})\boldsymbol{d}$$

Solución

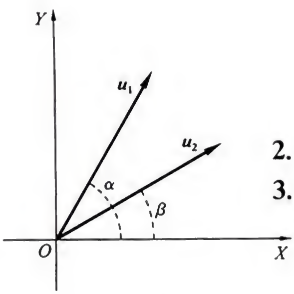
Llamando:

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

tendremos:

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{d})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{d} = [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{d}]\, \boldsymbol{c} - [(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}]\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{abd})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{abc})\, \boldsymbol{d}$$

Problema 22. Definido un sistema de referencia cartesiana en el plano: OXY; y en él dos vectores unitarios cualesquiera $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ que forman los ángulos α y β respectivamente con la dirección positiva del eje OX.



Problema III-22

1. Demostrar que:

$$\boldsymbol{u}_1 = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \cos\beta\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\beta\, \boldsymbol{j}$$

2. Calcular por aplicación del producto escalar de $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ los valores de $\cos(\alpha - \beta)$

3. Calcular por aplicación del producto vectorial de $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$ los valores de $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

Solución

1)

$$\boldsymbol{u}_1 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = u_1\cos\alpha\, \boldsymbol{i} + u_1\operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{j} = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\alpha\, \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = u_2\cos\beta\, \boldsymbol{i} + u_2\operatorname{sen}\beta\, \boldsymbol{j} = \cos\beta\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\beta\, \boldsymbol{j}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = u_1u_2\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta) \\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

3)

$$|\, \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 \,| = u_1u_2\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha - \beta)$$

$$\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 0 \\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)\boldsymbol{k}$$

luego:

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

NOTA.—Para calcular el $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, sustituir β por $-\beta$; es decir:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}[\alpha - (-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Problema 23. Dados los vectores $\boldsymbol{a}$ (1, 3,−2) y $\boldsymbol{b}$ (1,−1, 0). Calcular:

1. Su producto vectorial.

2. El área del paralelogramo que tiene a los dos vectores como lados.

3. Un vector $\boldsymbol{c}$, de módulo 6, perpendicular al plano en que se encuentran $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

Solución

1)

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

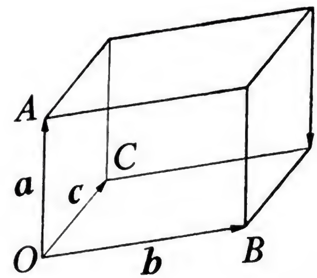
2)

$$\boxed{A = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}}$$

3)

$$\boldsymbol{c} = 6\,\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} = 6\,\frac{-2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}\,(-\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\,\boldsymbol{k}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{c}\,(-\sqrt{6}, -\sqrt{6}, -2\sqrt{6})}$$

Problema 24. Calcular el volumen del paralelepípedo de la figura sabiendo que $O\,(1, 0, 2)$, $A\,(3, 2, 4)$, $B\,(2, 6, 8)$ y $C\,(2, -3, 1)$, expresadas en metros.



Problema III-24

Solución

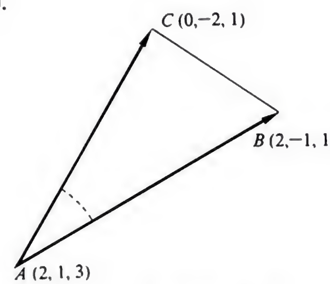
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{O} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{O} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{c} &= \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{O} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

y como:

$$V = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 6 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 20 \text{ m}^3$$

Problema 25. Los tres vértices de un triángulo son: $A\,(2, 1, 3)$, $B\,(2, -1, 1)$ y $C\,(0, -2, 1)$. Calcular:

1. Area del triángulo.
2. Angulo A.



Problema III-25

Solución

1)

$$S = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}|$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{AB} &= \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \quad\; -2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{AC} &= \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

$$|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}| = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}| = 3 \text{ unidades cuadradas}}$$

2)

$$\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC} = |\boldsymbol{AB}|\;|\boldsymbol{AC}|\,\cos A \quad \Rightarrow \quad \cos A = \frac{\boldsymbol{AB} \cdot \boldsymbol{AC}}{|\boldsymbol{AB}|\;|\boldsymbol{AC}|}$$

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AC} = 0(-2) + (-2)(-3) + (-2)(-2) = 10$$

$$\left.\begin{array}{l} |\boldsymbol{AB}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ |\boldsymbol{AC}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \cos A = \frac{10}{2\sqrt{34}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 30°\ 57'\ 49''}$$

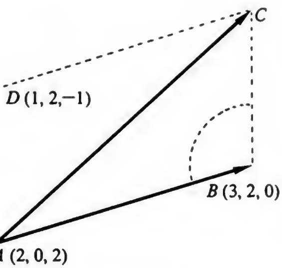
Problema 26. Tres vértices de un paralelogramo *ABCD* tienen por coordenadas: *A* (2, 0, 2), *B* (3, 2, 0) y *D* (1, 2,−1). Calcular:

1. Las coordenadas del vértice *C*.

2. Area del paralelogramo.

3. Angulo en *B*.

Solución



Problema III-26

1)

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{AD} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AD} = 4\boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k} \quad \left|\begin{array}{lll} x-2 = 0 & \Rightarrow & x = 2 \\ y-0 = 4 & \Rightarrow & y = 4 \\ z-2 = -5 & \Rightarrow & z = -3 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \boxed{C\,(2, 4, -3)}$$

2)

$$\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AD} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{S = |\boldsymbol{AB}\times\boldsymbol{AD}| = \sqrt{4+25+16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ unidades cuadradas}}$$

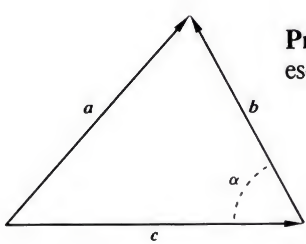
3)

$$\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AD} = 1(-1) + 2\times 2 + (-2)(-3) = 9$$

$$|\boldsymbol{AB}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\boldsymbol{AD}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\cos A = \frac{\boldsymbol{AB}\cdot\boldsymbol{AD}}{|\boldsymbol{AB}|\ |\boldsymbol{AD}|} = \frac{3}{\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad A = 36°\ 41'\ 57'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 180° - A = 143°\ 18'\ 3''}$$



Problema III-27

Problema 27. Deducir la ley de los cosenos de un triángulo, por medio del producto escalar.

Solución

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

multiplicándola escalarmente por sí misma:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

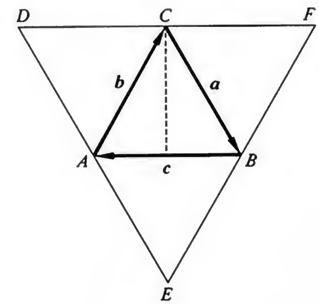
y como:

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = bc\cos(\pi - \alpha) = -bc\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

NOTA.—Para $\alpha = 90°$ (triángulo rectángulo): $\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ (TEOREMA DE PITÁGORAS)

Problema 28. Deducir la ley de los senos de un triángulo por medio del producto vector.

Solución



Problema III-28

1.^{er} MÉTODO

El módulo del producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ es el área del paralelogramo que tiene v y v' como lados. Las áreas de los paralelogramos $ACBE$ y $ABFC$ son iguales (igual base y altura) con lo que:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$$

luego:

$$ab\,\mathrm{sen}C = bc\,\mathrm{sen}A \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{c}{\mathrm{sen}C} \qquad (1)$$

también las áreas de los paralelogramos $ABCD$ y $ABFC$ son iguales, luego:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}|$$

con lo que:

$$ac\,\mathrm{sen}B = bc\,\mathrm{sen}A \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} \qquad (2)$$

igualando (1) y (2) nos queda:

$$\boxed{\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} = \frac{c}{\mathrm{sen}C}}$$

2.º MÉTODO

Los módulos de los productos vectoriales de dos cualesquiera de los lados son iguales, pues representan el doble del área del triángulo:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}| \quad \Rightarrow \quad ab\,\mathrm{sen}C = bc\,\mathrm{sen}A = ca\,\mathrm{sen}B$$

dividiendo por abc:

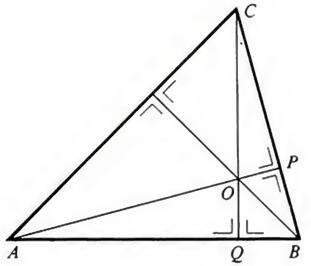
$$\frac{ab\,\mathrm{sen}C}{abc} = \frac{bc\,\mathrm{sen}A}{abc} = \frac{ca\,\mathrm{sen}B}{abc} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} = \frac{c}{\mathrm{sen}C}}$$

Problema 29. Demostrar que las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

Solución

1.^{er} MÉTODO

Hay que demostrar que CO es perpendicular a AB o sea que $\boldsymbol{OC} \cdot \boldsymbol{AB} = 0$. Teniendo en cuenta que dos de las alturas se cortan en O.



Problema III-29-1.ª

$$CA = OA - OC \quad (1)$$
$$AB = OB - OA \quad (2)$$
$$BC = OC - OB \quad (3)$$

de (3):

$$BC \cdot OA = 0 = OC \cdot OA - OB \cdot OA$$

de (1):

$$CA \cdot OB = 0 = OA \cdot OB - OC \cdot OB$$

$$OC \cdot OA - OB \cdot OA + OA \cdot OB - OC \cdot OB = 0 \qquad \Rightarrow \qquad OC\,[OA - OB] = 0$$

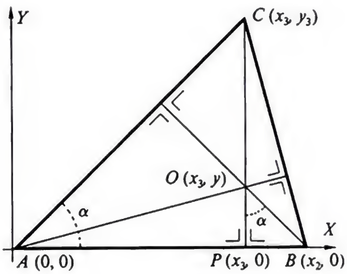
de (2):

$$OA - OB = -AB$$

$$OC \cdot (-AB) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad OC \cdot AB = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

2º MÉTODO

Tomamos como hipótesis que la alturas AP y CQ se cortan en O. Si demostramos que $\boldsymbol{OB} \cdot \boldsymbol{AC} = 0$ tendremos demostrado lo que queremos:



Problema III-29-2.ª

$$OB \cdot AC = (AB - AO) \cdot (AO + OC) = AB \cdot AO + AB \cdot OC - AO^2 - AO \cdot OC$$

y como:

$$AB \cdot AO = AO\ \text{proy}_{AO} AB = AO \times AP = AO\,(AO + OP)$$

$$AB \cdot OC = 0 \text{ (por hipótesis)}$$

$$AO \cdot OC = AO\ \text{proyec}_{AO}\, OC = AO \times OP$$

Sustituyendo:

$$OB \cdot AC = AO\,(AO + OP) - AO^2 - AO \times OP = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

3.^{er} MÉTODO

Supongamos que las alturas que parten de B y C se cortan en $O\,(x, y)$; tendremos que demostrar que $\boldsymbol{BC}$ es perpendicular a $\boldsymbol{AO}$, o lo que es lo mismo $\boldsymbol{BC} \cdot \boldsymbol{AO} = 0$; en efecto:

En la figura se ve que:

$$x = x_3 \qquad \Rightarrow \qquad O\,(x_3, y) \text{ y } P\,(x_3, 0)$$

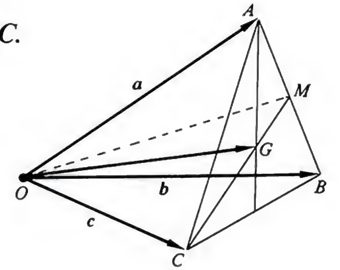
y también:

$$y = PB\,\text{cotag}\,\alpha = (x_2 - x_3)\frac{x_3}{y_3} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} BC = (x_3 - x_2)\,\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} \\ AO = x_3\boldsymbol{i} + (x_2 - x_3)\dfrac{x_3}{y_3}\boldsymbol{j} \end{array} \right.$$

$$BC \cdot AO = (x_3 - x_2)x_3 + y_3(x_2 - x_3)\frac{x_3}{y_3} = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

Problema 30. Se tienen tres vectores no coplanarios $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{c}$. Designamos por M el punto medio del segmento rectilíneo AB y por G el baricentro del triángulo ABC se pide obtener razonada y sucesivamente:

1. Expresión de ***OM*** en función de ***a*** y ***b***.
2. Expresión de *MC* en función de ***OM*** y ***c***, así como la de ***GC*** en función de *MC*.
3. Expresión de ***OG*** en función de ***a, b*** y ***c***.



Problema III-30

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MA} \\ \boldsymbol{b} &= \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{MB} \\ \boldsymbol{MA} &= -\boldsymbol{MB} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{OM} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}}$$

2)

$$\boxed{\boldsymbol{MC} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{GC} = \frac{2}{3}\boldsymbol{MC} = \frac{2}{3}\left[\boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right]}$$

3)

$$\boxed{\boldsymbol{OG} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{GC} = \boldsymbol{c} - \frac{2}{3}\left[\boldsymbol{c} - \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}\right] = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{3}}$$

(coordenadas del centro de gravedad de un triángulo).

B) TEORIA DE MOMENTOS

FORMULARIO

MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN PUNTO: Es un vector:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{O} \times \boldsymbol{v}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}\,(v_x\ v_y\ v_z) \\ P\,(x\,y\,z) \\ O\,(x_o, y_o, z_o) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x - x_o & y - y_o & z - z_o \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

MOMENTO DE UN VECTOR CON RESPECTO A UN EJE: Es un escalar

$$N_e = \text{proy}_e\,(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$$

($\boldsymbol{r}$ vector de posición de $\boldsymbol{v}$ respecto a cualquier punto del eje).

Si $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del eje, entonces:

$$N_e = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

RESULTANTE DE UN SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES. MOMENTO RESULTANTE DEL SISTEMA:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{N} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i$$

CAMBIO DE CENTRO DE REDUCCIÓN (de O a O'):

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{R}$$

EJE CENTRAL: «Es el lugar geométrico de los puntos del espacio para los cuales el momento del sistema es mínimo, o lo que es lo mismo, el momento del sistema tiene la misma dirección que $\boldsymbol{R}$».

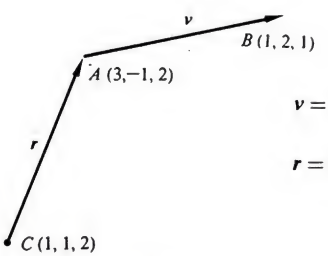
Su ecuación es:

$$\frac{N_x + R_y z - R_z y}{R_x} = \frac{N_y + R_z x - R_x z}{R_y} = \frac{N_z + R_x y - R_y x}{R_z}$$

TORSOR: Se define así al conjunto de vectores ($\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N}_R$) en el que $\boldsymbol{R}$ es la resultante del sistema de vectores y $\boldsymbol{N}_R$ el momento mínimo (que como ya hemos dicho tiene la dirección de $\boldsymbol{R}$) cuyo valor es:

$$\boldsymbol{N}_R = \frac{\boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{R}}{R^2} \boldsymbol{R}$$

Problema 31. El origen de un vector es el punto A (3,−1, 2) y su extremo B (1, 2, 1); calcular su momento respecto a C (1, 1, 2).



Problema III-31

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = \ \ 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

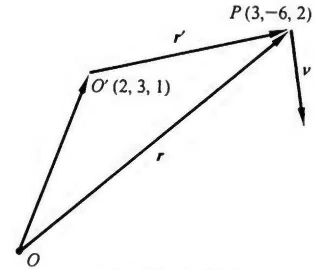
Problema 32. El punto de aplicación del vector $\boldsymbol{v}$ (6,−3, 4) es el P (3,−6, 2) referidos a un sistema $OXYZ$. Calcúlese:

1. Momento del vector respecto al origen O.
2. Momento del vector respecto al punto O' (2, 3, 1).

Solución

1)

$$r = OP = 3i - 6j + 2k \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = r \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -6 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -18i + 27k}$$



Problema III-32

2) Se puede hacer el problema de dos formas:

a)

$$N' = N + O'O \times R$$

$$O'O = O - O' = -2i - 3j - k \qquad R = v \qquad \Bigg| \quad \mathbf{O'O \times R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & -1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -15i + 2j + 24k$$

Luego:

$$\boxed{N' = -33i + 2j + 51k}$$

b)

$$r' = r - OO' \quad \Rightarrow \quad r' = i - 9j + k \quad \Rightarrow \quad N' = r' \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -9 & 1 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -33i + 2j + 51k$$

Problema 33. Hallar el valor de la expresión: $a \times N_c$ siendo: a (2,−1, 2), b (1,−2, 1) y N_c el momento del vector b aplicado en el punto B (2, 3, 1) con respecto al punto C (1, 1, 1).

Solución

1.^{er} MÉTODO

$$r = CB = B - C = i + 2j$$

$$N_c = r \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2i - j - 4k$$

$$a \times N_c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 6i + 12j$$

2.º MÉTODO

Por la propiedad del doble producto vectorial:

$$a \times N_c = a \times (r \times b) = r\,(a \cdot b) - b\,(a \cdot r)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,(2,-1,2) \\ b\,(1,-2,1) \\ r\,(1,\ \ 2,0) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{ll} a \cdot \mathrm{b} = 2 \times 1 + (-1)(-2) + 2 \times 1 = 6 \\ a \cdot r = 2 \times 1 + (-1)\,2 + 2 \times 0 \quad = 0 \end{array}\right.$$

Sustituyendo:

$$\boxed{a \times N_c = (i + 2j)6 - (i - 2j + k)0 = 6i + 12j}$$

Problema 34. Dados los vectores deslizantes: v_1 (3, 2,−3) y v_2 (6,−3, 2) que pasan por los puntos P_1 (2,−6, 4) y P_2 (4,−1,−1), respectivamente. Calcúlese:

1. La resultante del sistema de los dos vectores.
2. El momento resultante con respecto al origen.
3. El momento resultante referido al punto O' (2,−1, 5).

Solución

1)

$$\boxed{\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = 9\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}$$

2)

$$\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}$$

3)

$$\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{O'O} = \boldsymbol{O} - \boldsymbol{O'} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & -5 \\ 9 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - 47\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k}$$
$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{N}' = -\boldsymbol{i} - 43\boldsymbol{j} + 9\boldsymbol{k}}$$

Problema 35. Dados los vectores v_1 (−2, 3, 1) y v_2 (−1, 3, 2) ambos aplicados en el punto P (2, 3, 2). Calcular el momento del sistema respecto del punto A (−1, 0, 2) y compruébese que la suma de los dos momentos es igual al momento de la resultante respecto de A aplicada en P.

Solución

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} + 27\boldsymbol{k}$$

Siendo la resultante:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 9\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} + 27\boldsymbol{k}$$

Problema 36. Dado el vector v (3,−6, 8) cuyo origen es el punto P (2, 1,−2); Calcular su momento respecto al eje:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-3}{6}$$

Solución

La dirección de una recta en el espacio viene determinada por sus cosenos directores ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) que son las componentes coordenadas del vector unitario $\boldsymbol{e}^0$ que perteneciendo al eje nos define su dirección. Si el eje pasa por un punto O (x_0, y_0, z_0) y su dirección viene definida por $\boldsymbol{e}^0$ su ecuación será:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha} = \frac{y-y_0}{\cos\beta} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma}$$

La ecuación de la recta dada es de la forma:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

luego en nuestro problema:

$$\cos\alpha = \frac{2}{7} \qquad \cos\beta = \frac{3}{7} \qquad \cos\gamma = \frac{6}{7}$$

Como el punto O (2, 5, 3) pertenece al eje, entonces:

$$N_c = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & -4 & -5 \\ 3 & -6 & 8 \end{vmatrix} = -\frac{97}{7}$$

Problema 37. Calcular el momento del vector $\boldsymbol{v}\,(1,-3,2)$ de origen $P\,(1,1,0)$ respecto al eje que pasa por los puntos A (1, 0,−1), y B (2, 1, 1).

Solución

La ecuación del eje es:

$$e\!: \quad \frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+1}{1+1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$$

luego:

$$\frac{\cos\alpha}{1} = \frac{\cos\beta}{1} = \frac{\cos\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \cos\gamma = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

con lo que:

$$N_c = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ 1-1 & 1-0 & 0-(-1) \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

Problema 38. Dado el sistema de vectores:

$\boldsymbol{v}_1\,(3,-6,\ 2)$ de origen $P_1\,(1,\ 3,-2)$

$\boldsymbol{v}_2\,(2,\ 4,-6)$ de origen $P_2\,(3,-2,\ 1)$

$\boldsymbol{v}_3\,(1,-1,\ 1)$ de origen $P_3\,(1,\ 3,\ 0)$

encontrar la ecuación del eje central y el momento mínimo.

Solución

El vector resultante será:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = 6\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

El momento resultante respecto del origen de coordenadas será:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{v}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j} - 15\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{v}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} + 20\boldsymbol{j} + 16\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{v}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{N} = 5\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$$

sustituyendo en la ecuación del eje central nos quedará:

$$\boxed{\frac{5 - 3z + 3y}{6} = \frac{11 - 3x - 6z}{-3} = \frac{-3 + 6y + 3x}{-3}}$$

$$N_R = \frac{N \cdot R}{R^2} R \qquad \left| \begin{array}{l} N \cdot R = 5 \times 6 + 11\,(-3) + (-3)\,(-3) = 6 \\ R^2 = 36 + 9 + 9 = 54 \end{array} \right.$$

$$\boxed{N_R = \frac{1}{9} R = \frac{2}{3} i - \frac{1}{3} j - \frac{1}{3} k}$$

Problema 39. Dado el sistema de vectores deslizantes:

v_1 (1, 2, 0) que pasa por el punto P_1 (1, 1, 1)

v_2 (−1,−1, 1) que pasa por el punto P_2 (2, 2, 2)

v_3 (0, 1, 1) que pasa por el punto P_3 (0, 1, 2)

v_4 (2, 2, 2) que pasa por el punto P_4 (1, 0, 1)

calcular el torsor del sistema.

Solución

El vector resultante del sistema es:

$$\boxed{R = v_1 + v_2 + v_3 = 2i + 4j + 4k}$$

Calculemos el momento resultante del sistema respecto del origen de coordenadas:

$$N_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2i + j + k$$

$$N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4i - 4j$$

$$N_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i$$

$$N_4 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2i + 2k$$

$$N_0 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = -i - 3j + 3k$$

como:

$$\left. \begin{array}{r} N \cdot R = 2\,(-1) + 4\,(-3) + 4 \times 3 = -2 \\ R^2 = 4 + 16 + 16 = 36 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{N_R = \frac{N \cdot R}{R^2} R = -\frac{1}{18} R = -\frac{1}{9} i - \frac{2}{9} j - \frac{2}{9} k}$$

C) CALCULO INFINITESIMAL VECTORIAL*

FORMULARIO

DERIVADA DE UN VECTOR RESPECTO A UN ESCALAR:

$$\boldsymbol{v}' = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

las componentes coordenadas de $\mathbf{v}'$ serán:

$$v'_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad v'_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad v'_z = \frac{dv_z}{\mathrm{dt}}$$

PROPIEDADES:

a) Si $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(s)$ y $s = s(t)$ obtenemos que:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

b) Si $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{a}(t) + \mathbf{b}(t)$ tendremos:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$$

c) Si $\boldsymbol{a}(t) = f(t)\,\boldsymbol{b}(t)$ tendremos:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{df}{dt}\mathbf{b} + f\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \tag{1}$$

CONSECUENCIAS:

1) Si $\boldsymbol{v}(t) = v(t)\boldsymbol{u}$ siendo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}(t)/v(t)$ (vector unitario en la dirección $\boldsymbol{v}$) podremos escribir

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{u})}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}$$

2) Si $\boldsymbol{v}$ es tal que $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es constante en dirección ($\boldsymbol{u}$ no varía) tendremos:

* Los problemas referentes a operadores se verán en el capítulo X (Teoría de Campos).

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}$$

la derivada de $\boldsymbol{v}$ es pues un vector en la dirección de $\boldsymbol{v}$.

3) Si $\boldsymbol{v}$ es constante en módulo:

$$\frac{d v}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} v$$

este vector es perpendicular al vector $\boldsymbol{v}$. En efecto: como $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2$ derivando:

$$\frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot \mathrm{v} = 2\boldsymbol{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

luego si $\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v}/dt = 0$ tendremos que $\boldsymbol{v}$ y $d\boldsymbol{v}/\mathrm{dt}$ son perpendiculares.

4) Como consecuencia de las propiedades 2 y 3 si $\boldsymbol{v}$ no conserva constante ni módulo ni dirección, la igualdad (1) demuestra que la *derivada de* $\boldsymbol{v}$ *es la suma vectorial de dos vectores, uno en la misma dirección que* $\boldsymbol{v}$ *y otro perpendicular a ella.*

5) Al ser $\boldsymbol{u}$ un vector unitario, conserva constante el módulo, tendremos por la propiedad 3:

$$\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0$$

luego $\boldsymbol{u}$ *y* $d\boldsymbol{u}/dt$ *son siempre perpendiculares.*

d) Derivada del producto escalar:

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{dt} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \cdot \boldsymbol{b}$$

e) Derivada del producto vector:

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{dt} = \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{b}$$

CONSECUENCIA:

La condición que cumple un vector de dirección constante es también que:

$$\boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0$$

En efecto: si $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}$ tendremos que

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}$$

luego

$$\boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = v\boldsymbol{u} \times \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u} = v\frac{dv}{dt}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}) = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

INTEGRACIÓN:

$$\boldsymbol{I} = \int_a^b \boldsymbol{v}(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \boldsymbol{v}(t)\,\Delta t$$

en función de sus componentes coordenadas:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_x + \boldsymbol{I}_y + \boldsymbol{I}_z = \int_a^b \boldsymbol{v}_x(t)\,dt + \int_a^b \boldsymbol{v}_y(t)\,dt + \int_a^b \boldsymbol{v}_z(t)\,dt$$

Problema 40. Demostrar aplicando el concepto de límite de un vector las fórmulas:

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{dt} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \cdot \boldsymbol{b}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{dt} = \boldsymbol{a} \times \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \times \boldsymbol{b}$$

Solución

Teniendo en cuenta que la derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a la variable es por definición:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y que la derivada de un vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ con respecto a la variable escalar t es por definición:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

Supongamos que $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$. Si llamamos p al escalar $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{a}(t + \Delta t) \cdot \boldsymbol{b}(t + \Delta t) - \boldsymbol{a}(t) \cdot \boldsymbol{b}(t)}{\Delta t}$$

Sumando y restando al numerador $\boldsymbol{a}(t + \Delta t) \cdot \boldsymbol{b}(t)$ nos queda:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t)\cdot b(t+\Delta t) - a(t+\Delta t)\cdot b(t) + a(t+\Delta t)\cdot b(t) - a(t)\cdot b(t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} a(t+\Delta t)\cdot \frac{b(t+\Delta t) - b(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t+\Delta t) - a(t)}{\Delta t}\cdot b(t)$$

Al tender $\Delta t \to 0$ la función $a(t+\Delta t)$ tenderá a $a(t)$ luego:

$$\boxed{\frac{d(a\cdot b)}{dt} = a\cdot \frac{db}{dt} + \frac{da}{dt}\cdot b} \qquad \text{c.q.d.}$$

El cálculo para el producto vectorial es el mismo sin más que sustituir el $\cdot$ por $\times$.

Problema 41. Dado el vector: $\boldsymbol{a} = A\,(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{j})$ donde A y ω son constantes y t es la variable escalar independiente, se pide:

1. Hallar su módulo y la derivada de éste.
2. $d\boldsymbol{a}/dt$ y $|d\boldsymbol{a}/dt|$
3. Demostrar que $\boldsymbol{a}$ y $d\boldsymbol{a}/dt$ son perpendiculares.

Solución

1)

$$a = \sqrt{A^2\cos^2\omega t + A^2\operatorname{sen}^2\omega t} = A$$

Siendo el módulo del vector $\boldsymbol{a}$ constante la derivada del módulo será nula.

2)

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = A\,(-\omega\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}) = A\omega(-\operatorname{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \cos\omega t\,\boldsymbol{j})$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right| = \sqrt{A^2\omega^2\operatorname{sen}^2\omega t + A^2\omega^2\cos^2\omega t} = A\omega$$

3) Serán perpendiculares si:

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = 0$$

en efecto:

$$\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = -A^2\omega\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t + A^2\omega\operatorname{sen}\omega t\cos\omega t = 0$$

lo cual tenía que ocurrir, puesto que *«todo vector de módulo constante es siempre perpendicular a su vector derivada».*

Problema 42. Si $\boldsymbol{v}$ es un vector función de un parámetro t demostrar que:

1. Si $\boldsymbol{v}$ es constante en dirección, entonces $\boldsymbol{v}\times d\boldsymbol{v}/dt = 0$
2. Si $\boldsymbol{v}$ es constante en módulo, entonces $\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{v}/dt = 0$

Solución

En general:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u} \\[2ex] \boldsymbol{u} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{v} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{u})}{dt} = v\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} + \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}$$

1) Si $\boldsymbol{v}$ es constante en dirección $\boldsymbol{u}$ no varía

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{u}$$

luego la derivada del vector $\boldsymbol{v}$ es un vector en la dirección de $\boldsymbol{v}$ en consecuencia:

$$\boxed{\boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0} \qquad \text{c.q.d.}$$

2) Si $\boldsymbol{v}$ es constante en módulo v^2 también lo será, luego:

$$0 = \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\cdot\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

luego:

$$\boxed{\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 0} \qquad \text{c.q.d.}$$

Problema 43. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}\ (2t, \operatorname{sen}t, 0)$, $\boldsymbol{b}\ (0, 2\cos t, t^2)$. Calcular:

1. $\dfrac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{dt}$ **2.** $\dfrac{d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{dt}$ **3.** $\dfrac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt}$

4. $\dfrac{d|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{dt}$ **5.** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}\right)$ **6.** $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}\right)$

Solución

1)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 2t\boldsymbol{i} + (\operatorname{sen}t + 2\cos t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{dt} = 2\boldsymbol{i} + (\cos t - 2\operatorname{sen}t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}}$$

2)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\operatorname{sen}t\cos t = \operatorname{sen}2t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{dt} = 2\cos 2t}$$

3)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t & \operatorname{sen}t & 0 \\ 0 & 2\cos t & t^2 \end{vmatrix} = t^2\operatorname{sen}t\,\boldsymbol{i} - 2t^3\boldsymbol{j} + 4t\cos t\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt} = (2t\operatorname{sen}t + t^2\cos t)\boldsymbol{i} - 6t^2\boldsymbol{j} + (4\cos t - 4t\operatorname{sen}t)\boldsymbol{k}}$$

4)

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{t^4\,\text{sen}^2 t + 4\,t^6 + 16t^2\cos^2 t}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{dt} &= \frac{4t^3\,\text{sen}^2 t + 2t^4\,\text{sen}\,t\cos t + 24t^5 + 32\,t\cos^2 t - 32t^2\cos t\,\text{sen}\,t}{2\sqrt{t^4\,\text{sen}^2 t + 4\,t^6 + 16t^2\cos^2 t}} = \\ &= \frac{12t^4 + 2t^2\,\text{sen}^2 t + 16\cos^2 t + t\left(\dfrac{1}{2}\,t^2 - 8\right)\text{sen}\,2\,t}{\sqrt{t^2\,\text{sen}^2 t + 4t^2 + 16\cos^2 t}}\end{aligned}}$$

5)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} &= 2\,\boldsymbol{i} + \cos t\,\boldsymbol{j} \\ \frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b} &= 2\cos^2 t\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}\right) = -\,4\cos t\,\text{sen}\,t = -2\,\text{sen}\,2t}$$

6)

$$\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = \frac{t^2\text{sen}\,t}{\text{sen}\,2t}\,\boldsymbol{i} - \frac{2t^3}{\text{sen}\,2t}\,\boldsymbol{j} + \frac{4t\cos t}{\text{sen}\,2t}\,\boldsymbol{k} = \frac{t^2}{2\cos t}\,\boldsymbol{i} - \frac{2t^3}{\text{sen}\,2t}\,\boldsymbol{j} + \frac{2t}{\text{sen}\,t}\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\right) = \frac{4t\cos t + 2t^2\text{sen}\,t}{4\cos^2 t}\,\boldsymbol{i} - \frac{6t\,\text{sen}\,2t - 4t^3\cos 2t}{\text{sen}^2 2t}\,\boldsymbol{j} + \frac{2\,\text{sen}\,t - 2t\cos t}{\text{sen}^2 t}\,\boldsymbol{k}}$$

Problema 44. Dados los vectores: $\boldsymbol{a}\,(t^2, t, 1)$ y $\boldsymbol{b}\,(1, t, t+1)$. Calcular:

1. $\displaystyle\int(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\,dt$ **2.** $\displaystyle\int(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,dt$ **3.** $\displaystyle\int(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,dt$

Solución

1)

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (t^2+1)\,\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + (t+2)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\int(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})dt = \boldsymbol{i}\int(t^2+1)dt + \boldsymbol{j}\int 2t\,dt + \boldsymbol{k}\int(t+2)dt = \left(\frac{t^3}{3} + t + C_1\right)\boldsymbol{i} + (t^2 + C_2)\boldsymbol{j} + \left(\frac{t^2}{2} + 2t + C_3\right)\boldsymbol{k}}$$

2)

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = t^2 + t^2 + t + 1 = 2t^2 + t + 1 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\int(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})dt = \int(2t^2 + t + 1)dt = \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + C}$$

3)

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ t^2 & t & 1 \\ 1 & t & t+1\end{vmatrix} = t^2\boldsymbol{i} + (-t^3 - t^2 + 1)\boldsymbol{j} + (t^3 - t)\,\boldsymbol{k}$$

$$\boxed{\int(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})dt = \left(\frac{t^3}{3} + C_1\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + t + C_2\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + C_3\right)\boldsymbol{k}}$$

Problema 45. Dado el escalar (función de punto): $a = x^2yz + 3x^2z - y$; calcular la integral de línea:

$$\int_C a\,d\boldsymbol{r} \qquad\qquad (d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$

a lo largo de la curva $y = x^2$, $z = 2$, cuando se pasa desde el punto $A\,(1, 1, 2)$ al $B\,(2, 4, 2)$

Solución

$$\int_C a\,d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\int_C a\,dx + \boldsymbol{j}\int_C a\,dy + \boldsymbol{k}\int_C a\,dz$$

como:

$$\int_C a\,dx = \int_1^2 (x^2yz + 3x^2z - y)dx = \int_1^2 (2x^4 + 6x^2 - x^2)dx = \int_1^2 (2x^4 + 5x^2)dx = \left[\frac{2x^5}{5} + \frac{5x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{361}{15}$$

$$\int_C a\,dy = \int_1^4 (x^2yz + 3x^2z - y)dy = \int_1^4 (2y^2 + 6y - y)dy = \int_1^4 (2y^2 + 5y)dy = \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{5y^2}{2}\right]_1^4 = \frac{159}{2}$$

$$\int_C a\,dz = \int_2^2 (x^2yz + 3x^2z - y)dz = 0$$

por tanto:

$$\boxed{\int_C a\,d\boldsymbol{r} = \frac{361}{15}\,\boldsymbol{i} + \frac{159}{2}\,\boldsymbol{j}}$$

Problema 46. Dado el vector (Vector campo): $\boldsymbol{v} = (x + y)^2\,\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j}$; calcular la integral (circulación):

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad\qquad (d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j})$$

a lo largo de la recta $y = x + 1$ desde el punto $A(0,1)$ al $B(1,2)$

Solución

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (v_x\,dx + v_y\,dy) = \int_C v_x\,dx + \int_C v_y\,dy$$

como:

$$\int_C v_x\,dx = \int_0^1 (x + y)^2\,dx = \int_0^1 (2x + 1)\,dx = [x^2 + x]_0^1 = 2$$

$$\int_C v_y dy = \int_1^2 xy\,dy = \int_1^2 (y^2 - y)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{5}{6}$$

por tanto:

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{17}{6}}$$

Problema 47. Dado el vector: $\boldsymbol{v} = (x - z)^2 \boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + (y - z)^2 \boldsymbol{k}$; calcular la integral de línea:

$$\int_C \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} \qquad\qquad (d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k})$$

a lo largo de la curva $x = y^2$, $z = 0$, cuando se pasa desde el punto $A\,(1, 1, 0)$ al $B\,(4, 2, 0)$.

Solución

$$\int_C \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}\int_C (v_y\,dz - v_z\,dy) + \boldsymbol{j}\int_C (v_z\,dx - v_x\,dz) + \boldsymbol{k}\int_C (v_x\,dy - v_y\,dx)$$

como:

$$\int_C v_y\,dz = \int_0^0 x\,dz = 0$$

$$\int_C v_z\,dy = \int_1^2 (y - z)^2\,dy = \int_1^2 y^2\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7}{3}$$

$$\int_C v_z\,dx = \int_1^4 (y - z)^2\,dx = \int_1^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15}{2}$$

$$\int_C v_x\,dz = 0$$

$$\int_C v_x\,dy = \int_1^2 (x - z)^2\,dy = \int_1^2 y^4\,dy = \left[\frac{y^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}$$

$$\int_C v_y\,dx = \int_1^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \frac{15}{2}$$

Por tanto:

$$\boxed{\int_C \boldsymbol{v} \times d\boldsymbol{r} = -\frac{7}{3}\,\boldsymbol{i} + \frac{15}{2}\,\boldsymbol{j} - \frac{13}{10}\,\boldsymbol{k}}$$

Capítulo IV

CINEMATICA - MOVIMIENTOS DEL SOLIDO

A) DEFINICIONES FUNDAMENTALES: MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL, PLANO Y EN EL ESPACIO DE LA PARTICULA

FORMULARIO

RADIO VECTOR O VECTOR DE POSICIÓN:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

VECTOR VELOCIDAD:

$$\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

VECTOR ACELERACIÓN:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{n}^\circ = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n$$

ρ = radio de curvatura.

VECTOR VELOCIDAD ANGULAR:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{n}^\circ$$

$\boldsymbol{n}.^{\underline{o}}$ es el vector unitario normal al plano en que se realiza el giro en el instante considerado.

VECTOR ACELERACIÓN ANGULAR:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

RELACIÓN MODULAR ENTRE LAS VELOCIDADES Y ACELERACIONES ANGULARES Y LINEALES:

$$v = \omega R \qquad a_\tau = \alpha R \qquad a_n = \omega^2 R$$

Problema 1. Un automóvil ha ido de la ciudad A a la B distantes entre sí 180 km en 3 h, y sin pérdida de tiempo retorna en 3,5 h.

1. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de ida?

2. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto de vuelta?

3. ¿Cuál es la «velocidad media» en el trayecto ida-vuelta?

Solución

1) $$\boxed{\bar{v} = 180/3 = 60 \text{ km/h}}$$

2) $$\boxed{\bar{v} = 180/3{,}5 = 51{,}4 \text{ km/h}}$$

3) $$\boxed{\bar{v} = \frac{2 \times 180}{3 + 3{,}5} = 55{,}4 \text{ km/h}}$$

Problema 2. La fórmula que da la posición de una partícula que se mueve en trayectoria recta, escrita en el SI es: $x = 7t^3 - 2t^2 + 3t - 1$. Calcular:

1. Ecuación de la velocidad.

2. Ecuación de la aceleración.

3. Espacio recorrido por la partícula en el tercer segundo.

Solución

1) $$\boxed{v = dx/dt = 21t^2 - 4t + 3}$$

2) $$\boxed{a = dv/dt = d^2x/dt^2 = 42t - 4}$$

3) En el instante $t = 2$ s, la distancia de la partícula al origen de los espacios será:

$$x_2 = 7 \times 8 - 2 \times 4 + 3 \times 2 - 1 = 53 \text{ m}$$

y para $t = 3$ s será:

$$x_3 = 7 \times 27 - 2 \times 9 + 3 \times 3 - 1 = 179 \text{ m}$$

luego el espacio recorrido será:

$$\boxed{x = x_3 - x_2 = 126 \text{ m}}$$

Problema 3. Un punto material se mueve en trayectoria recta de tal forma que, en cada instante, el valor de su velocidad queda determinado en el SI por la función: $v = 250 - 10t$ determinar:

1. La velocidad inicial, v_0.

2. La velocidad en los instantes $t_5 = 5$ s y $t_{10} = 10$ s.

3. Instante en que la velocidad es nula.

4. Velocidad del móvil para $t = 30$ s.

5. Determinar la ecuación que relaciona la distancia al origen y el tiempo, suponiendo que el punto está en el origen cuanto $t = 0$.

6. Distancia al origen, contada sobre la trayectoria, cuando el punto tiene velocidad nula.

7. Distancia del origen, medida sobre la trayectoria para $t = 30$ s.

8. ¿Cómo calcularíamos en general el camino recorrido sobre la trayectoria cuando en él la velocidad ha cambiado de sentido?

Solución

1) $t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 250 \text{ m/s}}$

2) $$\boxed{\begin{array}{l} v_5 = 250 - 50 = 200 \text{ m/s} \\ v_{10} = 250 - 100 = 150 \text{ m/s} \end{array}}$$

Observemos que el móvil disminuye de velocidad conforme transcurre el tiempo.

3) $0 = 250 - 10t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 25 \text{ s}}$

4) $\boxed{v_{30} = 250 - 10 \times 30 = -50 \text{ m/s}}$

El móvil retorna hacia el origen a una velocidad de 50 m/s los 30 s de iniciado el movimiento.

5) $v = dx/dt = 250 - 10t \quad \Rightarrow \quad dx = 250\, dt - 10t\, dt$

$$x = \int 250\, dt - \int 10t\, dt = 250t - 5t^2 + C$$

si hacemos:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = C = 0$$

La ecuación pedida es:

$$\boxed{x = 250t - 5t^2}$$

6) Como $t = 25$ s (apartado 3):

$$\boxed{x = 250 \times 25 - 5 \times 25^2 = 3\,125}$$

7) $\boxed{x = 250 \times 30 - 5 \times 900 = 3\,000 \text{ m}}$

El móvil en los 25 primeros segundos se ha alejado del origen y llega al reposo, recorriendo 3 125 m. Durante los 5 s siguientes se acerca al origen quedando a una distancia de él, medida sobre la trayectoria, de 3 000 m. (Ha recorrido, por tanto en su vuelta, del segundo 25 al 30, una distancia de 125 metros hacia el origen).

8) Nos bastaría calcular el espacio recorrido desde el instante origen ($t = 0$) hasta el instante en que el móvil se detiene (3 125 m apartado 6) y sumarle el espacio recorrido desde éste hasta el tiempo final; en nuestro caso tal espacio es 125 m como hemos deducido en el apartado 7.

El camino total recorrido sobre la trayectoria es: $s_t = 3\,125 + 125 = 3\,250$ m. Equivalente este camino a:

$$\int_0^{25} v\, dt - \int_{25}^{30} v\, dt = [250 \times 25 - 5 \times 25^2] - [250\,(30 - 25) - 5\,(30^2 - 25^2)] = 3\,250 \text{ m}$$

El signo menos de la segunda integral obedece a que buscamos camino total sobre la trayectoria y considerando que del segundo 25 al 30, el móvil va en sentido contrario al que marcha desde $t = 0$ a $t = 25$ s.

En resumen: Para obtener la distancia al origen, sobre la trayectoria, resolveremos la integral:

$$x = \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

(indicándonos t_0 y t los instantes inicial y final).

Para obtener el camino sobre la trayectoria, realizaremos la integración para diversas etapas, cambiando el signo de la integral cada vez que el móvil cambia de sentido por adquirir velocidad nula. Así, en los instantes t_1, t_2, t_3 (comprendidos entre t_0 y t) el móvil cambia de sentido, por adquirir $v = 0$ en cada uno de ellos, el camino sobre la trayectoria es:

$$\boxed{x_T = \int_{t_0}^{t_1} v\, dt - \int_{t_1}^{t_2} v\, dt + \int_{t_2}^{t_3} v\, dt - \int_{t_3}^{t} v\, dt}$$

Problema 4. La ecuación de la velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta, viene dada en el SI por: $v = 4t^2 - 6t + 2$. Sabiendo que en el instante $t = 0$, $x_0 = 3$ m. Calcular:

1. Ecuación de la posición en cualquier instante.
2. Ecuación de la aceleración.
3. La velocidad del móvil en el origen de los tiempos.
4. Aceleración media entre los instantes $t = 1$ s y $t = 2$ s.

Solución

1)

$$v = dx/dt \qquad \Rightarrow \qquad dx = (4t^2 - 6t + 2)dt$$

$$x = \int (4t^2 - 6t + 2)dt = \frac{4t^3}{3} - 3t^2 + 2t + C \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ C = x_0 = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{4t^3}{3} - 3t^2 + 2t + 3}$$

2)

$$\boxed{a = dv/dt = 8t - 6}$$

3)

$$t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = v_0 = 2 \text{ m/s}}$$

4)

$$\begin{array}{lll} t = 1 \text{ s} & \Rightarrow & v_1 = 0 \\ t = 2 \text{ s} & \Rightarrow & v_2 = 6 \text{ m/s} \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = 6 \text{ m/s}^2}$$

Problema 5. Una partícula que posee un movimiento rectilíneo recorre un espacio de 7 m antes de empezar a contar el tiempo, y cuanto $t = 2$ s posee una velocidad de 4 m/s. Si la ecuación de su aceleración escrita en unidades del SI es: $a = 3t^2 - 1$. Calcular:

1. Ecuación de la velocidad y posición.
2. La velocidad media de la partícula entre los instantes $t = 2$ s y $t = 4$ s.
3. Distancia al origen de los tiempos cuando $t = 7$ s.

Solución

1)

$$a = dv/dt \qquad \Rightarrow \qquad dv = (3t^2 - 1)dt \qquad \Rightarrow \qquad v = \int (3t^2 - 1)dt$$

$$v = t^3 - t + C \quad \left| \begin{array}{l} t = 2 \text{ s} \\ 4 = 8 - 2 + C \end{array} \right| \Rightarrow \quad C = v_0 = -2 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = t^3 - t - 2}$$

$$v = dx/dt \qquad \Rightarrow \qquad dx = (t^3 - t - 2)dt \qquad \Rightarrow \qquad x = \int (t^3 - t - 2)dt$$

$$x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + C \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ C = x_0 = 7 \text{ m} \end{array} \right| \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - 2t + 7}$$

2)

$$\begin{array}{lll} t = 2 \text{ s} & \Rightarrow & x_2 = 5 \text{ m} \\ t = 4 \text{ s} & \Rightarrow & x_4 = 55 \text{ m} \end{array}$$

El espacio total recorrido en los dos segundos será:

$$x = x_4 - x_2 = 50 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\bar{v} = 50/2 = 25 \text{ m/s}}$$

3) $$\boxed{x' = x - x_0 = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - 2t = 561{,}75 \text{ m}}$$

Problema 6. El movimiento de un punto material en trayectoria recta viene dado por la ecuación escrita en el sistema CGS: $x = e^{3t} - 5$. Calcular:

1. Las expresiones de la velocidad y aceleración en función del tiempo y de la posición.
2. Valor de la aceleración en el origen de los tiempos.
3. Valor de la velocidad en el origen de los tiempos.

Solución

1) $$\boxed{v = dx/dt = 3e^{3t} = 3\,(x+5)} \qquad \boxed{a = dv/dt = 9e^{3t} = 9\,(x+5)}$$

2) $$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_0 = 9 \text{ cm/s}^2}$$

3) $$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 3 \text{ cm/s}}$$

Problema 7. La velocidad de una partícula que se mueve en trayectoria recta está dada por la ecuación: $v = 7 / (1 + t^2)$ SI. Calcular las expresiones del espacio y de la aceleración en función del tiempo sabiendo que el origen de tiempos y de espacios coinciden.

Solución

$$x = \int v\,dt = \int \frac{7}{1+t^2}\,dt = 7 \operatorname{arctag} t + C \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x_0 = C = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 7 \operatorname{arctag} t}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\frac{14t}{(1+t^2)^2}}$$

Problema 8. Un movimiento rectilíneo es tal que su velocidad viene dada en función del desplazamiento por la ecuación: $v = 3x + 1$. Hallar sus ecuaciones horarias sabiendo que el origen de espacios y tiempos coincide.

Solución

$$v = 3x + 1 = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{3x+1} = dt \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{3}\ln(3x+1) = t + C \\ t = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \end{array} \right| \quad C = \frac{1}{3}\ln 1 = 0$$

luego:

$$\frac{1}{3}\ln(3x+1) = t \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{3x+1} = e^t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{e^{3t} - 1}{3}}$$

por lo tanto: $$\boxed{v = dx/dt = e^{3t}} \qquad \boxed{a = dv/dt = 3e^{3t}}$$

Problema 9. La ecuación de la aceleración en función de la velocidad de una partícula en trayectoria recta es: $a = 3\sqrt{1 - v^2}$, sabiendo que el móvil parte del reposo y que el origen de tiempos y espacios coinciden; calcular las ecuaciones de este movimiento $\left(x = x(t),\ v = v(t)\ \text{ y }\ a = a(t)\right)$.

Solución

$$a = \frac{dv}{dt} = 3\sqrt{1 - v^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = 3dt \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \operatorname{arcsen} v = 3t + C_1 \\ \\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

luego:

$$\operatorname{arcsen} v = 3t \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{v = \operatorname{sen} 3t} \\ \\ \boxed{a = 3\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 3t} = 3\cos 3t} \end{array} \right.$$

y como:

$$v = dx/dt = \operatorname{sen} 3t\, dt \quad \Rightarrow \quad dx = \operatorname{sen} 3t\, dt \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}\cos 3t + C_2 \\ \\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{1}{3}$$

luego :

$$\boxed{x = \frac{1}{3}(1 - \cos 3t)}$$

Problema 10. La variación de la aceleración de la gravedad con la altura viene dada por la fórmula:

$$g = -\frac{GM_0}{(R_0 + h)^2}$$

y cuando $h = 0$ entonces $|g| = g_0 = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Teniendo en cuenta esta expresión, calcular la velocidad inicial v_0 que habría que darle a un cuerpo (sin propulsión autónoma) para que lanzado desde la superficie terrestre ascienda una altura vertical de 4000 km. (Radio terrestre $R_0 = 6000$ km, y supondremos nula la resistencia del aire).

Solución

Las ecuaciones diferenciales que caracterizan este movimiento rectilíneo son:

$$\left. \begin{array}{l} v = \dfrac{dh}{dt} \\ \\ g = \dfrac{dv}{dt} \end{array} \right| \quad dt = \frac{dh}{v} \quad \Rightarrow \quad v\,dv = g\,dh$$

sustituyendo e integrando:

$$v\,dv = -\frac{G M_0}{(R_0 + h)^2}\,dh \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} = \frac{G M_0}{R_0 + h} + C$$

cuando $v = 0$ entonces $h = H = 4000$ km, luego:

$$0 = \frac{G\,M_0}{R_0 + H} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{G\,M_0}{R_0 + H}$$

con lo que:

$$\frac{v^2}{2} = G\,M_0 \left[\frac{1}{R_0 + h} - \frac{1}{R_0 + H} \right] = G\,M_0 \,\frac{H - h}{(R_0 + h)\,(R_0 + H)}$$

$$h = 0 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v = v_0 \\ g_0 = \dfrac{G\,M_0}{R_0^2} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2 g_0 R_0 H}{R_0 + H}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}8 \times 6 \times 10^6 \times 4 \times 10^6}{(6 + 4)\,10^6}} \simeq 6\,858 \text{ m/s}}$$

Problema 11. La aceleración a de una partícula que se mueve en el eje X viene expresada en función de la posición por la fórmula: $a = -\omega^2 x$, cuando $x = 0$ entonces $v = v_0$ y $t = 0$. Encontrar las expresiones de la velocidad v y de la posición x en función del tiempo.

Solución

En el problema anterior hemos obtenido la ecuación diferencial para todo movimiento rectilíneo:

$$v\,dv = a\,dx$$

sustituyendo el valor de a obtenemos:

$$v\,dv = -\omega^2 x\,dx$$

integrando:

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{\omega^2 x^2}{2} + C_1 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \\ v = v_0 \end{array} \right| \quad C_1 = \frac{v_0^2}{2}$$

luego:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2} = dx/dt$$

separando variables podemos poner:

$$\frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 x^2}} = dt$$

integrando:

$$\frac{1}{\omega} \text{ arcsen } \frac{\omega x}{v_0} = t + C_2 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array} \right| \quad C_2 = 0$$

despejando x nos queda:

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega} \,\text{sen}\,\omega t}$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t}$$

El problema se puede resolver teniendo en cuenta que:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

ecuación diferencial de segundo orden cuya solución general es:

$$x = A\,\text{sen}\omega t + B\cos\omega t$$

luego:

$$v = A\omega\cos\omega t - B\omega\,\text{sen}\omega t$$

Las condiciones de contorno nos dan:

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} x = 0 = B \\ v = v_0 = A\omega \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad A = v_0/\omega$$

luego:

$$\boxed{x = \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\omega t} \qquad \boxed{v = v_0\cos\omega t}$$

Problema 12. La aceleración tangencial de un punto móvil queda determinada en el CGS por la función: $a_\tau = 6 - 2t$. Para $t = 0$, $v_0 = 0$. Calcular:

1. La expresión general del módulo de la velocidad.
2. Módulo de la velocidad para $t = 1$ s.
3. En qué instantes la velocidad es nula.
4. ¿Qué aceleración tangencial tiene el móvil en tales instantes?
5. ¿Cuál es el módulo de la velocidad a los 10 s de iniciado el movimiento?

Solución

1)

$$v = \int (6 - 2t)dt = 6\int dt - 2\int t\,dt = 6t - t^2 + C$$

para $t = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $C = v_0 = 0$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{v = 6t - t^2}$

2) $\boxed{v = 6 - 1 = 5 \text{ cm/s}}$

3) $0 = 6t - t^2 = t(6 - t) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{t_1 = 0} \\ \boxed{t_2 = 6 \text{ s}} \end{array} \right.$

4) $\boxed{a_1 = 6 \text{ cm/s}^2} \qquad \boxed{a_2 = 6 - 2 \times 6 = -6 \text{ cm/s}^2}$

Obsérvese que, aunque la velocidad es nula, la aceleración no lo es; en el primer instante ($t_1 = 0$) el movimiento es acelerado y en el segundo es decelerado.

5) $\boxed{v = 6 \times 10 - 10^2 = 60 - 100 = -40 \text{ cm/s}}$

El signo menos nos indica que el punto se mueve en sentido contrario a como inició su movimiento.

Problema 13. Una partícula describe una trayectoria circular de 3 m de radio. El arco descrito en cualquier instante viene dado por: $l = t^2 + t + 1$ (GIORGI). Calcular a los 2 s de iniciado el movimiento:

1. El arco.
2. El ángulo.
3. El módulo de las velocidades lineal y angular.
4. El módulo de las aceleraciones tangencial, normal y angular.

Solución

1) $\boxed{l = 4 + 2 + 1 = 7 \text{ m}}$

2) $\boxed{\varphi = l/R = \frac{1}{3}(t^2 + t + 1) = \frac{7}{3} \text{ rad}}$

3) $\boxed{v = dl/dt = 2t + 1 = 5 \text{ m/s}}$ $\boxed{\omega = d\varphi/dt = v/R = \frac{1}{3}(2t + 1) = \frac{5}{3} \text{ rad/s}}$

4) $\boxed{a_\tau = dv/dt = 2 \text{ m/s}^2}$ (El movimiento es circular y uniformemente acelerado)

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(2t+1)^2}{R} = \frac{25}{3} \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2}$$

Problema 14. Una partícula se mueve sobre una trayectoria plana, cuya ecuación expresada en el SI es: $y = x^2 + x + 1$; para $x = 1$ m entonces $v_y = 3$ m/s. Calcular el vector velocidad en ese momento.

Solución

$$y = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x + 1 = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad v_x = \frac{v_y}{2x+1} = \frac{3}{2+1} = 1 \text{ m/s}$$

luego:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

Problema 15. Una partícula describe una trayectoria cuya ecuación en el SI viene dada por: $\boldsymbol{r} = (t^2 + t + 1)\,\boldsymbol{i} - (3t^3 + 2t^2)\,\boldsymbol{j}$. Calcular:

1. El vector velocidad en cualquier instante.
2. El vector aceleración en cualquier instante.
3. El vector velocidad media en el tercer segundo.
4. El vector aceleración media en el tercer segundo.

Solución

1) $\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = (2t + 1)\,\boldsymbol{i} - (9t^2 + 4t)\,\boldsymbol{j}}$

2) $\boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = 2\boldsymbol{i} - (18t + 4)\boldsymbol{j}}$

3) y 4)

$$t_2 = 2 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{r}_2 = 7\boldsymbol{i} - 32\boldsymbol{j} \text{ m} \\ \boldsymbol{v}_2 = 5\boldsymbol{i} - 44\boldsymbol{j} \text{ m/s} \end{array} \right.$$

$$t_3 = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{r}_3 = 13\boldsymbol{i} - 99\boldsymbol{j} \text{ m} \\ \boldsymbol{v}_3 = 7\boldsymbol{i} - 93\boldsymbol{j} \text{ m/s} \end{array} \right.$$

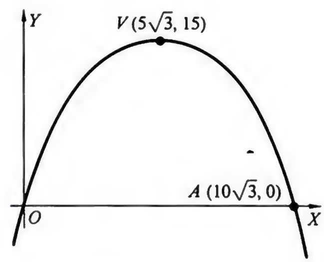
$$\boxed{\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_2}{t_3 - t_2} = 6\boldsymbol{i} - 67\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_2}{t_3 - t_2} = 2\boldsymbol{i} - 49\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

Problema 16. La ecuación que nos define la trayectoria de una partícula en un plano OXY y referida a O como origen, viene dada por: $\boldsymbol{r} = 5t\mathbf{i} + (10\sqrt{3}t - 5t^2)\boldsymbol{j}$ (GIORGI), queremos determinar:

1. La ecuación de la trayectoria escrita $y = f(x)$ y su representación gráfica.
2. Expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.
3. Módulos de la aceleración tangencial y normal para $t = 1$ s.

Solución



Problema IV-16-1.ª

1) Al ser:

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 5t \\ y = 10\sqrt{3}t - 5t^2 \end{array} \right.$$

despejando t en la primera y sustituyendo en la segunda:

$$t = \frac{x}{5} \quad \Rightarrow \quad y = 10\sqrt{3}\frac{x}{5} - 5\frac{x^2}{25} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2\sqrt{3}x - \frac{1}{5}x^2}$$

que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen.

2)

$$\left. \begin{array}{l} v_x = dx/dt = 5 \text{ m/s} \\ v_y = dy/dt = 10(\sqrt{3} - t) \end{array} \right| \quad \boxed{\boldsymbol{v} = 5\boldsymbol{i} + 10(\sqrt{3} - t)\boldsymbol{j}}$$

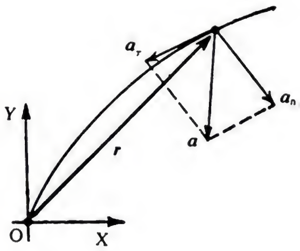
$$\left. \begin{array}{l} a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2 = 0 \\ a_y = dv_y/dt = d^2y/dt^2 = -10 \text{ m/s}^2 \end{array} \right| \quad \boxed{\boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

3) Cálculo de la aceleración tangencial:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{25 + 100(\sqrt{3} - t)^2} = 5\sqrt{1 + 4(\sqrt{3} - t)^2}$$

luego:

$$v^2 = 25[1 + 4(\sqrt{3} - t)^2] \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(v^2) = 2v\frac{dv}{dt} = -25 \times 8(\sqrt{3} - t)$$



Problema IV-16-2.ª

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = - \frac{25 \times 8\,(\sqrt{3} - t)}{2 \times 5 \sqrt{1 + 4\,(\sqrt{3} - t)^2}} = - \frac{20\,(\sqrt{3} - t)}{\sqrt{1 + 4\,(\sqrt{3} - t)^2}}$$

para $t = 1$ s obtenemos para valor del módulo:

$$\boxed{a_\tau = 8{,}2 \text{ m/s}^2}$$

Cálculo de la aceleración normal:

Teniento en cuenta que:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad \Rightarrow \qquad a_n = \sqrt{a^2 + a_\tau^2}$$

y como:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \text{ m/s}^2$$

sustituyendo nos queda:

$$\boxed{a_n = \sqrt{10^2 - 8{,}2^2} = 5{,}7 \text{ m/s}^2}$$

La figura nos representa el vector aceleración total (paralelo al eje Y) y sus componentes intrínsecas.

Problema 17. Una partícula se mueve en trayectoria plana; siendo las componentes coordenadas del radio-vector que define la posición de la partícula en cualquier instante: $x = 2t^2 - 3$, $y = t^3 - 2t + 1$ expresadas x e y en m y t en s. Calcular:

1. Vectores velocidad y aceleración.
2. El módulo de las componentes intrínsecas del vector aceleración para $t = 1$ s.
3. El radio de curvatura en dicho momento.
4. Velocidad de la partícula en el punto A (5,5)

Solución

$$\boldsymbol{r} = (2t^2 - 3)\boldsymbol{i} + (t^3 - 2t + 1)\boldsymbol{j}$$

1)

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r} / dt = 4t\boldsymbol{i} + (3t^2 - 2)\boldsymbol{j}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt = 4\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j}}$$

2)

$$v^2 = 16t^2 + (3t^2 - 2)^2 = 9t^4 + 4t^2 + 4 \qquad \Rightarrow$$

$$2v \frac{dv}{dt} = 36t^3 + 8t \qquad \Rightarrow \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{18t^3 + 4t}{\sqrt{9t^4 + 4t^2 + 4}}$$

para $t = 1$ s:

$$\boxed{a_\tau = \frac{22}{\sqrt{17}} \text{ m/s}^2}$$

como:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = 16 + 36t^2 \\ t = 1 \text{ s} \end{array}\right| \qquad \Rightarrow \qquad a^2 = 52 \text{ m}^2/\text{s}^4$$

con lo que:

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = 52 - \frac{22^2}{17} = \frac{400}{17} \text{m}^2/\text{s}^4 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a_n = \frac{20}{\sqrt{17}} \text{ m/s}^2}$$

luego:

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{22}{\sqrt{17}}\boldsymbol{\tau}^\circ + \frac{20}{\sqrt{17}}\boldsymbol{n}^\circ}$$

3)

$$\left.\begin{array}{lll} a_n = v^2 / \rho & \Rightarrow & \rho = v^2 / a_n \\ t = 1 \text{ s} & \Rightarrow & v^2 = 17 \text{ m}^2/\text{s}^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{17\sqrt{17}}{20} \text{ m}}$$

4)

$$\left.\begin{array}{lll} x = 5 & \Rightarrow & 5 = 2t^2 - 3 \\ y = 5 & \Rightarrow & 5 = t^3 - 2t + 1 \end{array}\right| \Rightarrow \quad t = 2 \text{ s (Solución común)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 8\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

Problema 18. Un movimiento de trayectoria plana es tal que: $x = 1 + \operatorname{sen}\pi t$, $y = t - \cos\pi t$ (GIORGI). Calcular:

1. Vectores velocidad y aceleración.
2. El módulo de las componentes intrínsecas del vector aceleración para $t = 2$ s
3. Valor del radio de curvatura en tal instante.

Solución

1)

$$\boldsymbol{r} = (1 + \operatorname{sen}\pi t)\boldsymbol{i} + (t - \cos\pi t)\boldsymbol{j}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r} / dt = \pi \cos\pi t\,\boldsymbol{i} + (1 + \pi \operatorname{sen}\pi t)\boldsymbol{j}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v} / dt = \pi^2 (-\operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{i} + \cos\pi t\,\mathbf{j})}$$

2)

$$v^2 = \pi^2\cos^2\pi t + (1 + \pi\operatorname{sen}\pi t)^2 = 1 + \pi^2 + 2\pi\operatorname{sen}\pi t \quad \Rightarrow$$

$$2v\frac{dv}{dt} = 2\pi^2\cos\pi t \quad \Rightarrow \quad a_\tau = \frac{\pi^2\cos\pi t}{\sqrt{1 + \pi^2 + 2\pi\operatorname{sen}\pi t}}$$

para $t = 2$ s nos queda:

$$\boxed{a_\tau = \frac{\pi^2}{\sqrt{1 + \pi^2}} \text{ m/s}^2}$$

y como:

$$a^2 = \pi^4 \text{ m}^2/\text{s}^4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = \sqrt{\pi^4 - \frac{\pi^4}{1 + \pi^2}} = \frac{\pi^3}{\sqrt{1 + \pi^2}} \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\pi^2}{\sqrt{1 + \pi^2}}(\boldsymbol{\tau}^0 + \pi\,\mathbf{n}^0) \text{ m/s}^2}$$

Comprobar que los módulos de los dos vectores aceleración obtenidos son idénticos.

3)

$$\left.\begin{array}{l} a_n = v^2 / \rho \\ t = 2 \text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{\pi^3}{\sqrt{1 + \pi^2}} = \frac{1 + \pi^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{(1 + \pi^2)^{3/2}}{\pi^3} \text{ m}}$$

Problema 19. La ecuación que define la trayectoria plana de un punto móvil es: $y = x^2 - 9$ (GIORGI); y la abcisa en función del tiempo es de la forma: $x = 2t - 3$ (GIORGI). Calcular:

1. Expresiones del vector de posición, del vector velocidad y del vector aceleración.

2. Valores de los módulos de las aceleraciones tangencial y normal en el instante $t = 2$ s.

Solución

1)

$$y = x^2 - 9 = (2t-3)^2 - 9 = 4t^2 - 12t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = (2t-3)\boldsymbol{i} + (4t^2 - 12t)\boldsymbol{j}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = 2\boldsymbol{i} + (8t - 12)\boldsymbol{j}} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = 8\boldsymbol{j} \ \text{m/s}^2}$$

2)

$$v^2 = 4 + (8t-12)^2 \quad \Rightarrow \quad 2v\, dv/dt = 16\,(8t - 12) \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} a_\tau = \dfrac{8\,(8t-12)}{\sqrt{4 + (8t-12)^2}} \\ t = 2 \text{ s} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_\tau = \frac{32}{\sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{5}} \ \text{m/s}^2}$$

$$a^2 = 64 \ \text{m}^2/\text{s}^4 \quad \Rightarrow \quad a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = 64 - \frac{16^2}{5} = \frac{64}{5} \ \text{m}^2/\text{s}^4 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = \frac{8}{\sqrt{5}} \ \text{m/s}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{a} = \frac{16}{\sqrt{5}}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{8}{\sqrt{5}}\mathbf{n}^0}$$

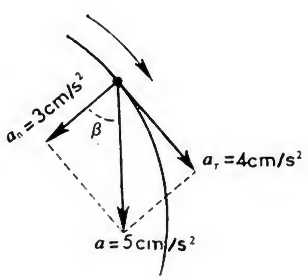
Problema 20. Supongamos un movimiento circular de radio 27 cm y cuyo espacio (l) (distancia sobre la propia curva, a un origen tomado en ella), queda determinado por la ecuación: $l = 3 + t + 2t^2$, en que el espacio está medido en cm y el tiempo *(t)* en segundos; se trata de determinar el vector aceleración en el instante $t = 2$ s.

Solución

1.^er^ MÉTODO

Calculemos el módulo de la velocidad derivando el espacio con relación al tiempo:

$$\left. \begin{array}{r} v = dl/dt = 1 + 4t \\ t = 2 \text{ s} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad v = 1 + 8 = 9 \ \text{cm/s}$$



Problema IV-20-1.ª

La aceleración normal o centrípeta tiene por valor:

$$a_n = v^2 / R = 81 / 27 = 3 \ \text{cm/s}^2$$

Calcularemos el módulo de la aceleración tangencial derivando v, con respecto al tiempo:

$$a_\tau = dv/dt = 4 \ \text{cm/s}^2$$

En la dirección del radio y con sentido hacia el centro dibujaremos el vector aceleración centrípeta (3 cm/s²) y tangente a la curva y en el sentido del movimiento (si éste es acelerado) o en sentido contrario (si es decelerado) la aceleración tangencial (4 cm/s²); en

nuestro caso este último vector tiene el sentido del movimiento por ser positiva la aceleración tangencial. El vector $\boldsymbol{a}$, resultante de los trazados, es el vector aceleración, cuyo módulo es:

$$\boxed{a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm/s}^2}$$

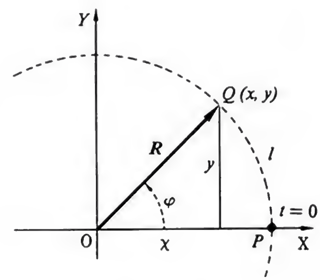
y forma con la normal a la curva un ángulo β, cuya tangente es:

$$\boxed{\operatorname{tag} \beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{4}{3}}$$

quedando así determinado en módulo, dirección y sentido el vector aceleración.

2.º MÉTODO

Tomando el origen de un sistema de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria y el origen de arcos en el punto P de la Fig. tenemos que en cualquier instante:



Problema IV-20-2.ª

$$\varphi = \frac{l}{R} = \frac{3 + t + 2t^2}{R}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos\varphi \\ y &= R\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{R} = R\,(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt}(-\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{a} = R\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,(-\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2(-\cos\varphi\,\boldsymbol{i} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}) =$$

$$= R\left[\left(-\frac{d^2\varphi}{dt^2}\operatorname{sen}\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\varphi - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\operatorname{sen}\varphi\right)\boldsymbol{j}\right]$$

y como:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\,(4t + 1) \qquad\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{4}{R}$$

nos queda:

$$\boldsymbol{a} = \left[-4\operatorname{sen}\varphi - \frac{(4t+1)^2}{R}\cos\varphi\right]\boldsymbol{i} + \left[4\cos\varphi - \frac{(4t+1)^2}{R}\operatorname{sen}\varphi\right]\boldsymbol{j}$$

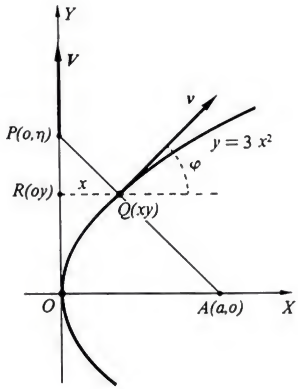
y para $t = 2$ s y $R = 27$ cm, se obtiene:

$$\varphi = \frac{3 + 2 + 2\times 4}{27} = \frac{13}{27}\,\text{rad}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = -4{,}51\,\boldsymbol{i} + 2{,}155\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2} \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 5 \text{ cm/s}^2$$

Problema 21. Una partícula se mueve sobre la curva $y = f(x) = 3x^2$ con velocidad constante de 1 m/s. Un foco luminoso situado en el punto (6,0), medidas estas coordenadas en m, sigue al móvil proyectando una sombra sobre el eje OY. Deter-

minar la velocidad de esa sombra cuando la partícula se encuentra en un punto de abcisa $x = 1$ m.



Problema IV-21

Solución

Los triángulos PQR y POA son semejantes, luego:

$$\frac{\eta - y}{x} = \frac{\eta}{a} \qquad \Rightarrow \qquad \eta = \frac{ay}{a-x}$$

para $a = 6$ m e $y = 3x^2$ queda:

$$\eta = \frac{18x^2}{6-x} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{d\eta}{dt} = \frac{216x - 18x^2}{(6-x)^2}\,\frac{dx}{dt}$$

y como:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v\cos\varphi \\ \operatorname{tag}\varphi = f'(1) \\ f'(x) = 6x \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \operatorname{tag}\varphi = 6 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{37}} \\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{37}} \text{ m/s} \end{array}\right.$$

luego para $x = 1$ m:

$$\boxed{V = \frac{216 - 18}{25}\,\frac{1}{\sqrt{37}} = 1{,}3 \text{ m/s}}$$

Problema 22. Si el radio vector que nos define la posición de una partícula viene dado por: $\boldsymbol{r} = (3t^2 - 5)\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + \operatorname{sen}\pi t\boldsymbol{k}$. Calcular las expresiones del vector velocidad y del vector aceleración.

Solución

$$\boxed{v = d\boldsymbol{r}/dt = 6t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + \pi\cos\pi t\boldsymbol{k}} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = d^2\boldsymbol{r}/dt^2 = 6\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} - \pi^2\operatorname{sen}\pi t\boldsymbol{k}}$$

Problema 23. El radio vector de un punto móvil queda determinado por las siguientes componentes: $x = 4 + 3t$, $y = t^3 + 5$, $z = 2t + 4t^2$, en las que x, y, z vienen expresadas en cm y el tiempo en s. Determinar la velocidad y la aceleración del punto en el instante $t = 1$ s.

Solución

$$\boldsymbol{r} = (4 + 3t)\boldsymbol{i} + (t^3 + 5)\boldsymbol{j} + (2t + 4t^2)\boldsymbol{k}$$

$$v = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/dt = 3\boldsymbol{i} + 3t^2\boldsymbol{j} + (2 + 8t)\boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{a} = dv/dt = 6t\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}$$

$$t = 1 \text{ s} \qquad \Rightarrow \qquad \left|\begin{array}{l} \boxed{v = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \text{ cm/s}} \\ \boxed{\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} \text{ cm/s}^2} \end{array}\right.$$

Problema 24. El vector velocidad del movimiento de una partícula referido a un punto O (velocidad definida por un observador en O) viene dado en el SI por: $\boldsymbol{v} = (2t + 8)\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + (6t^2 - 8)\boldsymbol{k}$. El vector que nos define la posición del punto origen de tiempos sobre la trayectoria es: $\boldsymbol{r}_0 = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ m. Determinar:

1. El vector velocidad inicial y su módulo.

2. El vector velocidad para $t = 5$ s.

3. La expresión del vector de posición en cualquier instante.

4. La distancia del móvil al origen O. (Distancia a que se encontraría el móvil, de un observador colocado en el origen de los vectores de posición) 1 s después de haber empezado a contar el tiempo.

Solución

1)

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v}_0 = 8\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k} \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2} = \sqrt{64 + 36 + 64} \text{ m/s} = 13 \text{ m/s}}$$

2)

$$t = 5 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = (2 \times 5 + 8)\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + (6 \times 25 - 8)\boldsymbol{k} = 18\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 142\boldsymbol{k} \text{ m/s}}$$

3)

$$v_x = dx / dt \quad \Rightarrow \quad x = \int v_x \, dt = \int (2t + 8)\, dt = t^2 + 8t + C_1 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ C_1 = x_0 = 4 \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad x = t^2 + 8t + 4$$

$$v_y = dy / dt \quad \Rightarrow \quad y = \int v_y \, dt = \int 6\, dt = 6t + C_2 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ C_2 = y_0 = 3 \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad y = 6t + 3$$

$$v_z = dz / dt \quad \Rightarrow \quad z = \int v_z \, dt = \int (6t^2 - 8)\, dt = 2t^3 - 8t + C_3 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \\ C_3 = z_0 = -6 \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = 2t^3 - 8t - 6$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (t^2 + 8t + 4)\boldsymbol{i} + (6t + 3)\boldsymbol{j} + (2t^3 - 8t - 6)\boldsymbol{k}}$$

4)

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = 13\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$$

luego:

$$\boxed{d = \text{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{169 + 81 + 144} \text{ m} = 20 \text{ m}}$$

Problema 25. El vector aceleración de un partícula referido a un punto O (vector aceleración definido por un observador en O) viene dado por: $\boldsymbol{a} = 2(18t^2 + 1)\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j}$ (GIORGI). En el origen de los tiempos ($t = 0$) la velocidad es nula y el vector de posición de este punto de la trayectoria es: $\boldsymbol{r}_0 = 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ m. Se trata de determinar el vector velocidad y el vector de posición de la partícula en cualquier instante.

Solución

Cálculo del vector velocidad:

$$a_x = dv_x / dt = 2\,(18t^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad v_x = \int 2\,(18t^2 + 1)\, dt = 12t^3 + 2t + C_1$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{ox} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = 12t^3 + 2t$$

$$a_y = dv_y / dt = 9 \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad v_y = \int 9\,dt \quad \Rightarrow \quad v_y = 9t + C_2$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{oy} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y = 9t$$

$$a_z = dv_z / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = C_3$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{oz} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_z = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 2\,(6t^3 + t)\boldsymbol{i} + 9t\boldsymbol{j}}$$

Cálculo del vector de posición:

$$v_x = dx / dt = 2(6t^3 + t) \quad \Rightarrow \quad x = \int 2(6t^3 + t)\,dt = 3t^4 + t^2 + C_1'$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3t^4 + t^2$$

$$v_y = dy / dt = 9t \quad \Rightarrow \quad y = \int 9t\,dt = 4{,}5t^2 + C_2'$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad C_2' = 4 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad y = 4{,}5t^2 + 4$$

$$v_z = dz / dt = 0 \quad \Rightarrow \quad z = C_3'$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad z_0 = 6 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad C_3' = 6 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad z = 6 \text{ m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = (3t^4 + t^2)\boldsymbol{i} + (4{,}5t^2 + 4)\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}}$$

Problema 26. El vector aceleración de una partícula en movimiento viene expresado en el SI: $\boldsymbol{a} = 6t\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}$, inicialmente la partícula se encuentra en P_0 (1, 3,−2) m y transcurridos 3 s su velocidad es: $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 6\boldsymbol{k}$ m/s. Calcúlese el vector velocidad y el vector de posición en cualquier instante.

Solución

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}\,dt = \int (6t\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k})\,dt = (3t^2 + C_1)\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + (-2t + C_3)\boldsymbol{k}$$

$$t = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} = (27 + C_1)\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + (-6 + C_3)\boldsymbol{k}$$

que comparada con la expresión dada:

$$\left.\begin{aligned} 27 + C_1 &= 3 & \Rightarrow \quad C_1 &= -24 \text{ m/s} \\ C_2 &= 2 \text{ m/s} & & \\ -6 + C_3 &= -6 & \Rightarrow \quad C_3 &= 0 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = (3t^2 - 24)\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}}$$

$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}\,dt = \int [(3t^2 - 24)\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k}]\,dt = (t^3 - 24t + C_1')\boldsymbol{i} + (2t + C_2')\boldsymbol{j} + (-t^2 + C_3')\boldsymbol{k}$$

$$t=0 \qquad \left| \begin{array}{l} C_1' = x_0 = 1 \text{ m} \\ C_2' = y_0 = 3 \text{ m} \\ C_3' = z_0 = -2 \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = (t^3 - 24t + 1)\boldsymbol{i} + (2t+3)\boldsymbol{j} - (t^2+2)\boldsymbol{k}}$$

Problema 27. Las componentes coordenadas del vector que nos define la trayectoria de una partícula son en el SI: $x = 3t^3 - 5$, $y = 6t^2 - 1$, $z = 4t^3 - 6$. Calcular los módulos de la aceleración tangencial y normal para $t = 1$ s.

Solución

$$\boldsymbol{r} = (3t^3 - 5)\boldsymbol{i} + (6t^2 - 1) + (4t^3 - 6)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{v} = 9t^2\boldsymbol{i} + 12t\boldsymbol{j} + 12t^2\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a} = 18t\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 24t\boldsymbol{k}$$

$$v^2 = 81t^4 + 144t^2 + 144t^4 = 225t^4 + 144t^2$$

$$2v\frac{dv}{dt} = 900t^3 + 288t \quad \Rightarrow \quad a_\tau = \frac{450t^3 + 144t}{\sqrt{225t^4 + 144t^2}} = \frac{450t^2 + 144}{\sqrt{225t^2 + 144}}$$

para $t = 1$ s su valor será:

$$\boxed{a_\tau = \frac{594}{\sqrt{369}} \text{ m/s}^2 \simeq 31 \text{ m/s}^2}$$

y como:

$$a^2 = 324t^2 + 144 + 576t^2 = 900t^2 + 144$$

para $t = 1$ s :

$$a^2 = 1\,044 \text{ m}^2/\text{s}^4$$

luego: $\boxed{a_n = \sqrt{1044 - 31^2} \simeq 9 \text{ m/s}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = 31\boldsymbol{\tau}^0 + 9\boldsymbol{n}^0 \text{ m/s}^2}$

Problema 28. El vector velocidad del movimiento de una partícula viene dado por: $\boldsymbol{v} = (3t - 2)\boldsymbol{i} + (6t^2 - 5)\boldsymbol{j} + (4t - 1)\boldsymbol{k}$ (GIORGI) y el radio vector que nos define el origen de los tiempos es: $\boldsymbol{r}_0 = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ m. Calcular:

1. La expresión del radio vector en cualquier instante.
2. Ecuación del vector aceleración.
3. Módulo de las aceleraciones tangencial y normal para $t = 1$ s.

Solución

1)
$$\boldsymbol{r} = \int \boldsymbol{v}\,dt = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + C_1\right)\boldsymbol{i} + \left(2t^3 - 5t + C_2\right)\boldsymbol{j} + \left(2t^2 - t + C_3\right)\boldsymbol{k}$$

$$t = 0 \quad \left| \begin{array}{l} C_1 = x_0 = 3 \text{ m} \\ C_2 = y_0 = -2 \text{ m} \\ C_3 = z_0 = 1 \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \left(\frac{3}{2} t^2 - 2t + 3 \right) i + \left(2t^3 - 5t - 2 \right) j + \left(2t^2 - t + 1 \right) k}$$

2)

$$\boxed{a = dv / dt = 3i + 12tj + 4k}$$

3)

$$v^2 = (3t - 2)^2 + (6t^2 - 5)^2 + (4t - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad 2v\, dv/dt = 6\,(3t - 2) + 24t\,(6t^2 - 5) + 8\,(4t - 1)$$

para $t = 1$ s:

$$v = \sqrt{11} \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{6 + 24 + 24}{2\sqrt{11}} = \frac{27}{\sqrt{11}} \text{ m/s}^2}$$

y como:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = 9 + 144t^2 + 16 \\ t = 1 \text{ s} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad a^2 = 169 \text{ m}^2/\text{s}^4$$

luego:

$$\boxed{a_n = \sqrt{169 - \frac{27^2}{11}} \simeq 10 \text{ m/s}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{27}{\sqrt{11}} \boldsymbol{\tau}^0 + 10\, \mathbf{n}^0}$$

B) MOVIMIENTO DEL SOLIDO RIGIDO

FORMULARIO

VELOCIDAD

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PP}'$$

ACELERACIÓN

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{PP}' + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PP}')$$

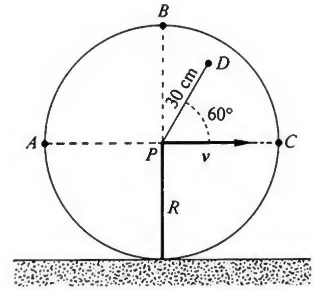
EJE INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN: «Es el lugar geométrico de los puntos Q tales que:

$$0 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PQ} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QP}$$

siendo P un punto cualquiera del sólido y $\boldsymbol{v}$ su velocidad.»

Problema 29. Un disco de radio $R = 1$ m rueda sin deslizar por un plano horizontal y en un instante dado, su centro P tiene una velocidad de 10 m/s en la dirección indicada en la Fig. se pide:

1. Demostrar que es cierta la relación $v = \omega R$ en la que v es la velocidad lineal de P y ω la velocidad angular del disco.
2. Determinar cuál es el eje instantáneo de rotación.
3. Calcular la velocidad de los puntos A, B, C y D que se indican en la Fig.



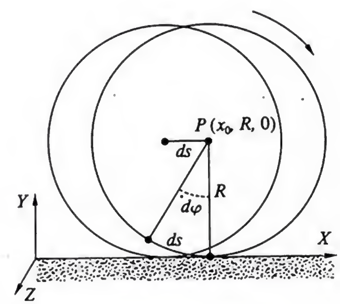
Problema IV-29

Solución

1) Al rodar el cuerpo sin deslizamiento (Fig. 1.ª), mientras el centro P recorre una distancia ds el disco gira un ángulo $d\varphi$ de tal forma que un arco ds de su circunferencia entra en contacto con la superficie horizontal, luego:

$$ds = R\,d\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \frac{ds}{dt} = R\,\frac{d\varphi}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \omega R}$$

2) El eje instantáneo de rotación será perpendicular al plano en que se encuentra el disco (Dirección del eje OZ en la Fig.) y cortará a éste en un punto Q $(x, y, 0)$ tal que tendrá que verificar:



Problema IV-29-1.ª

$$0 = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PQ} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QP}$$

en la Fig.:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v}\left(v,\ 0,\ 0\right) \\[2ex] \boldsymbol{\omega}\left(0,\ 0,\ -\dfrac{v}{R}\right) \\[2ex] P\left(x_0,\ R,\ 0\right) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \boldsymbol{QP} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} = (x_0 - x)\boldsymbol{i} + (R - y)\boldsymbol{j} \\[2ex] \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -\dfrac{v}{R} \\ x_0 - x & R - y & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

luego:

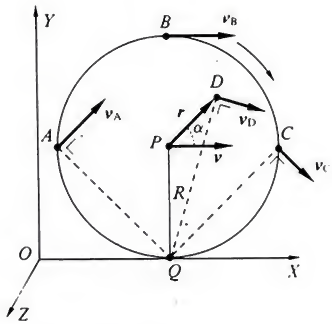
$$v\boldsymbol{i} = \frac{v}{R}(R - y)\boldsymbol{i} - \frac{v}{R}(x_0 - x)\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{lcl} v = \dfrac{v}{R}(R - y) & \Rightarrow & y = 0 \\[2ex] -\dfrac{v}{R}(x_0 - x) = 0 & \Rightarrow & x = x_0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad Q\,(x_0,\ 0,\ 0)$$

lo cual era previsible ya que la velocidad de ese punto es nula. Este eje se desplazará durante el movimiento del disco, pasando en cualquier instante por el punto de contacto con el plano.

3) Conocida la velocidad $\boldsymbol{v}$ del punto P y $\boldsymbol{\omega}$ podemos calcular la de cualquier otro P' del disco puesto que:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PP'}$$

a) Cálculo de $\boldsymbol{v}_A$:



Problema IV-29-2.ª

$$v_A = v + \omega \times PA \qquad PA\,(-R,\,0,\,0) \quad \Rightarrow \quad v_A = v\,i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dfrac{v}{R} \\ -R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{v_A = v\,i + v\,j = 10\,i + 10\,j \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v_A = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

b) Cálculo de v_B :

$$v_B = v + \omega \times PB \qquad PB\,(0,\,R,\,0) \quad \Rightarrow \quad v_B = v\,i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dfrac{v}{R} \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{v_B = v\,i + v\,i = 2v\,i = 20\,i \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v_B = 20 \text{ m/s}$$

c) Cálculo de v_C :

$$v_C = v + \omega \times PC \qquad PC\,(R,\,0,\,0) \quad \Rightarrow \quad v_C = v\,i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dfrac{v}{R} \\ R & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{v_C = v\,i - v\,j = 10\,i - 10\,j \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v_C = v_A = 10\sqrt{2} \text{ m/s}$$

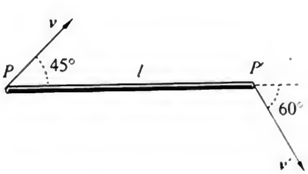
d) Cálculo de v_D, llamando $r = 30$ cm y $\alpha = 60°$:

$$v_D = v + \omega \times PD \qquad PD\,(r\cos\alpha,\, r\,\text{sen}\,\alpha,\, 0) \quad \Rightarrow \quad v_D = v\,i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dfrac{v}{R} \\ r\cos\alpha & r\,\text{sen}\,\alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{v_D = v\left(1 + \frac{r\,\text{sen}\,\alpha}{R}\right) i - v\,\frac{r\cos\alpha}{R}\,j = \left(10 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) i - \frac{3}{2}\,j \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v_D = 12{,}7 \text{ m/s}$$

Todas estas velocidades también se podrían calcular utilizando las fórmulas:

$$v_A = \omega \times QA \qquad v_B = \omega \times QB \qquad v_C = \omega \times QC \qquad v_D = \omega \times QD$$



Problema IV-30

Problema 30. En un instante determinado una barra de 3 m de longitud se mueve en un plano horizontal (Plano de la Fig.). Su extremo P tiene una velocidad de 1 m/s y forma un ángulo de 45° con la dirección PP'; sabemos también que su extremo P' tiene una velocidad en ese instante tal que foma un ángulo de $-60°$ con la misma dirección, se pide calcular:

1. La velocidad v' del extremo P'.
2. La velocidad angular en ese instante de todas las partículas que forman la barra.
3. Posición del eje instantáneo de rotación.

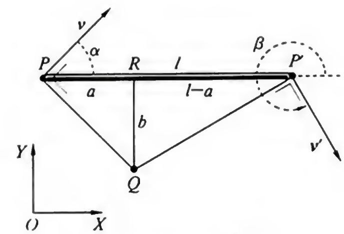
Solución

1) Como el campo de velocidades de cualquier sólido en movimiento es Equiproyectivo («Cualquiera que sean dos partículas del sólido en movimiento, las proyecciones de sus vectores velocidad sobre la recta que las une, en nuestro caso la barra, son iguales en magnitud y signo») las proyecciones sobre PP' de las velocidades $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ (componentes según el eje OX en el sistema referencial escogido en la Fig.) tendrán que ser iguales:

$$v_x = v'_x = v\cos\alpha$$

y como:

$$\text{tag}\beta = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{v'_y}{v\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad v'_y = v\cos\alpha\ \text{tag}\beta$$



Problema IV-30-1.ª

luego:

$$\boldsymbol{v}' = v\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v\cos\alpha\ \text{tag}\beta\,\boldsymbol{j}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\boldsymbol{v}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{6}}{2}\boldsymbol{j}\ \text{m/s}} \quad \Rightarrow \quad v' = \sqrt{2}\ \text{m/s}$$

2)

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PP}' \qquad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{v}'\,(v\cos\alpha,\ v\cos\alpha\ \text{tag}\beta,\ 0) \\ \boldsymbol{v}\,(v\cos\alpha,\ v\,\text{sen}\alpha,\ 0) \\ \boldsymbol{PP}'\,(l,\ 0,\ 0) \end{array} \right.$$

el eje instantáneo de rotación tiene que ser perpendicular al plano en que se mueve la barra, y por tanto:

$$\boldsymbol{\omega}\,(0,\ 0,\ \omega)$$

luego:

$$v\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v\cos\alpha\ \text{tag}\beta\,\boldsymbol{j} = v\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + v\,\text{sen}\alpha\,\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ l & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$v\cos\alpha\ \text{tag}\beta = v\,\text{sen}\alpha + l\omega \qquad \Rightarrow \qquad \omega = v\,\frac{\cos\alpha\ \text{tag}\beta - \text{sen}\alpha}{l} \qquad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\omega} = v\,\frac{\cos\alpha\ \text{tag}\beta - \text{sen}\alpha}{l}\ \boldsymbol{k}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{3}\boldsymbol{k} = -\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{6}\ \boldsymbol{k}\ \text{rad/s}}$$

3) El eje instantáneo de rotación que es perpendicular al plano XOY, cortará a éste en un punto Q tal que tendrá que verificar: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QP}$ o que $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QP}'$, de cualquiera de estas dos relaciones se obtiene la posición relativa de Q respecto del extremo P de la barra.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QP} \qquad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{v}\,(v\cos\alpha,\ v\,\text{sen}\alpha,\ 0) \\ \boldsymbol{\omega}\,(0,\ 0,\ \omega) \\ \boldsymbol{QP}\,(-a,\ b,\ 0) \end{array} \right.$$

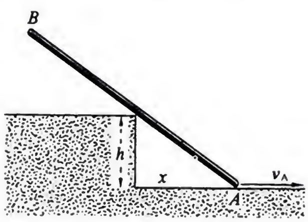
$$v\cos\alpha\, \mathbf{i} + v\,\text{sen}\alpha\, \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -a & b & 0 \end{vmatrix}$$

de donde se obtiene:

$$v\cos\alpha = -\omega b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{v\cos\alpha}{\omega} = -l\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\,\text{tag}\beta - \text{sen}\alpha} = -\frac{l}{\text{tag}\beta - \text{tag}\alpha} = -\frac{3}{-\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$$

$$v\,\text{sen}\alpha = -a\omega \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{v\,\text{sen}\alpha}{\omega} = -l\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha\,\text{tag}\beta - \text{sen}\alpha} = -\frac{l\,\text{tag}\alpha}{\text{tag}\beta - \text{tag}\alpha} = -\frac{3}{-\sqrt{3}-1} = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$$

(Estos resultados además de poderse comprobar en $\mathbf{v}' = \omega \times \mathbf{QP'}$ están en perfecto acuerdo con las relaciones trigonométricas existentes en el triángulo PQR en el que $a = b\,\text{tag}\alpha$).



Problema IV-31

Problema 31. Una barra de 3 m de longitud resbala por el suelo apoyándose en un escalón de altura $h = 1$ m (ver Fig.). Si el extremo A, en el momento en que está separado del escalón $x = \sqrt{3}$ m, tiene una velocidad $v_A = 1$ m/s. Calcular:

1. La velocidad angular de la barra en ese momento.
2. La velocidad del extremo B.

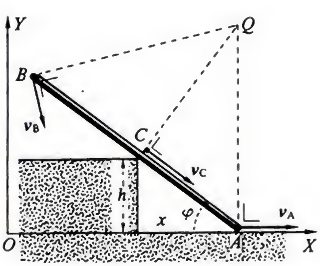
Solución

1) Razonando como en el problema anterior, al ser el campo de velocidades equiproyectivo y v_C tener por dirección y sentido el de la figura, su valor en módulo será igual al de la proyección de $\mathbf{v}_A$ sobre la barra, es decir:

$$v_C = v_A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} v_{Cx} &= \ \ v_A\cos^2\varphi \\ v_{Cy} &= -v_A\cos\varphi\,\text{sen}\varphi \\ v_{Cz} &= \ \ 0 \end{aligned} \right.$$

$$\mathbf{AC}(-x, h, 0) \qquad \mathbf{v}_A\,(v_A, 0, 0) \qquad \boldsymbol{\omega}\,(0, 0, \omega)$$

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AC} \quad \Rightarrow \quad v_A\cos^2\varphi\,\mathbf{i} - v_A\cos\varphi\,\text{sen}\varphi\,\mathbf{j} = v_A\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -x & h & 0 \end{vmatrix}$$



Problema IV-31-1.ª

y como:

$$\text{sen}\varphi = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{1}{2} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nos queda:

$$\frac{v_A x^2}{x^2+h^2}\,\mathbf{i} - \frac{v_A h x}{x^2+h^2}\,\mathbf{j} = (v_A - h\omega)\,\mathbf{i} - x\omega\mathbf{j}$$

cualquiera de las dos igualdades que resultan de esta ecuación vectorial nos llevan a que:

$$\omega = \frac{v_A h}{x^2 + h^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{v_A h}{x^2 + h^2}\, \boldsymbol{k}$$

sustituyendo los valores numéricos nos queda:

$$\omega = \frac{1}{4} \text{ rad/s} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{4}\boldsymbol{k} \text{ rad/s}}$$

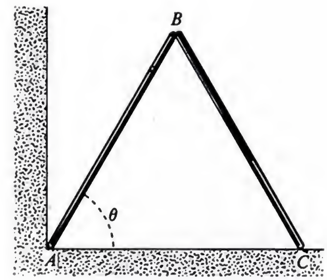
2)

$$\boldsymbol{AB}\,(-l\cos\varphi, l\text{sen}\varphi, 0) \equiv \boldsymbol{AB}\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \text{m}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}$$

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{8}\,\boldsymbol{i} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\,\boldsymbol{j} \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \frac{\sqrt{13}}{4} \text{ m/s}}$$

Problema 32. Dos barras de 1 m de longitud están unidas en B por una bisagra como indicamos en la Fig. estando apoyadas en el suelo y el extremo A en una pared (A es un punto fijo); se deja el sistema en libertad y cuando $\theta = 20°$ la velocidad angular de la barra AB es $\omega = 0{,}2$ rad/s. Determinar la velocidad del extremo C de la barra BC.



Problema IV-32

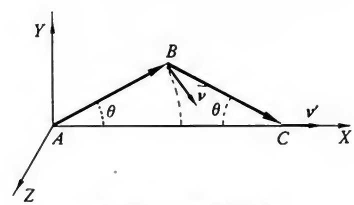
Solución

La velocidad $\boldsymbol{v}$ del punto B común a las dos barras será:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB} \qquad \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega}\,(0, 0, -\omega) \\ \boldsymbol{AB}\,(l\cos\theta, l\text{sen}\theta, 0) \end{array} \right.$$

luego:

$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -\omega \\ l\cos\varphi & l\text{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = \omega l \text{sen}\varphi\, \boldsymbol{i} - \omega l \cos\varphi\, \boldsymbol{j}$$



Problema IV-32-1.ª

la velocidad angular de la barra BC será:

$$\boldsymbol{\omega}'\,(0, 0, \omega)$$

y como:

$$\boldsymbol{BC}\,(l\cos\theta, -l\text{sen}\theta, 0)$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{v} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ l\cos\theta & -l\text{sen}\theta & 0 \end{vmatrix} = 2 l \omega \text{sen}\theta\, \boldsymbol{i}$$

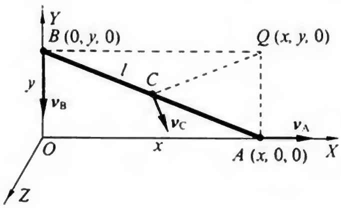
sustituyendo valores:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 2 \times 0{,}2 \text{sen}20\, \boldsymbol{i} = 0{,}14\, \boldsymbol{i} \text{ m/s}}$$

Problema 33. Una escalera de mano de 5 m de longitud se apoya sobre una pared vertical y el suelo horizontal; rebasada la posición de equilibrio comienza a caer de forma que en un momento determinado la velocidad del extremo que se arrastra por el suelo y que se encuentra a 4 m de la pared es de 2 m/s y su aceleración -1 m/s². Se pide calcular en ese instante:

1. La velocidad y aceleración del otro extremo.

2. La velocidad y aceleración del punto medio de la escalera.



Problema IV-33

Solución

1) Al estar obligados los extremos de la escalera a moverse sobre el suelo y pared las velocidades llevan las direcciones y sentidos indicados en la Fig. con lo que el eje instantáneo de rotación es perpendicular al plano XOY y lo corta en el punto $Q(x, y, 0)$ ($x = 4$ m, $y = 3$ m). Luego:

$$\boldsymbol{v}_A\,(v, 0, 0) \qquad \boldsymbol{\omega}\,(0, 0, \omega) \qquad \boldsymbol{QA}\,(0, -y, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QA} \quad \Rightarrow$$

$$v\boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -y & 0 \end{vmatrix} = y\omega\boldsymbol{i} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{y}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{v}{y}\boldsymbol{k} = \frac{2}{3}\boldsymbol{k} \text{ rad/s}$$

y como:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{QB} \qquad \boldsymbol{QB}\,(-x, 0, 0)$$

$$\boldsymbol{v}_B = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \dfrac{v}{y} \\ -x & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{v}_B = \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} = -\frac{x}{y}v\boldsymbol{j} = -\frac{8}{3}\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

siendo:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB})$$

y:

$$\boldsymbol{a}_A\,(-1, 0, 0) \text{ m/s}^2$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{y}\boldsymbol{k}\right) = \frac{y\dfrac{dv}{dt} - v\dfrac{dy}{dt}}{y^2}\boldsymbol{k} = \frac{-3 \times 1 + 2\dfrac{8}{3}}{9}\boldsymbol{k} = \frac{7}{27}\boldsymbol{k} \text{ rad/s}^2$$

$$\boldsymbol{AB}\,(-4, 3, 0) \text{ m}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{AB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \dfrac{7}{27} \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{9}\boldsymbol{i} - \frac{28}{27}\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{AB}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{AB})\boldsymbol{\omega} - \omega^2 \boldsymbol{AB} = -\omega^2 \boldsymbol{AB} = -\frac{4}{9}(-4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = \frac{16}{9}\boldsymbol{i} - \frac{4}{3}\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2$$

luego:

$$a_B = \left(-1 - \frac{7}{9} + \frac{16}{9}\right) i + \left(-\frac{28}{27} - \frac{4}{3}\right) j = -\frac{64}{27} j \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_B = \frac{64}{27} \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} v_C = v_A + \omega \times AC \\ AC\left(-2, \frac{3}{2}, 0\right) \text{m} \end{array}\right| \Rightarrow v_C = 2i + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = i - \frac{4}{3} j \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_C = \frac{5}{3} \text{ m/s}}$$

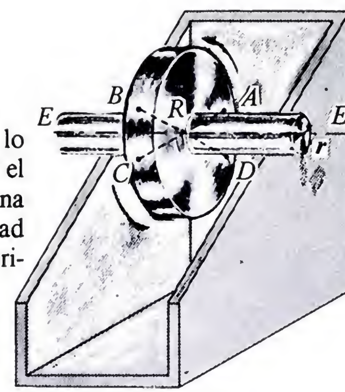
$$a_C = a_A + \frac{d\omega}{dt} \times AC + \omega \times (\omega \times AC)$$

$$\frac{d\omega}{dt} \times AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \frac{7}{27} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{7}{18} i - \frac{14}{27} j \text{ m/s}^2$$

$$\omega \times (\omega \times AC) = (\omega \cdot AC)\omega - \omega^2 AC = -\omega^2 AC = \frac{8}{9} i - \frac{2}{3} j \text{ m/s}^2$$

$$a_C = \left(-1 - \frac{7}{18} + \frac{8}{9}\right) i - \left(\frac{14}{27} + \frac{2}{3}\right) j = -\frac{1}{2} i - \frac{32}{27} j \text{ m/s}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_C = 1{,}3 \text{ m/s}^2}$$

Problema 34. Un volante de la forma indicada en la Fig. rueda sin deslizar a lo largo de las guías inclinadas 30° con la horizontal. El radio del cilindro es 2 cm y el del disco 10 cm. En un momento determinado los puntos del eje EE' tienen una velocidad $v = 10$ cm/s y una aceleración $a = 2$ cm/s². Se pide calcular la velocidad y aceleración de los puntos A, B, C y D del disco (recta AC paralela al plano horizontal y la BD perpendicular al plano inclinado).



Problema IV-34

Solución

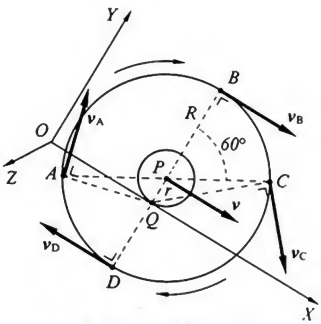
Siguiendo un razonamiento análogo al hecho en el problema 29, la velocidad lineal de un punto del eje EE' está relacionada con la velocidad angular del sistema por:

$$v = \omega r \qquad \Rightarrow \qquad \omega = v / r$$

teniendo en cuenta la constancia de r con el tiempo, si derivamos esta última ecuación se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \qquad \Rightarrow \qquad a = \alpha r \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \frac{a}{r}$$

en la que α es la aceleración angular del sistema. Los vectores ω y α serán perpendiculares al plano del disco y dirigidos en el sentido negativo del eje OZ (ver Fig.).
Razonamos igualmente, que el eje instantáneo de rotación es perpendicular al plano del disco y se moverá con el sistema, pero en todo momento pasará por los puntos de contacto del cilindro con el plano inclinado.



Problema IV-34-1.ª

$$\boldsymbol{v}\,(10,0,0)\ \text{cm/s}$$

$$\boldsymbol{\omega}\left(0,0,-\frac{v}{r}\right)\equiv\left(0,0,-5\right)\ \text{rad/s}$$

$$\boldsymbol{PA}\,(-R\cos 30°, -R\,\text{sen}\,30°, 0)\equiv \boldsymbol{PA}\,(-5\sqrt{3},-5,0)\ \text{cm}$$

$$\boldsymbol{PB}\,(0, R, 0)\equiv \boldsymbol{PB}\,(0,10,0)\ \text{cm}$$

$$\boldsymbol{PC}\,(R\cos 30, R\,\text{sen}\,30, 0)\equiv \boldsymbol{PC}\,(5\sqrt{3},5,0)\ \text{cm}$$

$$\boldsymbol{PD}\,(0,-R,0)\equiv \boldsymbol{PD}\,(0,-10,0)\ \text{cm}$$

$$\boldsymbol{v}_A=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PA}=10\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-5\\-5\sqrt{3}&-5&0\end{vmatrix}=-15\boldsymbol{i}+25\sqrt{3}\boldsymbol{j}\ \text{cm/s}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_A=10\sqrt{21}\ \text{cm/s}}$$

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PB}=10\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-5\\0&10&0\end{vmatrix}=60\boldsymbol{i}\ \text{cm/s}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_B=60\ \text{cm/s}}$$

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PC}=10\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-5\\5\sqrt{3}&5&0\end{vmatrix}=35\boldsymbol{i}-25\sqrt{3}\boldsymbol{j}\ \text{cm/s}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_A=10\sqrt{31}\ \text{cm/s}}$$

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PD}=10\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-5\\0&-10&0\end{vmatrix}=-40\boldsymbol{i}\ \text{cm/s}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_D=40\ \text{cm/s}}$$

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{PP'}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{PP'})$$

$$\boldsymbol{a}\,(a,0,0)\equiv\boldsymbol{a}\,(2,0,0)\ \text{cm/s}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}=-\frac{a}{r}\mathbf{k}=-\mathbf{k}\ \text{rad/s}^2$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{PA}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-1\\-5\sqrt{3}&-5&0\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}+5\sqrt{3}\boldsymbol{j}\ \text{cm/s}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{PB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&0&-1\\0&10&0\end{vmatrix}=10\boldsymbol{i}\ \text{cm/s}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{PC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 5\sqrt{3} & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} - 5\sqrt{3}\boldsymbol{j} \text{ cm/s}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{PD} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} = -10\boldsymbol{i} \text{ cm/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PA}) = -\omega^2 \boldsymbol{PA} = 125\sqrt{3}\boldsymbol{i} + 125\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PB}) = -\omega^2 \boldsymbol{PB} = -250\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PC}) = -\omega^2 \boldsymbol{PC} = -125\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 125\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2$$

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PD}) = -\omega^2 \boldsymbol{PD} = 250\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a}_A &= (2 - 5 + 125\sqrt{3})\boldsymbol{i} + (5\sqrt{3} + 125)\boldsymbol{j} = (125\sqrt{3} - 3)\boldsymbol{i} + 5(\sqrt{3} + 25)\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2 \\ \boldsymbol{a}_B &= (2 + 10)\boldsymbol{i} - 250\boldsymbol{j} = 12\boldsymbol{i} - 250\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2 \\ \boldsymbol{a}_C &= (2 + 5 - 125\sqrt{3})\boldsymbol{i} - (5\sqrt{3} + 125)\boldsymbol{j} = (7 - 125\sqrt{3})\boldsymbol{i} - 5(\sqrt{3} + 25)\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2 \\ \boldsymbol{a}_D &= (2 - 10)\boldsymbol{i} + 250\boldsymbol{j} = -8\boldsymbol{i} + 250\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2 \end{aligned}}$$

Capítulo V

ESTUDIO CINEMATICO DE DIVERSOS MOVIMIENTOS PARTICULARES

A) MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA EN TRAYECTORIA RECTA

FORMULARIO

MOVIMIENTOS UNIFORMES:

$$s = s_0 + vt \qquad \text{Si:} \qquad s_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s = vt$$

MOVIMIENTOS UNIFORMEMENTE ACELERADOS:

$$v = v_0 + at$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

MOVIMIENTOS UNIFORMEMENTE ACELERADOS, PARTIENDO O LLEGANDO AL REPOSO:

$$s = \frac{1}{2} . |a|\, t^2 \qquad\qquad s = \frac{1}{2}\, v t$$

$$v = |a|\, t \qquad\qquad v = \sqrt{2\, |a|\, s}$$

Problema 1. ¿Qué tiempo tardaría en recorrer una circunferencia máxima de la Tierra un avión a la velocidad del sonido, 340 m/s?

Solución

Circunferencia máxima terrestre $\simeq$ 40 000 000 m. De la expresión:

$$s = \frac{v}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{s}{v} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = \frac{4 \times 10^7}{340} = 177\,647 \text{ s} = 32^{\text{h}}\ 40^{\text{min}}\ 47^{\text{s}}}$$

Problema 2. La distancia mínima a que debe estar un muro para que se produzca eco al emitir enfrente de él una sílaba, es 17 m; el mínimo tiempo para que se perciban dos sílabas distintamente es 0,1 s (poder separador del oído medio). Calcular con estos datos la velocidad de propagación del sonido en el aire, teniendo en cuenta que el sonido va y vuelve en el trayecto de 17 m. ¿Cuál es el valor de una velocidad «supersónica» en km/h?

Solución

El sonido recorre: $2 \times 17 = 34$ m en 0,1 s. La velocidad es:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{34}{0{,}1} = 340 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 340 \text{ m/s} = \frac{340 \times 3\,600}{1\,000} = 34 \times 36 = 1\,224 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{\text{La velocidad supersónica es mayor de } 1\,224 \text{ km/h}}$$

Problema 3. Entre dos observadores hay una distancia de 1 050 m; uno de ellos dispara un arma de fuego y el otro cuenta el tiempo que transcurre desde que ve el fogonazo hasta que oye el sonido, obteniendo un valor de 3 s. Despreciando el tiempo empleado por la luz en hacer tal recorrido, calcular la velocidad de propagación del sonido.

Solución

La velocidad es: $\boxed{v = s\,/\,t = 1\,050\,/\,3 = 350 \text{ m/s}}$

Problema 4. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en los problemas anteriores, calcular:
1. La componente de la velocidad del viento en la dirección de los observadores en la experiencia del problema 2.
2. ¿Qué tiempo tardaría el sonido en recorrer los 1 050 m si los observadores del anterior problema invirtieran sus posiciones?

Solución

1) La componente de la velocidad del viento es la diferencia de los resultados de los dos problemas anteriores:

$$\boxed{350 - 340 = 10 \text{ m/s}}$$

2) Haciendo la observación inversamente, el sonido se propagará en contra del viento, con una velocidad:

$$v = 340 - 10 = 330 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = s\,/\,v = 1\,050\,/\,330 = 3{,}18 \text{ s}}$$

Problema 5. Nos encontramos en una batalla naval, en un buque situado entre el enemigo y los acantilados de la costa. A los 3 s de ver un fogonazo oímos el disparo

del cañón, y a los 11 s del fogonazo percibimos el eco. Calcular la distancia a que están de nosotros el enemigo y la costa. Velocidad del sonido, 340 m/s.

Solución

Despreciando el tiempo empleado por la luz en su recorrido, la distancia a que se encuentra el enemigo es:

$$\boxed{s = 340 \times 3 = 1\,020 \text{ m}}$$

El sonido emplea para ir y volver a la costa, desde nuestra posición, un tiempo que es:

$$t = 11 - 3 = 8 \text{ s} \qquad \Rightarrow \qquad 2s' = 340 \times 8 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{s' = 1\,360 \text{ m}}$$

Problema 6. Un ciclista marcha por una región donde hay muchas subidas y bajadas. En las cuestas arriba lleva una velocidad constante de 5 km/h y en las cuestas abajo de 20 km/h. Calcular:

1. ¿Cuál es su velocidad media si las subidas y bajadas tienen la misma longitud?
2. ¿Cuál es su velocidad media si emplea el mismo tiempo en las subidas que en las bajadas?
3. ¿Cuál es su velocidad media si emplea doble tiempo en las subidas que en las bajadas?

Solución

1)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{s_{\text{total}}}{t_{\text{total}}} = \frac{s_{\text{subidas}} + s_{\text{baja}}}{t_{\text{total}}} = \frac{2s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{s}{v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 8 \text{ km/h}}$$

2)

$$\boxed{\bar{v}\ \frac{v_1 t + v_2 t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 12{,}5 \text{ km/h}}$$

3)

$$\boxed{\bar{v} = \frac{v_1 2t + v_2 t}{3t} = \frac{2v_1 + v_2}{3} = \frac{2 \times 5 + 20}{3} = 10 \text{ km/h}}$$

(Obsérvese que únicamente la velocidad media es la media aritmética de las velocidades uniformes, en el caso de que el tiempo que duran los distintos recorridos es el mismo).

Problema 7. Desde la cornisa de un edificio de 60 m de alto se lanza verticalmente hacia abajo un proyectil con una velocidad de 10 m/s. Calcular:

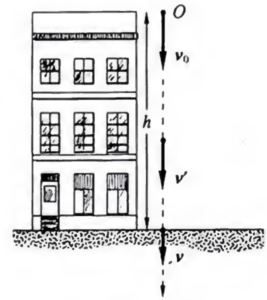
1. Velocidad con que llega al suelo.
2. Tiempo que tarda en llegar al suelo.
3. Velocidad cuando se encuentra en la mitad de su recorrido.
4. Tiempo que tarda en alcanzar la velocidad del apartado 3).

Solución

Tomamos magnitudes positivas las que van hacia abajo. Las ecuaciones de este movimiento referidas al punto de lanzamiento como origen serán:

$$v = v_0 + gt \qquad v_0 = 10 \text{ m/s}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad g = 10 \text{ m/s}^2$$



Problema V-7

1) y 2)

$$h = 60 \text{ m} \quad \begin{cases} v = 10 + 10t \\ 60 = 10t + \dfrac{1}{2} 10t^2 \end{cases} \quad \boxed{t = 2{,}6 \text{ s}} \quad \boxed{v = 36 \text{ m/s}}$$

3) y 4)

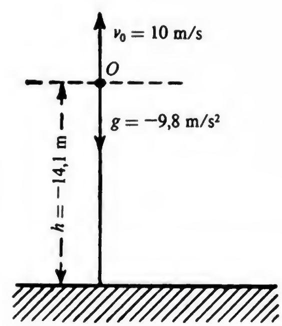
$$h' = 30 \text{ m} \quad \begin{cases} v' = 10 + 10t' \\ 30 = 10t' + \dfrac{1}{2} 10t'^2 \end{cases} \quad \boxed{t' = 1{,}65 \text{ s}} \quad \boxed{v' = 26{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 8. Desde el balcón situado a 14,1 m sobre el suelo de una calle, lanzamos un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s. Calcular el tiempo que tardará en llegar al suelo.

Solución

Tomando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y como sentido positivo el del eje vertical ascendente, nuestros datos son:

$$v_0 = 10 \text{ m/s} \qquad h = -14{,}1 \text{ m} \qquad g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$



Problema V-8

Sustituyendo en la ecuación general:

$$h = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

tenemos:

$$-14{,}1 = 10t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

Ecuación de segundo grado en t, que resuelta nos da, para valores del tiempo: $t_1 = 3$ s y $t_2 \simeq -0{,}96$ s.

El tiempo pedido es 3 s; tiempo invertido por el cuerpo en subir hasta la cúspide del trayecto y caer desde ella hasta la calle.

El tiempo negativo $-0{,}96$ s (anterior al origen de los tiempos) hubiese sido el empleado por el cuerpo lanzado desde el suelo, en subir hasta el origen *(O)* y pasar por él a la velocidad de 10 m/s hacia arriba.

Problema 9. Desde lo alto de una torre de 100 m de alta se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con la velocidad de 15 m/s. La piedra llega a una determinada altura y comienza a caer por la parte exterior de la torre. Tomando como ori-

gen de ordenadas el punto de lanzamiento, calcular la posición y velocidad de la piedra al cabo de 1 y 4 s después de su salida. ¿Cuál es la altura alcanzada por la piedra y qué tiempo tarda en alcanzarla? Asimismo calcular la velocidad cuando se encuentra a 8 m por encima del punto de partida y cuando cayendo pasa por el citado punto de partida. ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se lanzó hasta que vuelve a pasar por dicho punto? ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo y qué velocidad lleva en ese momento?

Solución

Tomamos magnitudes positivas las que van hacia arriba. Las ecuaciones de este movimiento serán:

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 + gt \\ s &= v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} v_0 &= 15 \text{ m/s} \\ g &= -10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ s} \quad \left| \begin{aligned} & v = 15 - 10 \times 1 = 5 \text{ m/s} \ \text{(subiendo)} \\ & h = 15 \times 1 - \frac{1}{2} 10 \times 1^2 = 10 \text{ m} \end{aligned}\right.$$

$$t = 4 \text{ s} \quad \left| \begin{aligned} & v = 15 - 10 \times 4 = -25 \text{ m/s} \ \text{(bajando)} \\ & h = 15 \times 4 - \frac{1}{2} 10 \times 16 = -20 \text{ m} \end{aligned}\right.$$

$$v = 0 \quad \left| \begin{aligned} & 15 = 10t \ \Rightarrow \ t = \frac{3}{2} \text{ s} \\ & h = \frac{1}{2} 10 \frac{9}{4} = \frac{45}{4} \text{ m} \end{aligned}\right.$$

$$h = 8 \text{ m} \quad \left| \begin{aligned} & 8 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \left| \begin{aligned} t_1 &= 0{,}7 \text{ s} \\ t_2 &= 2{,}3 \text{ s} \end{aligned}\right. \\ & v_1 = 15 - 10 \times 0{,}7 = \ \ 8 \text{ m/s} \\ & v_2 = 15 - 10 \times 2{,}3 = -8 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

$$h = 0 \quad \left| \begin{aligned} & 0 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \left| \begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_2 &= 3 \text{ s} \end{aligned}\right. \\ & v_1 = 15 - 0 \times 10 = \ \ 15 \text{ m/s} \\ & v_2 = 15 - 3 \times 10 = -15 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

$$h = -100 \text{ m} \quad \left| \begin{aligned} & -100 = 15t - \frac{1}{2} 10t^2 \quad \Rightarrow \quad t \simeq 6{,}2 \text{ s} \\ & v = 15 - 10 \times 6{,}2 = -47 \text{ m/s} \end{aligned}\right.$$

Problema 10. Una piedra que cae libremente y pasa a las 10^h, frente a un observador situado a 300 m sobre el suelo, y a las $10^h\ 2^s$ frente a un observador situado a 200 m sobre el suelo. Se pide calcular:

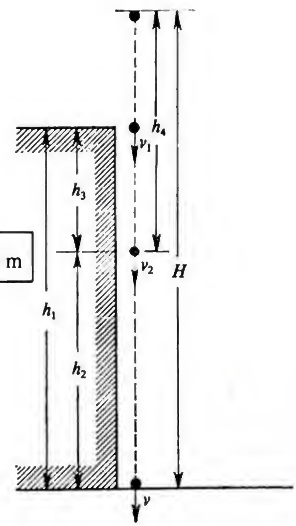
1. La altura desde la que cae.
2. En qué momento llegará al suelo.
3. La velocidad con que llegará al suelo.

Solución

$$\begin{array}{l|l} h_1 = 300 \text{ m} & t_1 = 2 \text{ s} \\ h_2 = 200 \text{ m} & g = 10 \text{ m/s}^2 \\ h_3 = 100 \text{ m} & \end{array}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = v_1 + g t_1 \\ h_3 = v_1 t_1 + \dfrac{1}{2} g t_1^2 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2g} \\ H = h_2 + h_4 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_2 = v_1 + 10 \times 2 \\ 100 = 2 v_1 + \dfrac{1}{2}\, 10 \times 4 \\ h_4 = \dfrac{v_2^2}{2 \times 10} \end{array} \left| \begin{array}{l} v_1 = 40 \text{ m/s} \\ v_2 = 60 \text{ m/s} \\ h_4 = 180 \text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{H = 200 + 180 = 380 \text{ m}}$$



Problema V-10

2) Llamando t_2 al tiempo que tarda en recorrer h_1:

$$h_1 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 300 = 40 t_2 + \frac{1}{2}\, 10 t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 \simeq 5 \text{ s}$$

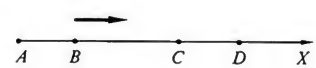
$\boxed{\text{Luego llega al suelo a las } 10^h\ 5^s}$

3)

$$\boxed{v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \times 10 \times 380} \simeq 87 \text{ m/s}}$$

Problema 11. Un móvil parte del reposo y de un punto *A*, con movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado ($a = 10$ cm/s²); tarda en recorrer una distancia $BC = 105$ cm un tiempo de 3 s, y, finalmente, llega al punto *D* ($CD = 55$ cm). Calcular:

1. La velocidad del móvil en los puntos *B*, *C* y *D*.
2. La distancia *AB*.
3. El tiempo invertido en el recorrido *AB* y en el *CD*.
4. El tiempo total en el recorrido *AD*.



Problema V-11

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} BC = v_B t + \dfrac{1}{2} a t^2 \\ 105 = v_B\, 3 + \dfrac{1}{2}\, 10 \times 9 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_B = 20 \text{ cm/s}}$$

$$\boxed{v_C = v_B + at = 20 + 30 = 50 \text{ cm/s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} CD = v_C t + \dfrac{1}{2} at^2 \\ 55 = 50t + \dfrac{1}{2} 10t^2 \end{array}\right| \quad t^2 + 10t - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1 \text{ s}}$$

$$\boxed{v_D = v_C + at = 50 + 10 = 60 \text{ cm/s}}$$

2)

$$v_B = \sqrt{2aAB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{AB = v_B^2 / 2a = 400 / 20 = 20 \text{ cm}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} v_B = at \\ 20 = 10t \end{array}\right| \quad \boxed{t = \dfrac{20}{10} = 2 \text{ s}}$$

4) Será la suma de los tiempos parciales:

$$\boxed{t = 2 + 3 + 1 = 6 \text{ s}}$$

Problema 12. Determinar la profundidad de un pozo si el sonido producido por una piedra que se suelta en su brocal, al chocar con el fondo se oye 2 s después. (Velocidad del sonido, 340 m/s).

Solución

t_1: tiempo de bajada de la piedra. t_2: tiempo de subida del sonido. h: profundidad del pozo.

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{1}{2} g t_1^2 = 4{,}9\ t_1^2 \\ h = v t_2 = 340\, t_2 \\ t_1 + t_2 = 2 \text{ s} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 18{,}5 \text{ m}}$$

Problema 13. Un automóvil arranca de un punto y transcurridos 5 s alcanza la velocidad de 108 km/h desde cuyo momento la conserva, hasta que a los 2 minutos de alcanzarla, frena hasta pararse al producirle los frenos una deceleración de 10 m/s^2. Calcular el tiempo transcurrido y el espacio recorrido desde que arranca hasta que se para.

Solución

$v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s}$ $\qquad t_1 = 5 \text{ s}$ $\qquad t_2 = 2 \times 60 \text{ s} = 120 \text{ s}$

$$v = |a_3|\, t_3 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{30}{10} = 3 \text{ s} \qquad \boxed{t = t_1 + t_2 + t_3 = 128 \text{ s} = 2^{\text{min}}\ 8^{\text{s}}}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} v t_1 = \frac{1}{2} 30 \times 5 = 75 \text{ m}$$

$$s_2 = v t_2 = 30 \times 120 = 3600 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{2\,|a_3|\, s_3} \quad \Rightarrow \quad s_3 = \frac{v^2}{2\,|a_3|} = \frac{900}{2 \times 10} = 45 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = s_1 + s_2 + s_3 = 3720 \text{ m}}$$

Problema 14. Un móvil parte de un punto con una velocidad de 110 cm/s y recorre una trayectoria rectilínea con aceleración de -10 cm/s². Calcular el tiempo que tardará en pasar por un punto que dista 105 cm del punto de partida. (Interpretar físicamente las dos soluciones que se obtienen).

Solución

La ecuación del movimiento es:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad 105 = 110 t - \frac{1}{2} 10 t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 22 t + 21 = 0$$

$$\boxed{t_1 = 21 \text{ s}} \qquad \boxed{t_2 = 1 \text{ s}}$$

t_2 representa el tiempo que tarda el móvil en recorrer los 105 primeros cm.

t_1 representa el tiempo que tarda el móvil en pararse por su movimiento retardado y retrocediendo luego con movimiento acelerado llegar de nuevo al punto que dista del origen 105 cm.

Problema 15. Una partícula se mueve sobre una recta con un movimiento uniformemente variado. En los instantes 1, 2, 3 s, las distancias al origen de espacios son: 70, 90, 100 m. Calcular la velocidad inicial del móvil, su aceleración y el momento de su paso por el origen de espacios.

Solución

$$70 = s_0 + v_0 + \frac{1}{2} a \qquad s_0 = 40 \text{ m}$$

$$90 = s_0 + 2 v_0 + \frac{1}{2} a 4 \qquad \boxed{v_0 = 35 \text{ m/s}}$$

$$100 = s_0 + 3 v_0 + \frac{1}{2} a 9 \qquad \boxed{a = -10 \text{ m/s}^2}$$

$$0 = 40 + 35 t - \frac{1}{2} 10 t^2 \qquad \boxed{t_1 = 8 \text{ s}}$$

$$t^2 - 7 t - 8 = 0 \qquad \boxed{t_2 = -1 \text{ s}}$$

El móvil pasó por el origen, 1 s antes de comenzar a contar el tiempo, avanza con movimiento *decelerado* se para, retrocede y a los 8 segundos de empezar a cronometrar pasa de nuevo por el origen.

Problema 16. Hallar las fórmulas de un movimiento uniformemente variado sabiendo que la aceleración es 8 cm/s², que la velocidad se anula para $t = 3$ s, y que el espacio se anula para $t = 11$ s.

Solución

$$0 = v_0 + 8 \times 3 \quad \Rightarrow \quad v_0 = -24 \text{ cm/s}$$

$$0 = s_0 - 24 \times 11 + \frac{1}{2} 8 \times 121 \quad \Rightarrow \quad s_0 = -220 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = -200 - 24t + 4t^2} \qquad \boxed{v = -24 + 8t}$$

Problema 17. La expresión que nos determina la velocidad de un punto móvil en el sistema CGS es: $v = 12 + 4t$. Sabiendo que el móvil inició su movimiento partiendo del reposo y desde el origen de coordenadas, en un instante anterior al origen de los tiempos, calcular:

1. La velocidad inicial.
2. La aceleración.
3. ¿Qué clase de movimiento es?
4. El espacio inicial.
5. La ecuación del espacio en función del tiempo.

Solución

1) Para calcular la velocidad inicial haremos $t = 0$:

$$\boxed{v_0 = 12 \text{ cm/s}}$$

2)

$$\boxed{a = dv / dt = 4 \text{ cm/s}^2}$$

3) El movimiento es uniformemente acelerado (a = constante).

4) El espacio inicial ha sido recorrido con movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo y alcanzando una velocidad $v_0 = 12$ cm/s:

$$v_0 = \sqrt{2 a s_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s_0 = v_0^2 / 2a = 144 / 8 = 18 \text{ cm}}$$

5)

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 18 + 12t + 2t^2}$$

Problema 18. La velocidad de un punto que se mueve en trayectoria recta queda expresada en el SI por la ecuación: $v = 40 - 8t$. Para $t = 2$ s el punto dista del origen 80 m. Determinar:

1. La expresión general de la distancia al origen.
2. El espacio inicial.
3. La aceleración.
4. ¿En qué instante tiene el móvil velocidad nula?

5. ¿Cuánto dista del origen en tal instante?
6. Distancia al origen y espacio recorrido sobre la trayectoria a partir de $t = 0$, cuando $t = 7$ s, $t = 10$ s, y $t = 15$ s.

Solución

1)
$$s = \int v\,dt = \int (40 - 8t)\,dt = 40t - 4t^2 + C \qquad \boxed{s = s_0 + 40t - 4t^2}$$

2)
$$80 = s_0 + 80 - 16 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{s_0 = 16 \text{ m}}$$

3)
$$\boxed{a = dv / dt = -8 \text{ m/s}^2}$$

4)
$$0 = 40 - 8t \qquad \boxed{t = 5 \text{ s}}$$

5)
$$\boxed{s_5 = 16 + 40 \times 5 - 4 \times 5^2 = 116 \text{ m}}$$

6)
$$s_7 = 16 + 40 \times 7 - 4 \times 7^2 = 100 \text{ m}$$
$$s_{10} = 16 + 40 \times 10 - 4 \times 10^2 = 16 \text{ m}$$
$$s_{15} = 16 + 40 \times 15 - 4 \times 15^2 = -284 \text{ m}$$

Cálculo de caminos sobre la trayectoria a partir de $t = 0$.
El móvil cambia el sentido de su velocidad para $t = 5$ s.
El recorrido en los 5 primeros segundos es: $C = 40t - 4t^2 = 100$ m
A ellos hay que sumar el recorrido en los segundos restantes que se obtienen de la integral de la ecuación general de la velocidad, cambiada de signo, entre los límites $t = 5$ s y $t =$ instante final.

$$\boxed{\begin{aligned} C_7 &= 100 - \int_5^7 (40 - 8t)\,dt = 116 \text{ m} \\ C_{10} &= 100 - \int_5^{10} (40 - 8t)\,dt = 200 \text{ m} \\ C_{15} &= 100 - \int_5^{15} (40 - 8t)\,dt = 500 \text{ m} \end{aligned}}$$

Problema 19. Demostrar que todo movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado obedece a la ecuación: $v^2 = v_0^2 + 2as$

Solución

1.^{er} MÉTODO:
Teóricamente se obtienen para ecuaciones cinemáticas de este movimiento las fórmulas:

$$v = v_0 + at$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

despejando t en la primera y sustituyendo en la segunda nos queda:

$$t = \frac{v - v_0}{a} \quad \Rightarrow \quad s = v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left[\frac{v - v_0}{a} \right]^2$$

$$2sa = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 + v_0^2 - 2vv_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$$

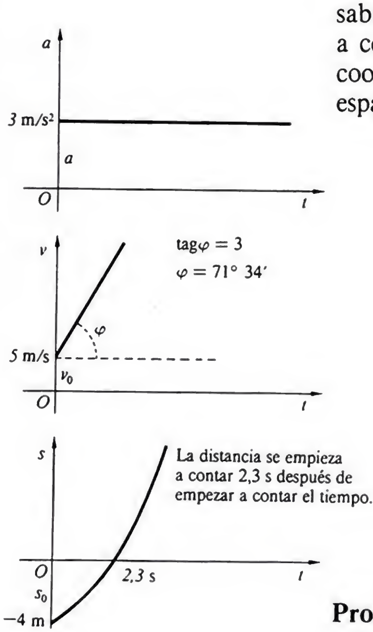
2.º MÉTODO:
Las ecuaciones diferenciales de todo movimiento rectilíneo son:

$$v = ds / dt \qquad\qquad a = dv / dt$$

despejando dt en la primera y sustituyendo en la segunda nos queda: $v\ dv = a\ ds$ ecuación diferencial característica de los movimientos rectilíneos. Integrando y teniendo en cuenta que $a = \text{ct}^{\text{e}}$:

$$\frac{1}{2} v^2 = as + C \quad \left| \begin{array}{c} t = 0 \\ s = 0 \end{array} \right| \quad C = \frac{1}{2} v_0^2$$

con v_0 velocidad inicial. Luego: $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2as}$



Problema V-20

Problema 20. Determinar las constantes de un movimiento uniformemente variado, sabiendo que el móvil tiene una velocidad de 17 m/s a los 4 s de haber comenzado a contar el tiempo, y que en los tiempos $t_1 = 2$ s y $t_2 = 4$ s. dista del origen de coordenadas 12 m y 40 m, respectivamente. Representar gráficamente las curvas de espacios, velocidades y aceleraciones.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} 17 = v_0 + 4a \\ 12 = s_0 + 2v_0 + \frac{1}{2} a 4 \\ 40 = s_0 + 4v_0 + \frac{1}{2} a 16 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \boxed{s_0 = -4 \text{ m}} \\ \boxed{v_0 = 5 \text{ m/s}} \\ \boxed{a = 3 \text{ m/s}^2} \end{array}$$

Las ecuaciones horarias escritas en el SI serán:

$$a = 3 \text{ m/s} \qquad v = 5 + 3t \qquad s = -4 + 5t + 1{,}5t^2$$

cuyas representaciones gráficas son las de las Fig.

Problema 21. Trazar la curva de los espacios y la de las velocidades en el movimiento dado por la fórmula $s = 4 - 26t + 4t^2$ (GIORGI) y determinar los instantes para los cuales la velocidad y el espacio tienen el mismo valor numérico.

Solución

$$v = ds / dt = -26 + 8t$$

La curva: $s = s(t)$, es una parábola. Cálculo del máximo o mínimo:

$$ds / dt = -26 + 8t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = 3{,}25 \text{ s} \qquad\qquad s_m = -38{,}25 \text{ m}$$

$d^2s / dt^2 = 8 > 0$; el punto (3,25, −38,25) es un mínimo.

Cálculo de cortes con los ejes:
La parábola corta el eje de los espacios en: $s = 4$ m , para $t = 0$

La parábola corta al eje de los tiempos en las soluciones de la ecuación:

$$0 = 4 - 26t + 4t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = 0{,}16 \text{ s} \qquad\qquad t_2 = 6{,}34 \text{ s}$$

La función: $v = v(t)$, es una recta que corta al eje de los tiempos en la solución de la ecuación:

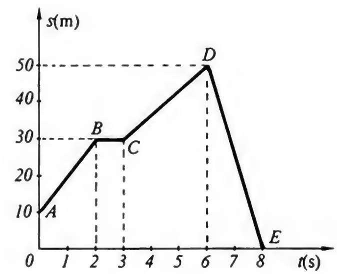
$$0 = -26 + 8t \qquad \Rightarrow \qquad t = 3{,}25 \text{ s}$$

corta al eje de las velocidades en: $v = -26$ m/s

(El alumno con tales datos, debe trazar los gráficos correspondientes.)
La velocidad y el espacio tendrán el mismo valor cuando:

$$4 - 26t + 4t^2 = -26 + 8t \qquad \Rightarrow \qquad 4t^2 - 34t + 30 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ s} \\ 7{,}50 \text{ s} \end{array} \right.$$

Problema 22. El gráfico de la Fig. nos representa el movimiento realizado por un móvil en trayectoría recta. Interpretar y clasificar su movimiento.



Problema V-22

Solución

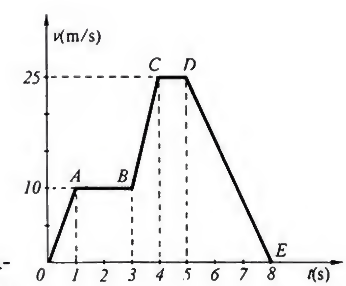
Tramo *AB.*—Su ecuación es: $s = 10 + 10t$
El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = 10$ m/s
el espacio inicial (para $t = 0$) vale $s_0 = 10$ m.

Tramo *BC.*—Su ecuación es: $s = 30$ m
El móvil está parado en el intervalo de tiempo de 2 a 3 s.

Tramo *CD.*—Su ecuación es: $s = 10 + \dfrac{20}{3}t$

El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = 20 / 3$ m/s
El móvil comienza este movimiento a los 3 s de partir y dista del origen de espacios 30 m.

Tramo *DE.*—Su ecuación es: $s = 200 - 25t$
El movimiento es uniforme de velocidad: $v = ds / dt = -25$ m/s
el signo menos nos indica que se mueve en sentido opuesto al llevado en los tramos anteriores, y en el instante $t = 8$ s se encuentra en el origen de los espacios.
El móvil comienza este movimiento a los 6 s de partir y dista del origen de espacios 50 m.



Problema V-23

Problema 23. El gráfico de la Fig. nos representa la velocidad de un móvil en trayectoria recta, en el que para $t = 0$, $s_0 = 0$. Determinar las ecuaciones del espacio y aceleración interpretando el movimiento que tiene en cada caso.

Tramo OA.—Su ecuación es: $v = 10t$

la ecuación del espacio: $s = \int v\,dt = \int 10t\,dt = 5t^2 + C_1$

y como para $t = 0$, $s = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$; luego: $\boxed{s = 5t^2}$

El movimiento es uniformemente acelerado de aceleración: $\boxed{a = dv / dt = 10 \text{ m/s}^2}$

Tramo AB.—Su ecuación es: $v = 10$ m/s

luego el *movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el primero al tercer segundo; la ecuación del espacio la calcularemos:

$$s = \int v\,dt = \int 10\,dt = 10t^2 + C_2$$

para calcular C_2 tendremos en cuenta que en el segundo anterior (Tramo OA) el móvil recorrió una distancia:

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s_{OA} = 5t^2 = 5 \text{ m}$$

luego:

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad 5 = 10 \times 1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -5 \text{ m}$$

$$\boxed{s = -5 + 10t}$$

Tramo BC.—Su ecuación es: $v = -35 + 15t$

téngase en cuenta que el móvil comienza éste movimiento cuando $t = 3$ s y su velocidad es $v = 10$ m/s en ese instante. La ecuación del espacio será:

$$s = \int v\,dt = \int (-35 + 15t)\,dt = -35t + \frac{15}{2}\, t^2 + C_3$$

para calcular C_3, tendremos en cuenta que el espacio recorrido hasta el tercer segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación del espacio del tramo AB $t = 3$ s:

$$s_{OB} = -5 + 10 \times 3 = 25 \text{ m}$$

luego: $25 = -35 \times 3 + 7{,}5 \times 9 + C_3 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 62{,}5$ m

$$\boxed{s = 62{,}5 - 35t + 7{,}5t^2}$$

téngase en cuenta que el móvil comienza a moverse cuando $t = 3$ s, entonces el espacio que ha recorrido antes es de 25 m.

El movimiento es uniformemente acelerado de aceleración: $\boxed{a = dv / dt = 15 \text{ m/s}^2}$

Tramo CD.—Su ecuación es: $v = 25$ m/s

luego *el movimiento es uniforme* ($a = 0$) desde el cuarto al quinto segundo; la ecuación del espacio la calcularemos:

$$s = \int v\,dt = \int 25\,dt = 25t + C_4$$

para calcular C_4, tendremos en cuenta que el espacio recorrido hasta el cuarto segundo se obtendrá sustituyendo en la ecuación del espacio del tramo BC, $t = 4$ s:

$$s_{OC} = 62{,}5 - 35 \times 4 + 7{,}5 \times 4^2 = 42{,}5 \text{ m}$$

luego: $42{,}5 = 25 \times 4 + C_4 \quad \Rightarrow \quad C_4 = -57{,}5$ m

$$\boxed{s = -57{,}5 + 25t}$$

Tramo *DE*.—Su ecuación es:

$$v = \frac{200}{3} - \frac{25}{3} t$$

la ecuación del espacio será:

$$s = \int v\,dt = \frac{200}{3} t - \frac{25}{6} t^2 + C_5$$

si sustituimos en la ecuación del espacio del tramo *CD*, t por 5 s, obtenemos:

$$s_{OD} = -57{,}5 + 25 \times 5 = 67{,}5 \text{ m}$$

luego:

$$67{,}5 = \frac{200}{3} 5 - \frac{25}{6} 25 + C_5 \qquad \Rightarrow \qquad C_5 = -\frac{485}{3} \text{ m}$$

$$\boxed{s = -\frac{485}{3} + \frac{200}{3} t - \frac{25}{6} t^2}$$

El movimiento es uniformemente decelerado y transcurridos 8 s el móvil llega al reposo; su deceleración es:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -\frac{25}{3} \text{ m/s}^2}$$

y dista del punto de partida: $t = 8 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad s = 105 \text{ m}$

B) MOVIMIENTOS SIMULTANEOS EN TRAYECTORIA RECTA

Problema 24. Dos móviles marchan en sentidos contrarios, dirigiéndose el uno al encuentro del otro con las velocidades de 4 y 5 cm/s respectivamente. Sabiendo que el encuentro tiene lugar a 1,52 m, de la posición de partida del primero, determinar la distancia entre los móviles al comenzar el movimiento y el tiempo transcurrido hasta que se encontraron.

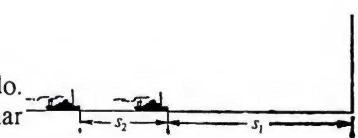
Solución

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = v_1 t \\ s_2 = v_2 t \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1{,}52}{s_2} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad s_2 = 1{,}9 \text{ m}$$

$$\boxed{t = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s_2}{v_2} = \frac{152}{4} = 38 \text{ s}}$$

La distancia entre los móviles al comenzar el movimiento será: $\boxed{s = s_1 + s_2 = 3{,}42 \text{ m}}$

Problema 25. Un acorazado se aleja de la costa, en la que hay un alto acantilado. A 680 m de la costa dispara un cañonazo; el eco es percibido 4,1 s después. Calcular la velocidad del acorazado. (Se supone para el sonido la velocidad de 340 m/s).



Problema V-25

Solución

Llamando c a la velocidad del sonido:

$$\left.\begin{aligned} 2s_1 + s_2 &= ct \\ s_2 &= vt \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad 2s_1 + vt = ct \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{ct - 2s_1}{t} = \frac{340 \times 4{,}1 - 2 \times 680}{4{,}1} = 8{,}3 \text{ m/s}}$$

Problema 26. Dos puntos materiales A y B se mueven con movimiento uniformemente acelerado partiendo del reposo; la aceleración de B es doble que la de A y el tiempo que emplea A en su trayectoria es triple que el de B. ¿Qué camino recorre B, con respecto al recorrido por A?

Solución

$$\left.\begin{aligned} s_B &= \frac{1}{2} a t^2 \\ s_A &= \frac{1}{2}\frac{a}{2} 9 t^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{s_B}{s_A} = \frac{2}{9}}$$

Problema 27. Un automóvil que está parado, arranca con una aceleración de 1,5 m/s². En el mismo momento es adelantado por un camión que lleva una velocidad constante de 15 m/s. Calcular:

1. Distancia contada desde el punto de cruce en la que alcanza el automóvil al camión.

2. Velocidad del automóvil en ese momento.

Solución

1) $$s = \frac{1}{2} a t^2 = vt \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{aligned} t &= 0 \\ t &= \frac{2v}{a} = \frac{30}{1{,}5} = 20 \text{ s} \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{s = 15 \times 20 = 300 \text{ m}}$$

2) $$\boxed{v = at = 1{,}5 \times 20 = 30 \text{ m/s}}$$

Problema 28. Un automóvil y un camión parten en el mismo momento, inicialmente el coche se encuentra a una cierta distancia del camión; si el coche tiene una aceleración de 3 m/s² y el camión de 2 m/s² y el coche alcanza al camión cuando este último ha recorrido 60 m. Calcular:

1. Distancia inicial entre ambos.

2. Velocidad de cada uno en el momento del encuentro.

Solución

1) $$s_C = \frac{1}{2} a_C t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 s_C}{a_C}} = \sqrt{\frac{2 \times 60}{2}} = 2\sqrt{15} \text{ s}$$

$$s_A = \frac{1}{2}\, a_A t^2 = \frac{1}{2}\, 3 \times 60 = 90 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = s_A - s_C = 30 \text{ m}}$$

2) $$\boxed{v_A = a_A t = 6\sqrt{15} \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_C = a_C t = 4\sqrt{15} \text{ m/s}}$$

Problema 29. Dos cuerpos *A* y *B* situados a 2 km de distancia salen simultáneamente en la misma dirección ambos con movimiento uniformemente acelerado, siendo la aceleración del más lento, el *B*, de 0,32 cm/s². Deben encontrarse a 3,025 km. de distancia del punto de partida de cuerpo *B*. Calcular el tiempo que invertirán en ello y cuál será la aceleración de *A*, así como las velocidades de los dos en el momento de encontrarse.

Solución

$$s_B = 302\,500 = \frac{1}{2}\; 0{,}32\, t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 1\,375 \text{ s}}$$

$$s_A = 502\,500 \text{ cm} = \frac{1}{2} a_A t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_A = \frac{2 s_A}{t^2} \simeq 0{,}53 \text{ cm/s}^2}$$

$$\boxed{v_A = a_A t \simeq 728 \text{ cm/s} \simeq 7{,}28 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_B = a_B t = 440 \text{ cm/s} = 4{,}4 \text{ m/s}}$$

Problema 30. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende con una velocidad constante de 3 m/s, si llega al suelo a los 3 s. Calcular:

1. Altura a que se encontraba el globo cuando se soltó la piedra.
2. Distancia globo-piedra a los 2 s del lanzamiento.

Solución

Tomaremos el origen de coordenadas en el punto en que se suelta la piedra. Magnitudes positivas son las que tienen dirección hacia arriba.

1)
$$\left.\begin{array}{l} v_0 = 3 \text{ m/s} \\ g = -10 \text{ m/s}^2 \\ t = 3 \text{ s} \end{array}\right| \qquad \boxed{h = v_0 t + \frac{1}{2}\, g t^2 = 3 \times 3 - \frac{1}{2}\; 10 \times 9 = -36 \text{ m}}$$

2) $t' = 2$ s. h_1 : espacio recorrido por el globo en t'. h_2 : espacio recorrido por la piedra en t'.

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = v_0 t' = 3 \times 2 = 6 \text{ m} \\ h_2 = v_0 t' + \frac{1}{2}\, g t'^2 = 3 \times 2 - \frac{1}{2}\; 10 \times 4 = -14 \text{ m} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 6 + 14 = 20 \text{ m}}$$

Problema 31. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 30 m/s. ¿Qué intervalo de tiempo tiene que haber entre los dos lanzamientos para que los dos lleguen a la vez al suelo?

Solución

El tiempo que tarda el primero en llegar al suelo se calcula:

$$h = 0 = v_{01} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad 50 t_1 - 5 t_1^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 10 \text{ s}$$

El tiempo del segundo será:

$$h = 0 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad 30 t_2 - 5 t_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 6 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = t_1 - t_2 = 4 \text{ s}}$$

Problema 32. Dos proyectiles se lanzan verticalmente de abajo a arriba con dos segundos de intervalo, el primero con una velocidad inicial de 50 m/s y el segundo con la velocidad inicial de 80 m/s. ¿Cuál será el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentren a la misma altura? ¿A qué altura sucederá? ¿Qué velocidad tendrá cada uno en ese momento?

Solución

$$h = 50t - 4{,}9t^2 = 80(t-2) - 4{,}9\,(t-2)^2$$

$$50t - 4{,}9\,t^2 = 80t - 160 - 4{,}9t^2 - 4{,}9 \times 4 + 2 \times 4{,}9 \times 2t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t \simeq 3{,}62 \text{ s}}$$

$$\boxed{h \simeq 50 \times 3{,}62 - 4{,}9 \times 3{,}62^2 = 116{,}8 \text{ m}}$$

$$\boxed{v_1 \simeq 50 - 9{,}8 \times 3{,}62 = 14{,}5 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_2 \simeq 80 - 9{,}8 \times 1{,}62 = 64{,}1 \text{ m/s}}$$

Problema 33. La cabina de un ascensor de altura 3 m asciende con una aceleración de 1 m/s². Cuando el ascensor se encuentra a una cierta altura del suelo, se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en chocar con el suelo del ascensor.

Solución

1.^er^ MÉTODO

En el instante de caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical y hacia arriba v. El espacio vertical y hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

$$h - \left(vt + \frac{1}{2} at^2 \right)$$

(h = altura del ascensor) y ($vt + at^2/2$) ascenso del suelo de éste. La lámpara al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

siendo positivas la magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes, tendremos:

$$-h + vt + \frac{1}{2} at^2 = vt - \frac{1}{2} gt^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{9{,}8 + 1}} \text{ s} = 0{,}74 \text{ s}}$$

2.º MÉTODO

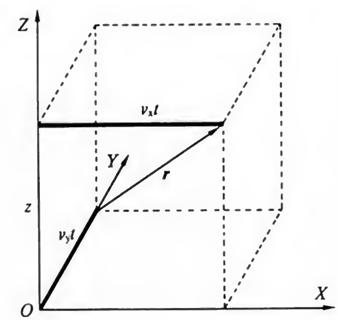
La aceleración de la lámpara respecto al ascensor, considerando magnitudes positivas hacia abajo, es:

$$a_{BA} = a_B - a_A = 9{,}8 - (-1) = 10{,}8\ \text{m/s}^2$$

$$h = \frac{1}{2}\, a_{BA} t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a_{BA}}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{10{,}8}} = 0{,}74\ \text{s}}$$

Problema 34. Dos carreteras se cruzan bajo un ángulo de 90° por medio de un puente. Ambas carreteras están situadas en planos horizontales. La altura del puente (distancia vertical entre ambas carreteras) es de 11 m. Por la superior circula un coche a la velocidad de 4 m/s, y por la inferior otro a la velocidad de 3 m/s. Cuando el primer coche se encuentra en el centro del puente, el segundo se encuentra exactamente debajo de él. Determinar:

1. La distancia que los separa al cabo de 12 s. de haberse cruzado.
2. La velocidad con que se separan al cabo de estos 12 s.
3. Valor de la acelaración en este momento.



Problema V-34

Solución

$$\boldsymbol{r} = v_x t\,\boldsymbol{i} - v_y t\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = 4t\,\boldsymbol{i} - 3t\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k}\ \text{m}$$

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = 4\,\boldsymbol{i} - 3\,\boldsymbol{j}\ \text{m/s}$$

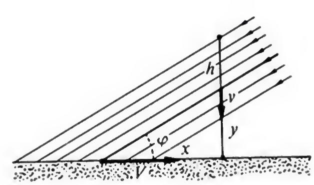
$$\boldsymbol{a} = 0$$

$$t = 12\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{r} = 48\,\boldsymbol{i} - 36\,\boldsymbol{j} + 11\,\boldsymbol{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{48^2 + 36^2 + 11^2} = 61\ \text{m}} \qquad \boxed{v = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ \text{m/s}} \qquad \boxed{a = 0}$$

Problema 35. A una cierta hora del día los rayos solares inciden sobre un lugar con un ángulo φ con la horizontal; dejamos caer libremente un cuerpo desde una altura h sobre un terreno horizontal. Calcular la velocidad de la sombra cuando el cuerpo se encuentra a una altura y del suelo.

Solución



Problema V-35

Al ser:

$$x = \frac{y}{\text{tag}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\text{tag}\varphi}\,\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\text{tag}\varphi}\, v$$

por otro lado, la velocidad del cuerpo cuando ha recorrido un espacio $h - y$ es:

$$v = \sqrt{2g\,(h-y)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\sqrt{2g\,(h-y)}}{\text{tag}\varphi}}$$

C) MOVIMIENTOS CIRCULARES

FORMULARIO

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$s = \varphi R \qquad v = \omega R \qquad a_\tau = \alpha R$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}^\circ$$

$$T = \frac{1}{\nu} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2}R = 4\pi^2\nu^2 R$$

Las ecuaciones de los movimientos circulares uniforme y uniformemente acelerado, son las mismas que las de los lineales de un punto, haciendo las siguientes sustituciones:

s (espacio)	φ (ángulo)
v (velocidad tangencial)	ω (velocidad angular)
a (aceleración tangencial)	α (aceleración angular)

Problema 36. Un volante gira con una velocidad angular de 50 rad/s. Calcular:
1. La velocidad de un punto de periferia sabiendo que su radio es $R = 1$ m.
2. Calcular la velocidad de un punto colocado a una distancia de 0,5 m del centro.
3. Espacio recorrido por ambos puntos materiales en el tiempo de 1 min.

Solución

1) $\boxed{v = \omega R = 50 \times 1 = 50 \text{ m/s}}$

2) $\boxed{v' = \omega R' = 50 \times 0{,}5 = 25 \text{ m/s}}$

3) $\boxed{s = v\, t = 50 \times 60 = 3\,000 \text{ m}}$

$\boxed{s' = v' t = 25 \times 60 = 1\,500 \text{ m}}$

Problema 37. Un disco gira con una velocidad angular de 60 rpm. Si su radio es 1 m. Calcular:
1. Velocidad angular en rad/s.
2. Velocidad lineal de un punto de la periferia y de un punto a 50 cm de su centro.
3. Número de vueltas que da en 1/2 h.

Solución

1) $\nu = 60 \text{ rpm} = 1 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 2\pi\nu = 2\pi \text{ rad/s}}$

2) $\boxed{v = \omega R = 2\pi \text{ m/s}} \qquad \boxed{v' = \omega R' = \pi \text{ m/s}}$

3) $$\boxed{n^{\text{o}} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{2\pi \times 30 \times 60}{2\pi} = 1\,800 \text{ vueltas}}$$

Problema 38. Calcular la velocidad angular de cualquier punto de la Tierra en su movimiento de rotación alrededor del eje terrestre. Expresar el resultado en grados/hora, en segundos de arco/hora y en segundos de arco/segundo.

Solución

$$\boxed{\omega = \frac{360}{24} = 15°/\text{h}} \quad \boxed{\omega = \frac{15 \times 60 \times 60 \text{ segundos de arco}}{1 \text{ hora}} = 54\,000''/\text{h}} \quad \boxed{\omega = \frac{15 \times 60 \times 60 \text{ segundos de arco}}{60 \times 60 \text{ segundos tiempo}} = 15''/\text{s}}$$

Problema 39. Calcular la velocidad tangencial y la aceleración normal de un punto sobre la Tierra situado en un lugar de 60° de latitud. (Radio terrestre = 6 300 km).

Solución

$$\omega = \frac{2\pi}{24} \text{ rad/h}$$

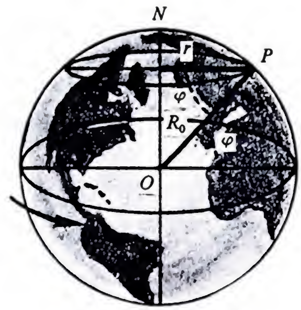
llamando r al radio del paralelo de latitud φ, su relación con el radio terrestre R_0 es:

$$r = R_0 \cos\varphi$$

con lo que:

$$\boxed{v = \omega r = \omega R_0 \cos\varphi = \frac{2\pi}{24}\, 6\,300\, \frac{1}{2} \simeq 824 \text{ km/h}}$$

$$\boxed{a_n = \omega^2 r = \omega^2 R_0 \cos\varphi = \frac{4\pi^2}{24^2}\, 6\,300\, \frac{1}{2} \simeq 216 \text{ km/h}^2}$$



Problema V-39

Problema 40. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de radio 1 m, dando 30 vueltas cada minuto. Calcular el período, la frecuencia, la velocidad angular, la tangencial, la areolar y la aceleración centrípeta.

Solución

1) $$\left.\begin{array}{l} 60 \text{ s} - 30 \text{ vueltas} \\ T - 1 \text{ vuelta} \end{array}\right| \Rightarrow T = \frac{60}{30} = 2 \text{ s}$$

2) $$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ Hz}$$

3) $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

4) $$v = \omega R = \pi \text{ m/s}$$

5) $$V_a = \pi R^2 \nu = 0{,}5\,\pi \text{ m}^2/\text{s}$$

6) $$a_n = \omega^2 R = \pi^2 \text{ m/s}^2$$

Problema 41. Un volante parte del reposo y en 5 s adquiere una velocidad angular de 40 rad/s. Calcular su aceleración angular, supuesta constante y el número de vueltas que ha efectuado.

Solución

$$\omega = \alpha t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{40}{5} = 8 \text{ rad/s}^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\ 8 \times 5^2 = 100 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{\circ} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} = \frac{50}{\pi} \text{ vueltas}}$$

Problema 42. Un volante de 2 dm de diámetro gira en torno a su eje a 3000 rpm. Un freno lo para en 20 s. Calcular:

1. La aceleración angular supuesta constante.
2. Número de vueltas dadas por el volante hasta que se para.
3. El módulo de la aceleración tangencial, normal y total de un punto de su periferia una vez dadas 100 vueltas.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \omega_0 = |\alpha| t \quad \Rightarrow \quad |\alpha| = \dfrac{\omega_0}{t} \\ \omega_0 = 2\pi\nu = 2\pi\ \dfrac{3000}{60} = 100\pi \text{ rad/s} \end{array}\right| \Rightarrow \quad |\alpha| = \frac{100\pi}{20} = 5\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\boxed{\alpha = -5\pi \text{ rad/s}^2}$$

2)

$$\omega_0 = \sqrt{2|\alpha|\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{10^4\pi^2}{10\pi} = 10^3\pi \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{\circ} = \frac{10^3\pi}{2\pi} = 500 \text{ vueltas}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \varphi = 200\pi \text{ rad} \end{array}\right| \Rightarrow \quad 200\pi = 100\pi t - \frac{1}{2}5\pi t^2 \quad \Rightarrow$$

$$t^2 - 40t + 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t \simeq 37{,}9 \text{ s} > 20 \text{ s (no sirve)} \\ t \simeq 2{,}1 \text{ s} \end{array}\right.$$

La velocidad angular a los 2,1 s de aplicado el freno es:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 100\pi - 5\pi 2{,}1 = 89{,}5\pi \text{ rad/s}$$

luego:

$$\boxed{a_\tau = \alpha R = 5\pi 0{,}1 = 0{,}5\pi \text{ m/s}^2} \quad \boxed{a_n = \omega^2 R = 89{,}5^2\pi^2 0{,}1 \simeq 800\pi^2 \text{ m/s}^2} \quad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \simeq 801\pi^2 \text{ m/s}^2}$$

Problema 43. La velocidad angular de un volante, disminuye uniformemente desde 900 a 800 rpm en 5 s. Encontrar:

1. La aceleración angular.
2. El número de revoluciones efectuado por el volante en el intervalo de 5 s.
3. ¿Cuántos segundos más serán necesarios para que el volante se detenga?

Solución

1)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad 2\pi\nu = 2\pi\nu_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2\pi\,(\nu - \nu_0)}{t} = -\frac{2}{3}\pi\,\text{rad/s}^2}$$

2)

$$\boxed{n^{\varrho} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0 t + \alpha t^2/2}{2\pi} = \frac{2\pi\nu_0 t + \alpha t^2/2}{2\pi} \simeq 62{,}5 \text{ vueltas}}$$

3)

$$\omega = |\alpha|\, t' \quad \Rightarrow \quad \boxed{t' = \frac{2\pi\nu}{|\alpha|} = \frac{2\pi \times 800 \times 3}{60 \times 2\pi} = 40 \text{ s}}$$

Problema 44. Un automotor parte del reposo, en una vía circular de 400 m de radio, y va moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, hasta que a los 50 s de iniciada su marcha, alcanza la velocidad de 72 km/h, desde cuyo momento conserva tal velocidad. Hallar:

1. La aceleración tangencial en la primera etapa del movimiento.
2. La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida en ese tiempo, en el momento de cumplirse los 50 s.
3. La velocidad angular media en la primera etapa, y la velocidad angular a los 50 s.
4. Tiempo que tardará el automotor en dar cien vueltas al circuito.

Solución

$$72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

1)

$$v = a_\tau t \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{20}{50} = 0{,}4 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{400}{400} = 1 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}16 + 1} = 1{,}08 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}\, 20 \times 50 = 500 \text{ m}}$$

3)

$$\bar{v} = \bar{\omega} r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\omega} = \frac{\bar{v}}{r} = \frac{s}{tr} = \frac{500}{50 \times 400} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \text{ rad/s}}$$

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20} = 0{,}050 \text{ rad/s}}$$

4)

$$s = 2\pi r n = 2\pi \times 400 \times 100 = 80\,000\,\pi \text{ m}$$

En la primera etapa:

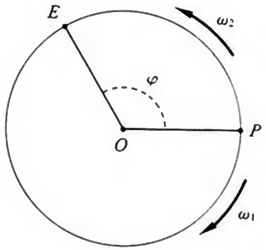
500 metros en 50 s

En la segunda etapa:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{80\,000\,\pi - 500}{20} = 12\,541 \text{ s}$$

En total el tiempo es: $\boxed{T = 50 + 12\,541 = 12\,591 \text{ s} = 3^{\text{h}}\, 29^{\text{min}}\, 51^{\text{s}}}$

Problema 45. Desde el mismo punto de una circunferencia parten dos móviles en sentidos opuestos. El primero recorre la circunferencia en $2^h\ 4^{min}$, el segundo recorre un arco de $6°\ 30'$ por minuto. Determinar en qué punto se encontrarán y el tiempo invertido.



Problema V-45

Solución

$$T_1 = 124 \text{ min} \qquad \left| \begin{array}{l} \omega_1 = \dfrac{360}{124}\ °/\text{min} \\ \omega_2 = 6{,}5°/\text{min} \end{array} \right| \begin{array}{l} \varphi = \dfrac{360}{124}\, t \\ 360 - \varphi = 6{,}5\, t \end{array} \right| \Rightarrow \qquad \frac{\varphi}{360-\varphi} = \frac{360}{124 \times 6{,}5}$$

$$\boxed{\varphi = 111°\ 9'} \qquad \boxed{t \simeq 38{,}3 \text{ min}}$$

Problema 46. Dos móviles parten simultáneamente del mismo punto y en el mismo sentido recorriendo una trayectoria circular. El primero está animado de movimiento uniforme de velocidad angular 2 rad/s y el segundo hace su recorrido con aceleración angular constante de valor 1 rad/s². ¿Cuánto tiempo tardarán en reunirse de nuevo y qué ángulo han descrito en tal instante? La circunferencia sobre la cual se mueven los móviles es de 2 m de radio. ¿Qué velocidad tiene cada uno de los móviles en el instante de la reunión? ¿Qué aceleración tangencial? ¿Qué aceleración normal? ¿Qué aceleración resultante y en qué dirección?

Solución

1) $$\begin{array}{l} \varphi = \omega t \\ \varphi = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \end{array} \left| \quad \omega t = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{dos soluciones} \quad \right| \begin{array}{l} \boxed{t = \dfrac{2\omega}{\alpha} = 4 \text{ s}} \\ t = 0 \qquad \text{(origen)} \end{array}$$

$$\boxed{\varphi = 2 \times 4 = 8 \text{ rad}}$$

2)

$$\boxed{v_1 = \omega_1 r = 2 \times 2 = 4 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_2 = \omega_2 r = \alpha t r = 1 \times 4 \times 2 = 8 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_{1\tau} = 0} \qquad \boxed{a_{1n} = \omega_1^2 r = 2^2 \times 2 = 8 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_1 = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{1n}} = \sqrt{0 + 64} = 8 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{a_{2\tau} = \alpha r = 1 \times 2 = 2 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_{2n} = \omega_2^2 r = 4^2 \times 2 = 32 \text{ m/s}^2} \qquad \boxed{a_2 = \sqrt{a^2_{1\tau} + a^2_{1n}} = \sqrt{2^2 + 32^2} = 2\sqrt{257} \text{ m/s}^2}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\beta = 3°\ 34'\ 35''} \qquad (\beta = \text{ángulo de } a_2 \text{ con } r).$$

Problema 47. Un móvil parte del reposo y del origen, recorre una trayectoria circular de 20 cm de radio, con una aceleración tangencial que viene dada el sistema CGS por la expresión: $a_\tau = 60\,t$. Determinar en módulo, dirección y sentido, la aceleración del móvil a los 2/3 s de iniciado el movimiento.

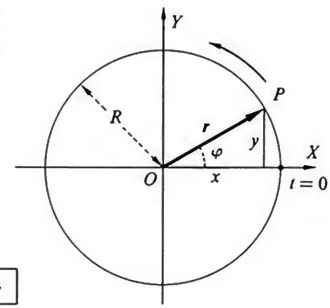
Solución

$$a_\tau = dv/dt \quad \Rightarrow \quad dv = a_\tau dt \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} v = \displaystyle\int 60\, t\, dt = 30\, t^2 + C \\ C = v_0 = 0 \end{array} \left| \quad v = 30\, t^2 \right.$$

$$\text{Si } t=\frac{2}{3}\text{ s:} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} a_\tau = 60\,\dfrac{2}{3} = 40 \text{ cm/s}^2 \\[2ex] a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(30t^2)^2}{20} = 45t^4 = \dfrac{80}{9} \text{ cm/s}^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 41 \text{ cm/s}^2}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = 77°\ 28'\ 16''}$$

Problema 48. Una partícula se mueve con movimiento circular y uniforme (ω = ct^{e}.) de radio R. Si tomamos el origen de un sistema de coordenadas en el centro de la circunferencia trayectoria; calcúlese el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración, poniendo este último en función del tiempo y del vector de posición. (El origen de los tiempos lo tomamos sobre el eje OX).



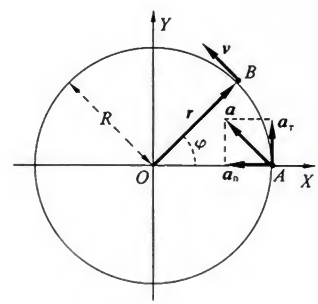
Problema V-48

Solución

$$\left. \begin{array}{l} x = R\cos\varphi \\ y = R\,\text{sen}\alpha \\ \varphi = \omega t \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = R\,(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \text{sen}\,\omega t\,\boldsymbol{j})}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = R\omega\,(-\text{sen}\omega t\,\boldsymbol{i} + \cos\omega t\,\boldsymbol{j})} \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = -R\omega^2\,(\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + \text{sen}\omega t\,\boldsymbol{j}) = -\omega^2\boldsymbol{r}}$$

Problema 49. Una partícula describe una circunferencia de 27 cm de radio, aumentando con el tiempo el valor de su velocidad, de una forma constante. En el punto A la velocidad es 9 cm/s; en el B, transcurridos 0,25 s es 10 cm/s. Calcular el vector aceleración en el punto A.



Problema V-49

Solución

Tomando los ejes de referencia como se indica en la Fig.:

$$\left. \begin{array}{l} a_x = a_n = -\dfrac{v_0^2}{R} = -\dfrac{9^2}{27} = -3 \text{ cm/s}^2 \\[2ex] a_y = a_\tau = \dfrac{v - v_0}{t} = \dfrac{10-9}{0{,}25} = 4 \text{ cm/s}^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} \text{ cm/s}^2}$$

Problema 50. Una partícula posee un movimiento circular y uniforme de 1 m de radio, dando 1 vuelta en 10 s. Calcular:

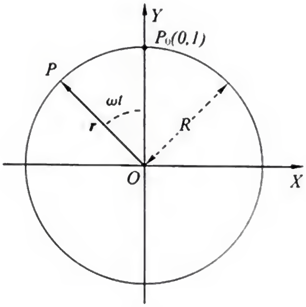
1. El vector de posición referido al centro de la trayectoria como origen si la partícula inicialmente se encuentra en el punto P_0 (0, 1) m.

2. El vector velocidad y aceleración a los 5 s de iniciado el movimiento.

3. Velocidad media en el intervalo de 5 s comprendido entre el quinto y décimo segundo.

Solución

$$\nu = \frac{1}{10}\text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$



Problema V-50

1) $$\boldsymbol{r} = R\,(-\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi t}{5} + \boldsymbol{j}\cos\frac{\pi t}{5}}$$

2) $$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -R\omega\,(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\omega t)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -R\omega^2(-\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t) = -R\omega^2\boldsymbol{r}$$

$t = 5$ s
$$\boldsymbol{v} = -\frac{\pi}{5}\,(\boldsymbol{i}\cos\pi + \boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\,\pi) = \frac{\pi}{5}\boldsymbol{i} \text{ m/s}$$
$$\boxed{\boldsymbol{a} = -\frac{\pi^2}{25}\,(-\boldsymbol{i}\,\mathrm{sen}\,\pi + \boldsymbol{j}\cos\pi) = \frac{\pi^2}{25}\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

3) El ángulo girado en 5 s cualquiera que sea el intervalo es: $\varphi = \omega t = \pi$ rad, al que corresponde un arco:

$$l = \varphi R = \pi \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{v} = \frac{l}{t} = \frac{\pi}{5} \text{ m/s}}$$

Problema 51. El vector de posición de una partícula que se mueve en trayectoria plana es: $\boldsymbol{r} = (5\cos\pi t - 1)\boldsymbol{i} + (5\,\mathrm{sen}\,\pi t + 2)\boldsymbol{j}$ (GIORGI).
1. Demuéstrese que el movimiento es circular y uniforme.
2. Calcular el radio de la circunferencia trayectoria.
3. Calcular la frecuencia de este movimiento.

Solución

1) Un movimiento circular y uniforme viene caracterizado porque los módulos de $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{a}_n$ son constantes y por tanto no existe $\boldsymbol{a}_\tau$.

$$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = -5\pi\,\mathrm{sen}\,\pi t\,\boldsymbol{i} + 5\pi\cos\pi t\,\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{25\pi^2\,(\mathrm{sen}^2\pi t + \cos^2\pi t)} = 5\pi \text{ m/s} \qquad \text{(constante)}$$

Si $v = \text{ct}^{\text{e}}$ $\quad \Rightarrow \quad a_\tau = dv/dt = 0$

luego:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n = d\boldsymbol{v}/dt = -5\pi^2\cos\pi t\,\boldsymbol{i} - 5\pi^2\,\mathrm{sen}\,\pi t\,\boldsymbol{j}$$

$$a_n = \sqrt{25\pi^4\,(\cos^2\pi t + \mathrm{sen}^2\pi t)} = 5\pi^2 \text{ m/s}^2 \qquad \text{(constante)}$$

2) $$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad 5\pi^2 = \frac{25\pi^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 5 \text{ m}}$$

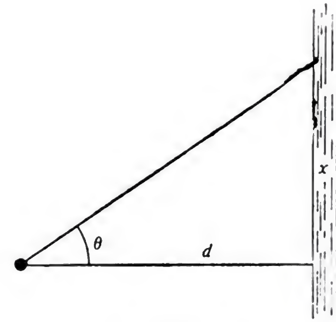
3) $$\left.\begin{array}{l} v = \omega R \\ \omega = 2\pi\nu \end{array}\right| \quad v = 2\pi\nu R \quad \Big| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{v}{2\pi R} = \frac{5\pi}{2\pi 5} = \frac{1}{2}\text{Hz}}$$

Problema 52. La velocidad de rotación de un faro luminoso es constante e igual a ω y está situado a una distancia d de una playa completamente recta. Calcular la velocidad y aceleración con que se desplaza el punto luminoso sobre la playa cuando el ángulo que forma d y el rayo es θ.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} \\ x = d\,\mathrm{tag}\theta \\ \dfrac{d\theta}{dt} = \omega \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \dfrac{\omega d}{\cos^2\theta}}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\,\omega^2 d\,\mathrm{sen}\theta}{\cos^3\theta}}$$



Problema V-52

D) COMPOSICION DE MOVIMIENTOS

FORMULARIO

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS EN LA MISMA DIRECCIÓN

PRIMER CASO.—*Dos movimientos uniformes producen un movimiento uniforme*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_1 + v_2)t$$

SEGUNDO CASO.—*Dos movimientos uniformente acelerados producen un movimiento uniformemente acelerado.*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_{01} + v_{02})t + \frac{1}{2}(a_1 + a_2)t^2$$

TERCER CASO.—*Un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado producen un movimiento uniformemente acelerado.*

$$s = s_1 + s_2 = (s_{01} + s_{02}) + (v_1 + v_{02})t + \frac{1}{2}at^2$$

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS PERPENDICULARES

PRIMER CASO.—*Dos movimientos uniformes.*

$$\left.\begin{array}{l} y = v_y t \\ x = v_x t \end{array}\right| \quad \frac{y}{x} = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_y}{v_x}x$$

trayectoria recta. El valor del módulo de la velocidad resultante es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

el movimiento es rectilíneo y uniforme de ecuación: $s = vt$

SEGUNDO CASO.—*Dos movimientos uniformemente acelerados partiendo del reposo.*

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad y = \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad \left| \qquad \frac{y}{x} = \frac{a_y}{a_x} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_y}{a_x} x \right.$$

trayectoria recta. El valor del módulo de la aceleración resultante es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

el movimiento es uniformemente acelerado de ecuación: $s = \frac{1}{2} a t^2$

TERCER CASO.—*Un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado.*

$$x = vt \qquad y = \frac{1}{2} at^2 \qquad \left| \qquad y = \frac{a}{2v^2} x^2 = K x^2 \right.$$

trayectoria parabólica.

TIRO HORIZONTAL:

$$v_x = v_0 \qquad v_y = gt \qquad \left| \qquad x = v_0 t \qquad y = \frac{1}{2} gt^2 \qquad \right| \qquad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = K x^2$$

TIRO OBLÍCUO:

$$v_x = v_0 \cos\varphi \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \qquad \left| \qquad x = v_0 t \cos\varphi \qquad y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \right.$$

$$y = x \operatorname{tag}\varphi - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\varphi} = Kx - K'x^2$$

$$x_{max} = \frac{v_0{}^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} \qquad\qquad y_{max} = \frac{v_0{}^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{2g}$$

Problema 53. Un nadador recorre una piscina de 100 m en 2 min. Va a nadar en un río observando antes de lanzarse al agua, que un trozo de madera que flota en ella recorre en 1 min 20 m. Calcular el tiempo que tardará el nadador en recorrer 100 m en el río, según vaya a favor o en contra de la corriente.

Solución

La velocidad del nadador es: $v = s / t = 100 / 2 = 50$ m/min

La velocidad del agua del río es: $v' = 20$ m/min

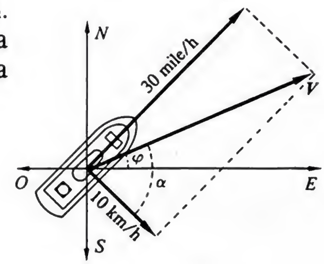
La velocidad, nadando a favor de la corriente, es: $v_1 = v + v' = 50 + 20 = 70$ m/min

Y el tiempo que tarda en recorrer 100 m es: $\boxed{t_1 = s / v_1 = 100 / 70 = 1^{min}\ 26^{s}}$

La velocidad, nadando en contra de la corriente, es: $v_2 = v - v' = 50 - 20 = 30$ m/min

Y el tiempo para recorrer 100 m: $\boxed{t_2 = 100 / 30 = 3^{min}\ 20^{s}}$

Problema 54. Un acorazado navega con rumbo NE a una velocidad de 30 mile/h. Suena zafarrancho de combate y uno de los tripulantes marcha corriendo de babor a estribor para ocupar su puesto, a una velocidad de 10 km/h. Calcular el valor de la velocidad resultante y su dirección.



Problema V-54

Solución

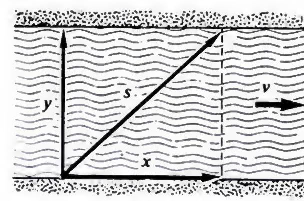
$$v = 30 \text{ mile/h} = 1{,}852 \times 30 = 55{,}56 \text{ km/h}$$

$$\boxed{V = \sqrt{55{,}56^2 + 10^2} = 56{,}45 \text{ km/h}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tag}\alpha = \dfrac{55{,}56}{10} \\ \varphi = \alpha - 45 \end{array}\right| \Rightarrow \quad \varphi = 34°\ 47'\ 49''$$

El «rumbo» será: $\boxed{90 - \varphi = 55°\ 12'\ 11''}$

Problema 55. Una pequeña lancha atraviesa un río de 50 m de anchura; al mismo tiempo la corriente le arrastra 60 m aguas abajo. ¿Qué camino ha recorrido?



Problema V-55

Solución

Si en la figura, y es la anchura del río y x el avance producido por la corriente, el camino recorrido por la lancha es s:

$$\boxed{s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{60^2 + 50^2} = 78{,}1 \text{ m}}$$

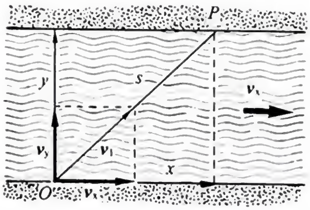
Problema 56. La velocidad que provocan unos remeros a una barca es de 8 km/h. La velocidad del agua de un río es 6 km/h, y la anchura del tal río 100 m.

1. Suponiendo la posición de la proa perpendicular a las orillas, calcular el tiempo que tarda la barca en cruzar el río y la distancia a que es arrastrada, aguas abajo, por la corriente.

2. ¿En qué dirección debe colocarse la proa de la barca para alcanzar el punto de la orilla opuesta situado enfrente del de partida? (punto de partida y llegada en la perpendicular común a las orillas).

3. ¿Qué velocidad, respecto a la tierra, lleva la barca en los dos casos estudiados?

4. ¿Cuánto tarda en atravesar el río?



Problema V-56-1.ª

Solución

1)

$v_x = 6$ km/h

$v_y = 8$ km/h

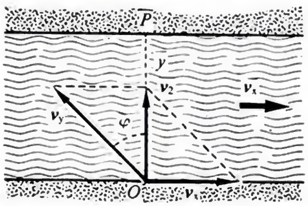
$$y = v_y t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{0,1}{8}\ \text{h} = 45\ \text{s}}$$

$$\boxed{x = v_x t = 6\,\frac{0,1}{8}\ \text{km} = 75\ \text{m}}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10\ \text{km/h}}$$

2) Para que la barca vaya en la dirección de v_2, la componente horizontal de v_y (Fig. 2.ª) ha de ser igual a 6 km/h:

$$v_y \operatorname{sen}\varphi = v_x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\varphi = \frac{6}{8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 48^\circ\ 35'}$$



Problema V-56-2.ª

3) En el 1.er caso son los 10 km/h ya calculados; en el 2.º:

$$\boxed{v_2 = v_y \cos\varphi = 8 \cos 48^\circ\ 35' = 5,3\ \text{km/h}}$$

4) En el 1.er caso son 45 s ya calculados; en el 2.º:

$$\boxed{t = \frac{y}{v_2} = \frac{0,1}{5,3}\ \text{h} = 68\ \text{s}}$$

Problema 57. Una canoa de 2,5 m de larga está junto a la orilla de un río y perpendicularmente a ella. Se pone en marcha con una velocidad de 5 m/s y al llegar a la orilla opuesta ha avanzado en el sentido de la corriente 23,4 m.

1. Calcular la velocidad del agua, sabiendo que el río tiene una anchura de 100 m.

2. Si la canoa marcha a lo largo del río, determinar el camino recorrido en 1 min según vaya en el sentido de la corriente o en sentido contrario.

Solución

1) La proa de la canoa debe recorrer un espacio en dirección perpendicular al río:

$$y = 100 - 2,5 = 97,5\ \text{m}$$

siendo:

$$y = v_c t = 5\,t = 97,5\ \text{m}$$

el río arrastra a la canoa:

$$x = 23,4\ \text{m} = v_r t$$

dividiendo las dos anteriores:

$$\frac{97,5}{23,4} = \frac{5}{v_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = 1,2\ \text{m/s}}$$

2)

$$v_1 = v_c + v_r = 5 + 1,2 = 6,2\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 6,2 \times 60 = 372\ \text{m}}$$

$$v_2 = v_c - v_r = 5 - 1,2 = 3,8\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2 = 3,8 \times 60 = 228\ \text{m}}$$

Problema 58. Un avión de bombardeo, en vuelo horizontal, a la velocidad de 360 km/h, y a una altura sobre un objetivo de 1 000 m, lanza una bomba.

1. ¿A qué distancia del objetivo inmóvil, contada horizontalmente, debe proceder al lanzamiento?
2. Si el objetivo es un camión que marcha en carretera horizontal, a 72 km/h en la misma recta que el bombardero ¿a qué distancia del objetivo, contada horizontalmente, se debe proceder al lanzamiento si el objetivo se acerca o se aleja?

Solución

1)

$$x = vt \qquad y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \boxed{x = v\sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{360\,000}{3\,600}\sqrt{\frac{2 \times 1\,000}{9{,}8}} = 1\,429 \text{ m}}$$

2)

$$x \mp v't = vt \qquad y = \frac{1}{2} g t^2 \qquad x = t\,(v \pm v') = \sqrt{\frac{2y}{g}}\,(v \pm v') = \sqrt{\frac{2 \times 1\,000}{9{,}8}}\,(360 \pm 72)\,\frac{1\,000}{3\,600} \text{ m}$$

$$\boxed{x_1 = 1\,714 \text{ m}} \qquad \boxed{x_2 = 1\,143 \text{ m}}$$

Problema 59. Un avión en vuelo horizontal, a velocidad constante de 500 km/h lanza tres bombas en intervalos de 3 s. Dibujar en un esquema la posición del avión y de las bombas a los 3 s de lanzar la tercera. Se supone nula la resistencia del aire.

Solución

Las tres bombas están en la misma vertical ya que el avance horizontal de las bombas y el avión es el mismo. La distancia horizontal, contada desde el punto en que se lanzó la primera es:

$$x = \frac{500\,000}{3\,600} 9 \text{ m} = 1\,250 \text{ m}$$

La primera recorre un camino vertical:

$$y_1 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 9^2 \text{ m} = 396{,}9 \text{ m}$$

la segunda:

$$y_2 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 6^2 \text{ m} = 176{,}4 \text{ m}$$

la tercera:

$$y_3 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 3^2 \text{ m} = 44{,}1 \text{ m}$$

Problema 60. Sobre la superficie de un lago, a 5 m sobre ella y horizontalmente, se dispara un proyectil, con una velocidad de 5 m/s. Determinar:
1. El tiempo que tarda el proyectil en introducirse en el agua
2. La distancia horizontal recorrida por el proyectil hasta que se introduce en el agua.
3. Valor de la tangente del ángulo que forma el vector velocidad con la horizontal en el momento que el proyectil se introduce en el lago.

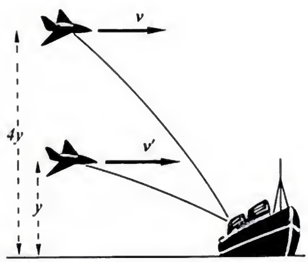
Solución

1)
$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}} = 1\ \text{s}}$$

2)
$$\boxed{x = v_0 t = 5 \times 1 = 5\ \text{m}}$$

3)
$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 = 5\ \text{m/s} \\ v_y = gt \simeq 10 \times 1 = 10\ \text{m/s} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \boxed{\text{tag}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 2}$$

Problema 61. Dos aviones están situados en la misma vertical; la altura sobre el suelo de uno de ellos es 4 veces mayor que la del otro. Pretenden bombardear el mismo objetivo. Siendo la velocidad del más alto v ¿qué velocidad debe llevar el más bajo?



Problema V-61

Solución

$$\left.\begin{array}{l} x = vt \\ 4y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right| \quad 4y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = v't' \\ y = \dfrac{1}{2} g t'^2 \end{array}\right| \quad y = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v'^2}$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \frac{v'^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = 2v}$$

Problema 62. Un avión en vuelo horizontal rectilíneo, a una altura de 7 840 m y con una velocidad de 450 km/h deja caer una bomba al pasar por la vertical de un punto A del suelo.

1. ¿Al cabo de cuánto tiempo se producirá la explosión de la bomba por choque con el suelo?

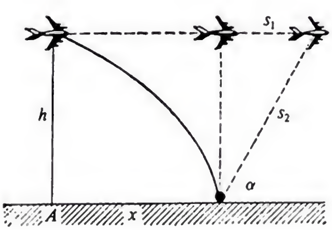
2. ¿Qué distancia habrá recorrido entre tanto el avión?

3. ¿A qué distancia del punto A se producirá la explosión?

4. ¿Cuánto tiempo tardará en oírse la explosión desde el avión, a contar desde el instante del lanzamiento de la bomba, si el sonido se propaga a 330 m/s

Solución

$$v_0 = 450\ \text{km/h} = 125\ \text{m/s}$$



Problema V-62

1)
$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 7840}{9{,}8}} = 40\ \text{s}}$$

2)
$$\boxed{x = v_0 t = 125 \times 40 = 5000\ \text{m}}$$

3) El mismo resultado que 2).

4) 1$^{\text{er}}$ Método

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = v_0 t' \\ s_2 = v t' \\ h^2 = s_2^2 - s_1^2 \end{array}\right| \quad h^2 = t'^2 [v^2 - v_0^2] \quad \Rightarrow \quad t' = \sqrt{\frac{h^2}{v^2 - v_0^2}} = \sqrt{\frac{7840^2}{330^2 - 125^2}} = 25{,}7\ \text{s}$$

$$\boxed{T = 40 + 25{,}7 = 65{,}7\ \text{s}}$$

2.º MÉTODO

La componente v_x de la velocidad del sonido ha de ser igual a v_0:

$$v_0 = v\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{v} = \frac{125}{330} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 67^\circ\ 44'\ 29''$$

con lo que:

$$v_y = v\,\text{sen}\alpha = \frac{h}{t'} \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{h}{v\,\text{sen}\alpha} = 25{,}7 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = t + t' = 65{,}7 \text{ s}}$$

Problema 63. Se dispara un cañón con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal, siendo la velocidad de salida 490 m/s. Calcular:

1. El alcance, la altura máxima y el tiempo necesario para tal avance y tal ascenso.

2. La posición del proyectil y la velocidad al cabo de 2 s del disparo

Solución

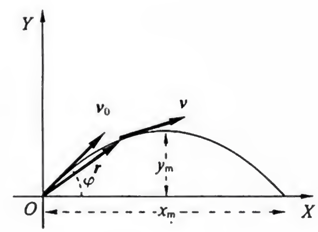
1) El tiempo para el alcance es la solución (no igual a cero) de la ecuación:

$$y = v_0 t\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2v_0\text{sen}\varphi}{g} = 70{,}7 \text{ s}}$$

$$\boxed{x_m = v_0 t\cos\varphi = \frac{2\,v_0^2\,\text{sen}\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{v_0^2\,\text{sen}2\varphi}{g} = 24\,500 \text{ m}}$$

El tiempo para alcanzar la altura máxima es la mitad del correspondiente al alcance:

$$\boxed{t' = 35{,}3 \text{ s}} \qquad \boxed{y_m = v_0 t'\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t'^2 = 6\,125 \text{ m}}$$



Problema V-63

2)

$$x = v_0 t\cos\varphi = 490 \times 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 693 \text{ m}$$

$$y = v_0 t\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 490 \times 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,9{,}8 \times 4 = 673{,}4 \text{ m}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0\cos\varphi = 490\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 346{,}5 \text{ m/s} \\ v_y &= v_0\,\text{sen}\varphi - gt = 490\,\frac{\sqrt{2}}{2} - 9{,}8 \times 2 = 326{,}9 \text{ m/s} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 476{,}4 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 693\,\boldsymbol{i} + 673{,}4\,\boldsymbol{j} \text{ m}} \qquad \boxed{\boldsymbol{v} = 346{,}5\,\boldsymbol{i} + 326{,}9\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}}$$

Problema 64. Se dispara un cañón con un ángulo de 15°, saliendo la bala con la velocidad de 200 m/s. Se desea saber:

1. La distancia teórica que alcanzará la bala sobre la horizontal.

2. La velocidad con que llega a tierra, en valor absoluto y dirección.

3. Si tropieza con una colina que se encuentra a la mitad de su alcance, de 300 m de alta. ¿Por qué?

4. En caso afirmativo, ¿qué solución podríamos dar si queremos hacer blanco en el mismo objetivo y con el mismo cañón (la misma velocidad inicial) disparando desde el mismo sitio?

Solución

1)
$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} t = 0 \\ t = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} \end{array}$$

$$\boxed{x = v_0 t \cos\varphi = \frac{v_0 \operatorname{sen}2\varphi}{g} = \frac{40\,000 \times 0,5}{9,8} = 2\,040 \text{ m} \simeq 2 \text{ km}}$$

2)
$$\boxed{v_{\text{final}} = v_{\text{inicial}} = 200 \text{ m/s}}$$

La simetría de la trayectoria exige que la velocidad al llegar el proyectil a tierra forme un ángulo de 15° hacia abajo, con la horizontal.

3) Para llegar a la cúspide de la trayectoria, se emplea un tiempo mitad al calculado en 1).

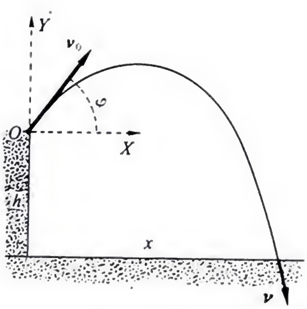
$$t' = \frac{v_0 \operatorname{sen}\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad y_m = v_0 t' \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t'^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{2g} = 137 \text{ m} \quad \boxed{\text{Tropieza.}}$$

4) Si los alcances deben ser iguales $\operatorname{sen}2\varphi = \operatorname{sen}2\varphi'$, la solución será disparar con un ángulo $\varphi' = 90° - \alpha = 75°$. La altura máxima es entonces:

$$y'_m = \frac{v_0{}^2 \operatorname{sen}^2\varphi'}{2g} = 1\,904 \text{ m}$$

Problema 65. Se dispara un cañón desde un acantilado de 50 m de altura y con un ángulo de 45° por encima de la horizontal, siendo la velocidad de salida del proyectil de 490 m/s. Calcular:

1. Tiempo que tarda el proyectil en llegar a la superficie del mar.
2. Posición del impacto.
3. Velocidad en ese instante.



Problema V-65

Solución

1)
$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad -50 = 490\, t \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} 9,8\, t^2$$

$$4,9 t^2 - 245\sqrt{2}\, t - 50 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} \boxed{t = 70,8 \text{ s}} \\ t = -0,1 \text{ s (no tiene sentido físico)} \end{array}$$

2)
$$x = v_0 t \cos\varphi = 490 \times 70,8 \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ m} = 24\,530,9 \text{ m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 24\,530,9\,\boldsymbol{i} - 50\boldsymbol{j} \text{ m}}$$

3)
$$v_x = v_0 \cos\varphi = 490 \frac{\sqrt{2}}{2} = 346,5 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - g t = 490 \frac{\sqrt{2}}{2} - 9,8 \times 70,8 = -347,3 \text{ m/s}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 346,5\,\boldsymbol{i} - 347,3\boldsymbol{j} \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 490,6 \text{ m/s}$$

Problema 66. Una pelota resbala por un tejado que que forma un ángulo de 30° con la horizontal, y al llegar a su extremo, queda en libertad con una velocidad de 10 m/s. La altura del edificio es 60 m y la anchura de la calle a la que vierte el tejado 30 m. Calcular:

1. Ecuaciones del movimiento de la pelota al quedar en libertad y ecuación de la trayectoria en forma explícita. (Tomar el eje X horizontal y el Y vertical y positivo en sentido descendente.)

2. ¿Llegará directamente al suelo o chocará antes con la pared opuesta?

3. Tiempo que tarda en llegar al suelo y velocidad en ese momento.

4. Posición en que se encuentra cuando su velocidad forma un ángulo de 45° con la horizontal.

Solución

1) Las ecuaciones del movimiento escritas en el SI, serán:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= 0 \\ a_y &= 9{,}8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = 9{,}8\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\varphi = 10\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ m/s} \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\varphi + gt = 5 + 9{,}8\,t \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = 5\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + (5 + 9{,}8\,t)\boldsymbol{j}}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 t \cos\varphi = 5\sqrt{3}t \\ y &= v_0 t \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}gt^2 = 5\,t + 4{,}9\,t^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = 5\sqrt{3}\,t\,\boldsymbol{i} + (5\,t + 4{,}9\,t^2)\boldsymbol{j}}$$

La ecuación de la trayectoria en forma explícita se obtendrá despejando t en la ecuación de x y sustituyendo en y, es decir:

$$t = \frac{x}{5\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{4{,}9\,x^2}{75}}$$

2) Para:

$$x = 30 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{30}{\sqrt{3}} + \frac{4{,}9 \times 900}{75} = 76 \text{ m}$$

Haría falta un descenso aproximado de 76 m para tocar la pared. A los 60 m, no choca con ella.

3) $$60 = 5\,t + 4{,}9\,t^2 \simeq 5\,t + 5\,t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 + t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \left|\begin{aligned} &t = -4 \text{ s} \\ &\boxed{t = \ \ 3 \text{ s}} \end{aligned}\right.$$

La solución 3 s es la correcta respondiendo al enunciado. La solución negativa (−4 s.) indica el tiempo (anterior al origen de los tiempos), que en la trayectoria parabólica indefinida, hubiese tardado el cuerpo en ir desde 60 metros por debajo del origen hasta dicho origen, pasando por él a una velocidad de 10 m/s, formando con la horizontal un ángulo de 30°.

La velocidad será:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = 5\sqrt{3}\,\boldsymbol{i} + 34{,}4\,\boldsymbol{j} \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_x^2} = 35{,}5 \text{ m/s}$$

4) $\quad v_x = v_y \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{3} = 5 + 9{,}8\,t \quad \Rightarrow \quad t = 0{,}4 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = 3{,}5 \text{ m} \\ y = 2{,}8 \text{ m} \end{array} \right.$

$$\boxed{\boldsymbol{r} = 3{,}5\boldsymbol{i} + 2{,}8\boldsymbol{j} \ \text{ m}}$$

Problema 67. Demostrar por cinemática que cualquiera que sea el ángulo de lanzamiento de un proyectil arrojado desde lo alto de un acantilado de altura h con la misma velocidad inicial, la velocidad de llegada al suelo es siempre la misma.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array} \right| \quad v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)^2}$$

operando queda:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 g v_0 t \operatorname{sen}\varphi}$$

pero:

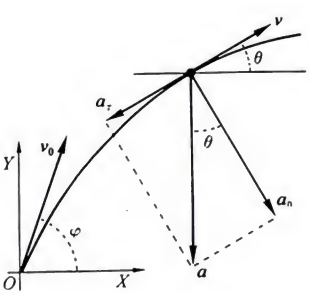
$$-h = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad g^2 t^2 = 2gh + 2 v_0 g t \operatorname{sen}\varphi$$

sustituyendo:

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

velocidad que es independiente del ángulo de lanzamiento.

Problema 68. Se dispara un cañón con un ángulo φ por encima de la horizontal, saliendo la bala con una velocidad v_0. Determinar en función del tiempo las expresiones de los módulos de la aceleración tangencial y normal. Calcular el radio de curvatura de su trayectoria en cualquier instante.



Problema V-68

Solución

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array} \right| \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt]^2$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{-g\,(v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)}{\sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + [v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt]^2}}$$

Se podía haber obtenido teniendo en cuenta que como sólo actúa el peso de la bala, $\boldsymbol{g}$ será la aceleración resultante de $\boldsymbol{a}_\tau$ y $\boldsymbol{a}_n$, con lo que de la figura obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a_\tau = -g \operatorname{sen}\theta = -g \dfrac{\operatorname{tag}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2\theta}} \\ \\ \operatorname{tag}\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt}{v_0 \cos\varphi} \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$a_\tau = -g\,\frac{\dfrac{v_0\,\text{sen}\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}}{\sqrt{1+\left[\dfrac{v_0\,\text{sen}\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}\right]^2}} = -g\,\frac{v_0\,\text{sen}\varphi - gt}{\sqrt{v_0^2\cos^2\varphi + [v_0\,\text{sen}\varphi - gt]^2}}$$

La aceleración normal se obtendrá:

$$a_n = -g\cos\theta = -g\,\frac{1}{\sqrt{1+\text{tag}^2\theta}} = -g\,\frac{1}{\sqrt{1+\left[\dfrac{v_0\,\text{sen}\varphi - gt}{v_0\cos\varphi}\right]^2}} = \frac{-gv_0\cos\varphi}{\sqrt{v_0^2\cos^2\varphi + [v_0\,\text{sen}\varphi - gt^2]^2}}$$

Igualando a v^2/ρ y despejando ρ:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = -\frac{[v_0^2\cos^2\varphi + (v_0\,\text{sen}\varphi - gt)^2]^{3/2}}{gv_0\cos\varphi}$$

Problema 69. Con un proyectil queremos rebasar una colina de 300 m de alta desde 500 m de distancia a la cima. Calcular:

1. Angulo de lanzamiento.

2. Velocidad mínima necesaria.

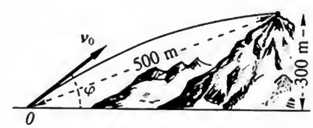
Solución

La ecuación de la trayectoria en forma explícita es:

$$y = x\,\text{tag}\varphi - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\,x^2$$

de la que se obtiene:

$$v_0^2 = \frac{gx^2}{2\cos^2\varphi\,(x\,\text{tag}\varphi - y)} = \frac{gx^2}{x\,\text{sen}\,2\varphi - 2y\cos^2\varphi} \qquad (1)$$



Problema V-69

derivando e igualando a cero para obtener el valor de φ que hace mínima a v_0 para x e y determinados, nos queda:

$$2v_0\,\frac{dv_0}{d\varphi} = -gx^2\,\frac{2x\cos2\varphi + 4y\cos\varphi\,\text{sen}\varphi}{(x\,\text{sen}2\varphi - 2y\cos^2\varphi)^2} = 0 \quad\Rightarrow\quad x\cos2\varphi + y\,\text{sen}2\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad \text{tag}2\varphi = -\frac{x}{y}$$

y como:

$$x = \sqrt{500^2 - 300^2} = 400\text{ m} \quad\Rightarrow\quad \text{tag}2\varphi = -\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\varphi = 63°\ 26'}$$

2) Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\boxed{v_0 = \frac{x}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{g}{2\,(x\,\text{tag}\varphi - y)}} \simeq 88{,}5\text{ m/s}}$$

Problema 70. ¿Qué ángulo habrá que darle a la velocidad en el lanzamiento de un proyectil desde un muro de 10 m de altura para obtener el alcance máximo? Velocidad de salida del proyectil 10 m/s. Calcular también dicho alcance.

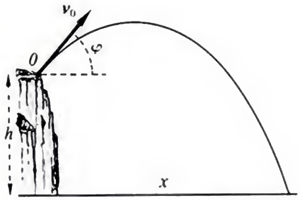
Solución

$$x = v_0 t \cos\varphi \qquad y = -10 \text{ m}$$

$$y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \qquad g = 10 \text{ m/s}^2$$

$$-10 = 10 t \operatorname{sen}\varphi - 5t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t \operatorname{sen}\varphi - 2 = 0$$

$$t = \frac{2\operatorname{sen}\varphi + \sqrt{4\operatorname{sen}^2\varphi + 8}}{2} = \operatorname{sen}\varphi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + 2}$$



Problema V-70

(El signo menos que aparece en la solución a la ecuación de segundo grado no tiene sentido físico, puesto que al ser $2\operatorname{sen}\varphi < \sqrt{4\operatorname{sen}^2 + 8}$ daría negativo.) Luego:

$$x = 10\cos\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi + \sqrt{\operatorname{sen}^2\varphi + 2}\,)$$

igualando a cero la derivada respecto a φ y tomando la solución conveniente da:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 30°}$$

con lo que: $\boxed{x = 10\sqrt{3} \text{ m}}$

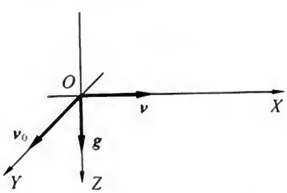
Problema 71. Sobre la plataforma de un tren que se mueve sobre un terreno horizontal con una velocidad de 30 m/s, está montado rígidamente un cañón que lanza sus proyectiles a 500 m/s. Determinar las ecuaciones del movimiento del proyectil en los siguientes casos:

1. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en dirección horizontal.

2. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en dirección vertical y hacia arriba.

3. El disparo se efectúa perpendicularmente a la dirección del movimiento y en el plano vertical a ella y formando un ángulo de 45° con la horizontal.

4. El disparo se efectúa formando un ángulo de 30° con la dirección del movimiento contado éste en el plano horizontal y 60° con el plano horizontal.



Problema V-71-1.ª

Solución

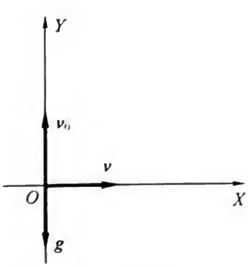
1)

$$a_x = 0 \qquad v_x = 30 \text{ m/s} \qquad x = 30t$$

$$a_y = 0 \qquad v_y = 500 \text{ m/s} \qquad y = 500t$$

$$a_z = 10 \text{ m/s}^2 \qquad v_z = gt = 10t \qquad z = \frac{1}{2} g t^2 = 5t^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= 10\boldsymbol{k} \text{ m/s}^2 \\ \boldsymbol{v} &= 30\boldsymbol{i} + 500\boldsymbol{j} + 10t\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} &= 30t\boldsymbol{i} + 500t\boldsymbol{j} + 5t^2\boldsymbol{k} \end{aligned}}$$



Problema V-71-2.ª

2) El movimiento es plano:

$$a_x = 0 \qquad v_x = 30 \text{ m/s} \qquad x = 30t$$

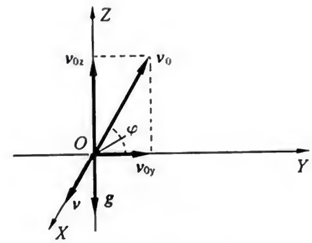
$$a_y = -10 \text{ m/s}^2 \qquad v_y = 500 - 10t \qquad y = 500t - 5t^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{j}\ \text{m/s} \\ \boldsymbol{v} = 30\boldsymbol{i}\ + (500\ \ - 10t)\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{r} = 30t\boldsymbol{i} + (500t - \ 5t^2)\boldsymbol{j} \end{array}}$$

3)

$$\begin{array}{l|l|l} a_x = 0 & v_x = 30\ \text{m/s} & x = 30t \\ a_y = 0 & v_y = 250\sqrt{2}\ \text{m/s} & y = 250\sqrt{2}\, t \\ a_z = -10\ \text{m/s}^2 & v_z = 250\sqrt{2} - 10t & z = 250\sqrt{2}\, t - 5t^2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2 \\ \boldsymbol{v} = 30\boldsymbol{i}\ + 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} + (250\sqrt{2}\ - 10t)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} = 30t\boldsymbol{i} + 250\sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (250\sqrt{2}t - \ 5t^2)\boldsymbol{k} \end{array}}$$



Problema V-71-3.ª

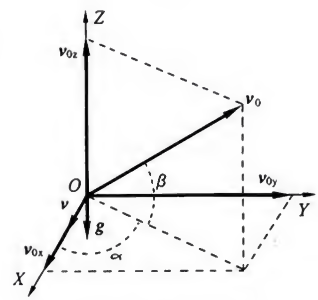
4)

$$\begin{array}{l|l} \alpha = 30^\circ & v_{0x} = v_0 \cos\alpha \cos\beta = 125\sqrt{3}\ \text{m/s} \\ \beta = 60^\circ & v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta = 125\ \text{m/s} \\ & v_{0z} = v_0 \operatorname{sen}\beta \qquad = 250\sqrt{3}\ \text{m/s} \end{array}$$

Las componentes de $\boldsymbol{a}$ lo mismo que en 3).

$$\begin{array}{l|l} v_x = v + v_{0x} = 30 + 125\sqrt{3}\ \text{m/s} & x = (30 + 125\sqrt{3})t \\ v_y = v_{0y} = 125\ \text{m/s} & y = 125t \\ v_z = v_{0z} = 250\sqrt{3} - 10t & z = 250\sqrt{3}t - 5t^2 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = -10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2 \\ \boldsymbol{v} = (30 + 125\sqrt{3})\,\boldsymbol{i}\ + 125\boldsymbol{j}\ + (250\sqrt{3}\ - 10t)\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r} = (30 + 125\sqrt{3})t\boldsymbol{i}\ + 125t\boldsymbol{j} + (250\sqrt{3}t - \ 5t^2)\boldsymbol{k} \end{array}}$$



Problema V-71-4.ª

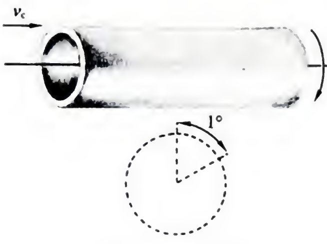
Problema 72. Un proyectil es lanzado con una velocidad: $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ m/s desde un punto de coordenadas (2, 1, 1) (en metros). Si está sometido a la aceleración de la gravedad (dirección y sentido negativo del eje OZ) y a una fuerza debida al viento que le produce una aceleración en la dirección positiva del eje OX de 2 m/s². Calcúlese las ecuaciones del movimiento [$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ y $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(t)$].

Solución

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 2\ \text{m/s}^2 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g = -10\ \text{m/s}^2 \end{array}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{k}\ \text{m/s}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_{0x} + a_x t = 1 + 2t \\ v_y = v_{0y} = -3\ \text{m/s} \\ v_z = v_{0z} - gt = 2 - 10t \end{array}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{v} = (1 + 2t)\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + (2 - 10t)\boldsymbol{k}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{1}{2} a_x t^2 = 2 + t + t^2 \\ y = y_0 + v_{0y}t = 1 - 3t \\ z = z_0 + v_{0z}t - \dfrac{1}{2} g t^2 = 1 + 2t - 5t^2 \end{array}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{r} = (2 + t + t^2)\boldsymbol{i} + (1 - 3t)\boldsymbol{j} + (1 + 2t - 5t^2)\boldsymbol{k}}$$



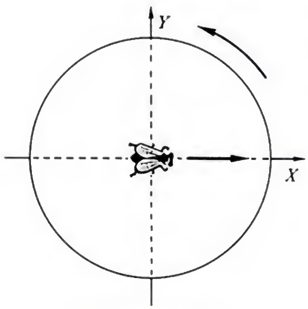
Problema V-73

Problema 73. Un cilindro de cartón de 20 m de altura gira alrededor de su eje a razón de 1 vuelta cada 10 segundos. En la dirección de la generatriz se hace un disparo y se observa que los radios que pasan por los impactos hechos en las bases forman un ángulo de un grado. Calcular la velocidad del proyectil.

Solución

Si en 10 s gira el cilindro 360°	
en t s	1°

$$t = \frac{10}{360} = \frac{1}{36}\text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{s}{t} = \frac{20\text{ m}}{1/36\text{ s}} = 720\text{ m/s}}$$



Problema V-74

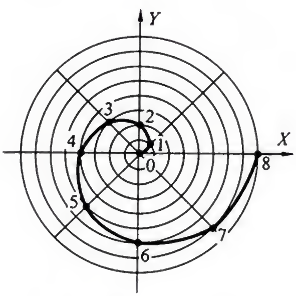
Problema 74. Una mosca camina en línea recta con movimiento uniforme a lo largo del radio R del disco de vidrio de la figura al mismo tiempo que éste gira con velocidad angular constante. Suponiendo que el tiempo que tarda la mosca en recorrer el radio es el mismo que el período de giro del disco.

1. Dibujar la trayectoria de la mosca, con relación a los ejes fijos X e Y que se ven por transferencia a través del vidrio.

2. Determinar las ecuaciones horarias de éste movimiento en función de v (velocidad de la mosca) y ω (velocidad angular del disco) con relación a los ejes fijos.

Solución

1) Dividamos la circunferencia en un número de partes iguales (por ejemplo, 8). Cuando la mosca ha recorrido 1/8 de radio, el disco ha girado un ángulo de 1/8 de giro completo encontrándose el móvil en el punto 1, transcurrido otro intervalo igual de tiempo la mosca estará en 2, ... etc. La trayectoria será, por tanto, la dibujada en la Fig. 2.



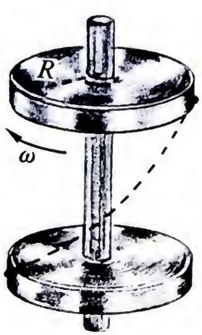
Problema V-74-1.ª

2) Transcurrido un tiempo t el camino recorrido por la mosca es $r = vt$ y el ángulo girado es ωt. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x = vt\cos\omega t \\ y = vt\,\text{sen}\,\omega t \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{r} = v\,(\boldsymbol{i}t\cos\omega t + \boldsymbol{j}t\,\text{sen}\,\omega t)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt = v\,[(\cos\omega t - \omega t\,\text{sen}\,\omega t)\boldsymbol{i} + (\text{sen}\,\omega t + \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{j}]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt = v\omega[-(2\,\text{sen}\,\omega t + \omega t\cos\omega t)\boldsymbol{i} + (2\cos\omega t - \omega t\,\text{sen}\,\omega t)\boldsymbol{j}]}$$



Problema V-75

Problema 75. El disco de radio R de la Fig. desliza sin rozamiento a lo largo de su eje; dejamos que caiga y a su vez le comunicamos en el instante inicial una velocidad angular constante ω. Determínense las ecuaciones horarias del movimiento de un punto situado en el borde del disco.

Solución

Tomando los ejes como se indica en la Fig. de tal forma que el punto que consideramos se encuentra en P_0 (R, 0, 0) en el instante inicial, tendremos que las ecuaciones del movimiento según OZ serán:

$$a_z = g \qquad v_z = gt \qquad z = \frac{1}{2}gt^2$$

siendo g la aceleración de la gravedad y t un tiempo cualquiera contado a partir del instante inicial. Para el eje OX, tenemos:

$$v_x = -v_{xy}\operatorname{sen}\omega t = -\omega R \operatorname{sen}\omega t$$

$$a_x = dv_x / dt = -\omega^2 R\cos\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\omega R \displaystyle\int \operatorname{sen}\omega t\, dt = R\cos\omega t + C_1 \\ t = 0 \qquad x = R = R + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad x = R\cos\omega t$$

y para el eje OY, tendremos:

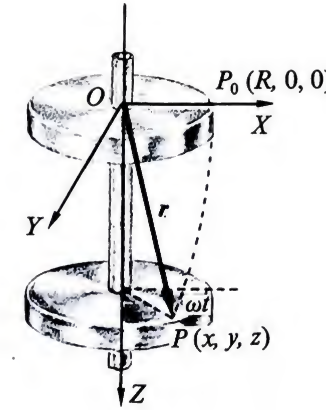
$$v_y = v_{xy}\cos\omega t = \omega R\cos\omega t$$

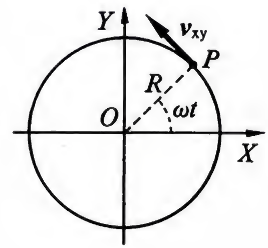
$$a_y = -\omega^2 R\operatorname{sen}\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \omega R \displaystyle\int \cos\omega t\, dt = R\operatorname{sen}\omega t + C_2 \\ t = 0 \qquad y = 0 \qquad y = 0 = C_2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad y = R\operatorname{sen}\omega t$$

luego las ecuaciones del movimiento serán:

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{r} = R\left(\boldsymbol{i}\cos\omega t + \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{g}{2R}\, t^2\boldsymbol{k}\right) \\ \boldsymbol{v} = \omega R\left(-\boldsymbol{i}\operatorname{sen}\omega t + \boldsymbol{j}\cos\omega t + \dfrac{g}{\omega R}\, t\boldsymbol{k}\right) \\ \boldsymbol{a} = \omega^2 R\left(-\boldsymbol{i}\cos\omega t - \boldsymbol{j}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{g}{\omega^2 R}\, \boldsymbol{k}\right) \end{array}}$$

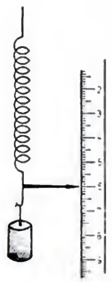




Capítulo VI

ESTATICA - EQUILIBRIO ESTATICO

A) ESTATICA



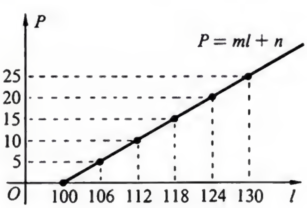
Problema VI-1

Problema 1. En el extremo de un resorte colgamos diversos pesos y medimos la longitud del mismo, obteniéndose los siguientes valores:

Peso en g	0	5	10	15	20	25
Longitud en mm	100	106	112	118	124	130

1. Representar gráficamente estos valores y escribir la fórmula que relaciona los pesos con las longitudes del resorte.
2. Escribir la fórmula que relaciona los pesos con las deformaciones del resorte (Ley de Hooke).
3. Averiguar la longitud del resorte cuando colgamos un peso de 12 g.
4. ¿Qué peso tendremos colgado del resorte cuando su deformación sea de 15 mm?

Solución



Problema VI-1-1.ª

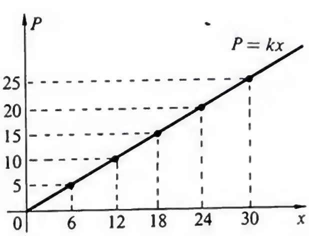
1) La ecuación de la recta será de la forma: $P = ml + n$
para calcular las constantes m y n hacemos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } P = 0\,,\ l = l_0 = 100 \text{ mm} \Rightarrow & 0 = 100\,m + n \\ \text{Si } P = 5\,,\ l = 106 \text{ mm} \Rightarrow & 5 = 106\,m + n \end{array}\right| \quad m = \frac{5}{6}\ \text{g} \cdot \text{f / mm} \quad n = -\frac{250}{3}\ \text{g} \cdot \text{f / mm}$$

$$\boxed{P = \frac{5}{6}\, l - \frac{250}{3}}$$

2) Las deformaciones del resorte toman los valores: $x = l - l_0$
obteniéndose para los datos la siguiente tabla:

Peso en g	0	5	10	15	20	25
Deformaciones en mm	0	6	12	18	24	30



Problema VI-1-2.ª

que representadas, gráficamente dan la recta de la figura. Para hallar K hacemos:

$$P = 5 \ \text{g} \cdot \text{f}, \quad x = 6 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{P}{x} = \frac{5}{6} \ \text{g} \cdot \text{f / mm}$$

y la «ley» se expresará:

$$\boxed{P = \frac{5}{6}\, x}$$

3) En 1) hacemos $P = 12$ g · f y se obtiene:

$$12 = \frac{5}{6}\, l - \frac{250}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = 114{,}4 \text{ mm}}$$

4) En 2) hacemos $x = 15$ mm y se obtiene:

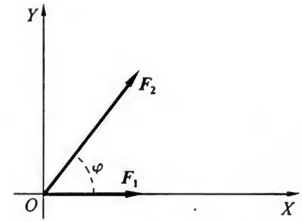
$$\boxed{P = \frac{5}{6}\ 15 = 12{,}5\ \text{g} \cdot \text{f}}$$

Problema 2. Se tienen dos fuerzas concurrentes de 10 y 15 N cada una. Calcular la resultante en los siguientes casos:

1. Cuando forman un ángulo de 0°
2. Cuando forman un ángulo de 45°
3. Cuando forman un ángulo de 90°
4. Cuando forman un ángulo de 120°
5. Cuando forman un ángulo de 180°

Solución

Si en todos los casos tomamos la fuerza de 10 N ($\boldsymbol{F}_1$ en la figura) en la dirección positiva del eje OX entonces:



Problema VI-2

$$\boldsymbol{F}_1 \left|\begin{array}{l} F_{1x} = F_1 = 10\ \text{N} \\ F_{1y} = 0 \end{array}\right. \qquad \boldsymbol{F}_2 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = F_2 \cos\varphi \\ F_{2y} = F_2 \operatorname{sen}\varphi \end{array}\right.$$

1)
$$\varphi = 0 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = F_2 = 15\ \text{N} \\ F_{2y} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = (F_{1x} + F_{2x})\boldsymbol{i} = 25\boldsymbol{i}\ \text{N}} \Rightarrow F = 25\ \text{N}$$

2)
$$\varphi = 45 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = 15\cos 45 = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \\ F_{2y} = 15\operatorname{sen}45 = \dfrac{15\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = \left(10 + \frac{15\sqrt{2}}{2}\right)\boldsymbol{i} + \frac{15\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\ \text{N}} \Rightarrow F = 23{,}2\ \text{N}$$

3)
$$\varphi = 90 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = 15\cos 90 = 0 \\ F_{2y} = 15\operatorname{sen}90 = 15\ \text{N} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = 10\boldsymbol{i} + 15\boldsymbol{i}\ \text{N}} \Rightarrow F = 18\ \text{N}$$

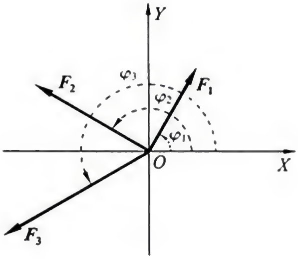
4)
$$\varphi = 120 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = 15\cos 120 = -\dfrac{15\sqrt{3}}{2}\text{N} \\ F_{2y} = 15\operatorname{sen}120 = \dfrac{15}{2}\text{N} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = \left(10 - \frac{15\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{i} + \frac{15}{2}\boldsymbol{j}\ \text{N}} \Rightarrow F = 8{,}1\ \text{N}$$

5)
$$\varphi = 180 \left|\begin{array}{l} F_{2x} = 15\cos 180 = -15\ \text{N} \\ F_{2y} = 15\operatorname{sen}180 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = -5\boldsymbol{i}\ \text{N}} \Rightarrow F = 5\ \text{N}$$

Problema 3. Se tienen tres fuerzas concurrentes de 6, 10 y 12 kp de módulo cada una y forman respectivamente ángulos de 60°, 150° y 225° con la dirección positiva del eje OX. Calcular la resultante, su módulo y el ángulo que forma con la dirección positiva del eje OX.

Solución

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \text{tag}\varphi = \dfrac{F_y}{F_x} \end{array} \right.$$



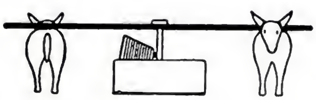
Problema VI-3

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_1 = 60° & \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1\cos\varphi_1 = \quad 3 \text{ N} \\ F_{1y} = F_1\,\text{sen}\varphi_1 = \quad 3\sqrt{3} \text{ N} \end{array} \right. \\ \varphi_2 = 150° & \left| \begin{array}{l} F_{2x} = F_2\cos\varphi_2 = -5\sqrt{3} \text{ N} \\ F_{2y} = F_2\,\text{sen}\varphi_2 = \quad 5 \text{ N} \end{array} \right. \\ \varphi_3 = 225° & \left| \begin{array}{l} F_{3x} = F_3\cos\varphi_3 = -6\sqrt{2} \text{ N} \\ F_{3y} = F_3\,\text{sen}\varphi_3 = -6\sqrt{2} \text{ N} \end{array} \right. \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} F_x = 3 - 5\sqrt{3} - 6\sqrt{2} = -14{,}1 \text{ N} \\ F_y = 3\sqrt{3} + 5 - 6\sqrt{2} = \quad 1{,}7 \quad \text{N} \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -14{,}1\,\boldsymbol{i} + 1{,}7\boldsymbol{j} \text{ N}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \sqrt{14{,}1^2 + 1{,}7^2} = 14{,}2 \text{ N}}$$

$$\text{tag}\varphi = -\frac{1{,}7}{14{,}1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 173°\ 7'}$$

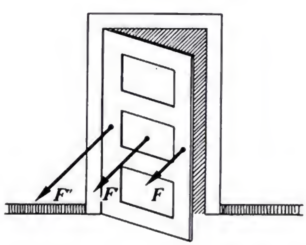

Problema VI-4

Problema 4. Un molinero tiene dos borriquillos para mover la muela de su molino; cada uno de ellos realiza una fuerza de 60 kg. La longitud del travesaño a que están enganchados es de 4 m. Uno de los borriquillos se muere. ¿Qué modificación se debe hacer en la instalación, para que el molino funcione, haciendo trabajar al superviviente con una fuerza de 80 kg?

Solución

Se ha de verificar: $\quad 60 \times 4 = 80\,x \quad \Rightarrow \quad x = 240\ /\ 80 = 3$ m

Trabajando un solo borriquillo se ha de verificar que la distancia desde el punto en que está enganchado hasta el eje debe ser 3 m.



Problema VI-5

Problema 5. La fuerza necesaria para abrir una puerta tirando de su manecilla es la centésima parte de su peso. Si la puerta pesa 10 kg y la distancia de la manecilla al eje de giro es 1 m, calcular:

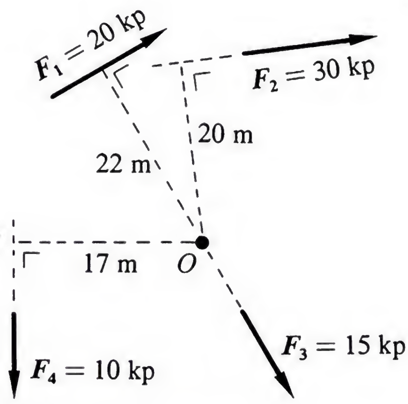
1. La fuerza F' necesaria para abrir la puerta aplicándola en un punto que dista 50 cm del eje.

2. La fuerza F'' necesaria para abrir la puerta, aplicada a un punto que dista 10 cm del eje.

Solución

$$100\ \frac{10}{100} = 50\,F' = 10F'' \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{F' = 0{,}2 \text{ kp}} \\ \boxed{F'' = 1 \text{ kp}} \end{array} \right.$$

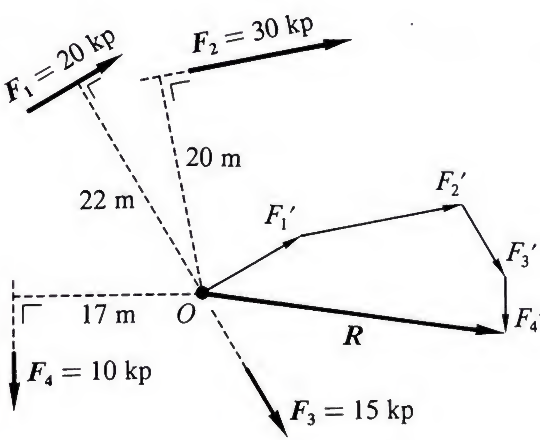
Problema 6. Hallar gráficamente la resultante de las fuerzas de la figura, aplicándola en el punto O y hallar, asimismo, el momento del par resultante.



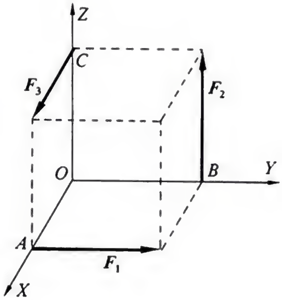
Problema VI-6

Solución

Obtenemos la resultante dibujado el polígono de vectores.



Problema VI-6-1.ª



Problema VI-7

El momento del par resultante será:

$$-20 \times 22 - 30 \times 20 + 10 \times 17 = -870 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

La dirección del momento del par será perpendicular al plano del papel y hacia el interior.

Problema 7. Los módulos de las fuerzas indicadas en la figura son todos iguales a 1 N y el lado del cubo es 1 m. Calcular:

1. La fuerza resultante y su módulo.
2. Momento resultante respecto a O (0, 0, 0) y su módulo.
3. Momento resultante respecto a P (3, 4, 2) m y su módulo.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{j} \text{ N} \\ \boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{k} \text{ N} \\ \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i} \text{ N} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}} \Rightarrow \boxed{F = \sqrt{3}\text{ N}}$$

2)

$$\begin{array}{lcl} A\,(1, 0, 0) & \Rightarrow & \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{r}_1\,(1, 0, 0) \equiv \boldsymbol{i} \text{ m} \\ B\,(0, 1, 0) & \Rightarrow & \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{r}_2\,(0, 1, 0) \equiv \boldsymbol{j} \text{ m} \\ C\,(0, 0, 1) & \Rightarrow & \boldsymbol{OC} = \boldsymbol{r}_3\,(0, 0, 1) \equiv \boldsymbol{k} \text{ m} \end{array}$$

$$\boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{r}_3 \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{j} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}} \Rightarrow \boxed{N = \sqrt{3}\text{ N} \cdot \text{m}}$$

3) 1^er^ Método

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{PA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{r}_1'\,(-2, -4, -2) \text{ m} \\ \boldsymbol{PB} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{r}_2'\,(-3, -3, -2) \text{ m} \\ \boldsymbol{PC} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}_3'\,(-3, -4, -1) \text{ m} \end{array}$$

$$\boldsymbol{N}_1' = \boldsymbol{r}_1' \times \boldsymbol{F}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boldsymbol{N}_2' = \boldsymbol{r}_2' \times \boldsymbol{F}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boldsymbol{N}_3' = \boldsymbol{r}_3' \times \boldsymbol{F}_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\boxed{\boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N}_1' + \boldsymbol{N}_2' + \boldsymbol{N}_3' = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}} \Rightarrow \boxed{N' = 3 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

2.º Método

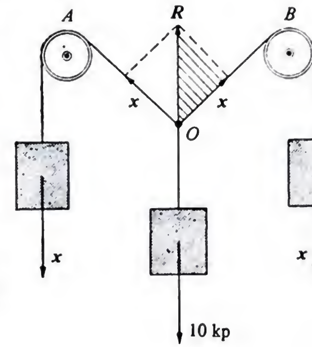
$$N' = N + F \times OP \qquad OP = P - O = 3i + 4j + 2k \text{ m} \quad \Rightarrow \quad N' = i + j + k + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -i + 2j + 2k \text{ N} \cdot \text{m}$$

B) CONDICIONES DE EQUILIBRIO

FORMULARIO

Condiciones de equilibrio de un sólido:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0$$
$$\Sigma N_x = 0 \qquad \Sigma N_y = 0 \qquad \Sigma N_z = 0$$



Problema VI-8

Problema 8. Un peso de 10 kg pende de un hilo como indica la figura. Calcular los pesos iguales que hay que colgar de los cabos de la cuerda, que pasa por las poleas A y B, para que exista equilibrio cuando:

1. El ángulo AOB es recto.
2. El ángulo AOB toma cualquier valor.

Solución

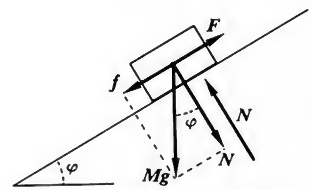
Deberá verificarse: $\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = 10$ kp

1) Si AOB es 90° entonces el triángulo rayado de la figura es rectángulo isósceles y se verifica:

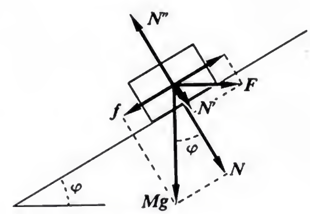
$$R = \sqrt{2x^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \text{ kp}}$$

2) Si AOB no es recto, tendrá que verificarse:

$$R^2 = x^2 + x^2 + 2x^2\cos\varphi = 2x^2(1 + \cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{R}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} = \frac{10}{\sqrt{2(1+\cos\varphi)}} \text{ kp}}$$



Problema VI-9-1.ª



Problema VI-9-2.ª

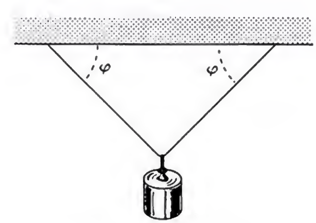
Problema 9. Un bloque de 100 kg se encuentra sobre un plano inclinado 45°; si no existe rozamiento entre el bloque y el plano, calcular:

1. Fuerza mínima paralela al plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo.
2. Fuerza mínima horizontal capaz de mantener al bloque en reposo.

Solución

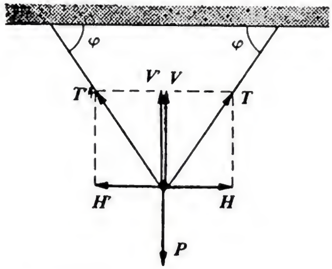
1) $$\boxed{f = F = Mg\,\text{sen}\varphi = 50\sqrt{2} \text{ kp}}$$

2) $$f = F' \quad \begin{vmatrix} f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ F' = F\cos\varphi \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad Mg\,\text{sen}\varphi = F\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = Mg\,\text{tag}\varphi = 100 \text{ kp}}$$



Problema VI-10

Problema 10. Calcular las tensiones de los cabos de la cuerda, en función del ángulo φ y el peso P. Hacer aplicación para $\varphi = 30°$ y $P = 100$ kp



Problema VI-10-1.ª

Solución

$$\left.\begin{array}{l} H = H' \\ P = V + V' = 2V \\ V = T\,\text{sen}\varphi \end{array}\right| \qquad \boxed{T = \frac{V}{\text{sen}\varphi} = \frac{P}{2\,\text{sen}\varphi}}$$

APLICACIÓN:

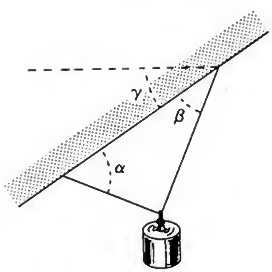
$$\left.\begin{array}{l} P = 100 \text{ kp} \\ \varphi = 30° \end{array}\right| \qquad \boxed{T = \frac{100}{2 \times 0{,}5} = 100 \text{ kp}}$$

Problema 11. La máxima tensión que pueden soportar las cuerdas del problema anterior es *T;* calcular el ángulo φ para tal tensión, supuesto pendiente el peso *P*. ¿Sufrirían los cabos de la cuerda mayor o menor tensión, para ángulos menores a φ?

Solución

$$\text{sen}\varphi = \frac{P}{2T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi = \text{arc sen}\,\frac{P}{2T}}$$

Cuando φ disminuye, senφ también lo hace, pues son ángulos agudos, luego como *P* permanece constante, *T* aumenta.



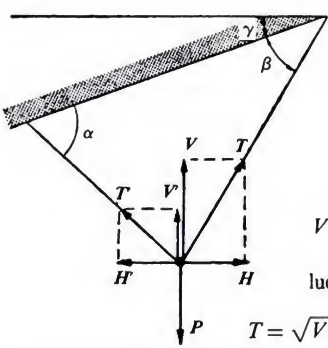
Problema VI-12

Problema 12. Calcular las tensiones de los cabos de la cuerda en función de los ángulos α, β, γ y del peso *P*. Aplicación: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $\gamma = 30º$ y $P = 100$ kp.

Solución

$$\begin{array}{l} T = \sqrt{V^2 + H^2} \\ T' = \sqrt{V'^2 + H'^2} \end{array} \left| \begin{array}{l} P = V + V' \\ H = H' \\ \text{tag}(\beta + \gamma) = \dfrac{V}{H} \\ \text{tag}(\alpha - \gamma) = \dfrac{V'}{H'} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} V = H\,\text{tag}(\beta + \gamma) \\ V' = H'\,\text{tag}(\alpha - \gamma) \\ H = H' \end{array} \left| \begin{array}{l} P = H\,\text{tag}(\beta + \gamma) + H\,\text{tag}(\alpha - \gamma) \\ H = \dfrac{P}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)} = H' \end{array}\right.$$



Problema VI-12-1.ª

$$V = \frac{P\,\text{tag}(\beta + \gamma)}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)} \qquad V' = \frac{P\,\text{tag}(\alpha - \gamma)}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)}$$

luego:

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} = \frac{P}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)}\sqrt{1 + \text{tag}^2(\beta + \gamma)} = \frac{P}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)}\,\frac{1}{\cos(\beta + \gamma)} =$$

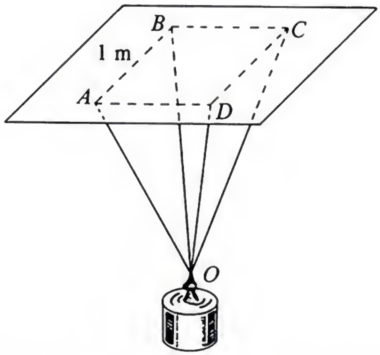
$$= \frac{P\cos(\alpha - \gamma)}{\text{sen}(\beta + \gamma)\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta + \gamma)\,\text{sen}(\alpha - \gamma)} = \frac{P\cos(\alpha - \gamma)}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$$

$$T' = \sqrt{V'^2 + H'^2} = \frac{P}{\text{tag}(\beta + \gamma) + \text{tag}(\alpha - \gamma)}\sqrt{1 + \text{tag}^2(\alpha - \gamma)} = \frac{P\cos(\beta + \gamma)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

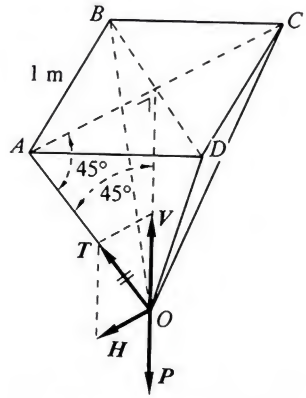
APLICACIÓN:

$$\boxed{T = 100\,\frac{\cos 30^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} = 50\sqrt{3}\text{ kp}} \qquad \boxed{T' = 100\,\frac{\cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} = 50\text{ kp}}$$

Problema 13. Determinar la tensión de cada cuerda de la figura siendo $P = 1\,000$ kp, $ABCD$ cuadrado de lado 1 m y 1 m la longitud de cada una de las cuerdas ($AO = BO = CO = DO$).



Problema VI-13

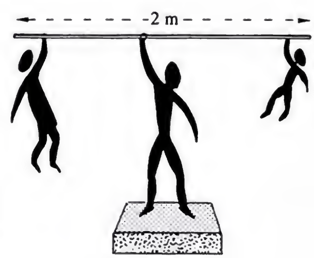


Problema VI-13-1.ª

Solución

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma V = 1\,000\\ \Sigma H = 0\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad V = \frac{1\,000}{4} = 250\text{ kp}$$

$$\boxed{T = \frac{V}{\cos 45^\circ} = 250\sqrt{2}\text{ kp}}$$



Problema VI-14

Problema 14. Un hércules de circo levanta a su mujer (70 kg) y a su hijo (30 kg) colgados en los extremos de una barra —sin peso apreciable— de longitud 2 m. ¿Qué fuerza efectúa y por dónde tiene que sostener la barra?

Solución

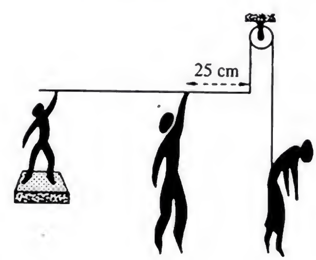
Tomaremos las fuerzas hacia arriba como positivas y hacia abajo negativas:

$$\Sigma F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad -70 - 30 + F = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{F = 100\text{ kp}}$$

Tomamos momentos respecto al punto en que se sujeta la barra:

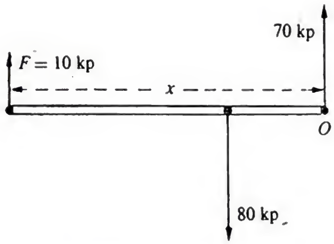
$$\Sigma N_x = 0 \quad\Rightarrow\quad 70x - 30\,(2 - x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{x = 0{,}6\text{ m} = 60\text{ cm}}$$

La barra se debe sujetar a 60 cm de la mujer y 140 cm del hijo.



Problema VI-15

Problema 15. El niño del problema anterior —digno hijo de su padre— también sostiene la barra con el padre y la madre suspendidos en ella; la segunda colgando de



Problema VI-15-1.ª

una polea enlazada al extremo de la barra, como indica la figura; y el padre (80 kg), suspendido directamente, a 25 cm del mismo extremo. ¿Qué esfuerzo tiene que efectuar el niño y por dónde tiene que sostener la barra?

Solución

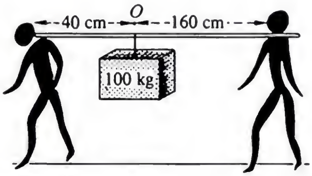
Siguiendo para las fuerzas el mismo criterio de signos que el problema anterior, será:

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F + 70 - 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 10 \text{ kp}}$$

Tomando ahora momentos con respecto al extremo derecho de la barra:

$$\Sigma N_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 80 \times 0{,}25 - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2 \text{ m}}$$

El niño debe sostener la barra por su extremo.



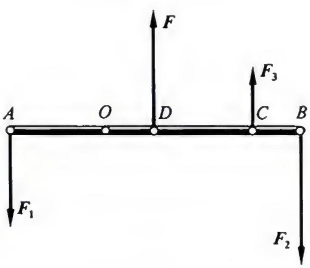
Problema VI-16

Problema 16. ¿Por qué el trabajador que va detrás se muestra tan descansado y su compañero con tanta fatiga?

Solución

Siendo F_1 y F_2 las fuerzas que desarrollan los trabajadores para el transporte de la carga en cuestión, serán éstas:

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma F = 0 & \Rightarrow & F_1 + F_2 - 100 = 0 \\ \Sigma N = 0 & \Rightarrow & 0{,}4F_1 - 1{,}6F_2 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{F_1 = 80 \text{ kp}} \\ \boxed{F_2 = 20 \text{ kp}} \end{array}$$



Problema VI-17

Problema 17. Determinar la fuerza perpendicular a la barra AB que hay que aplicar en el punto D para que exista equilibrio, suponiendo que O es fijo y los siguientes valores de fuerzas y distancias:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F_1} = 10 \text{ kp} \\ \boldsymbol{F_2} = 15 \text{ kp} \\ \boldsymbol{F_3} = 5 \text{ kp} \end{array}\right| \begin{array}{l} OA = 50 \text{ cm} \\ OB = 100 \text{ cm} \\ OC = 75 \text{ cm} \\ OD = 25 \text{ cm} \end{array}$$

(Suponemos la barra sin peso apreciable.)

Solución

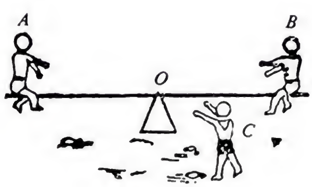
Aplicando la condición de equilibrio de los cuerpos con un punto fijo obtenemos:

$$\Sigma N = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 0$$

Las fuerzas F_1 y F_3 producen rotaciones opuestas a F_2. Considerando el momento de esta última como negativo y los de F_1 y F_3 como positivos tendremos:

$$10 \times 50 - 15 \times 100 + 5 \times 75 + F25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{625}{25} = 25 \text{ kp}}$$

El signo positivo indica que la fuerza ha de producir el mismo sentido de giro que las F_1 y F_3. Siendo por lo tanto perpendicular a la barra en D y hacia arriba.



Problema VI-18

Problema 18. Los chicos A y B, que pesan respectivamente 40 y 30 kg, están montados en un tablón de 4 m de longitud apoyado en su parte central. ¿En qué punto debe colocarse el niño C de 30 kg de peso, para que haya equilibrio?

Solución

Tomando momentos con respecto al punto fijo:

$$\Sigma N_z = 0 \qquad 40 \times 2 - 30 \times 2 + N_c = 0 \qquad N_c = -20 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

El signo menos indica que el chico C, montado en el tablón ha de producir una rotación en el mismo sentido que el B, por tanto habrá de montar a la derecha del punto de apoyo.

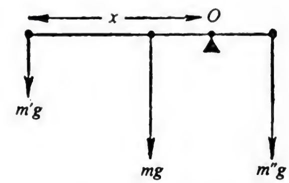
$$N_c = 20 = 30x \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = 0{,}66 \text{ m}}$$

Luego ha de colocarse a 66 cm a la derecha del punto de apoyo.

Problema 19. Una regla de un metro de longitud, homogénea y de sección constante, tiene de masa 50 g. En el extremo correspondiente a la división cero se cuelga una masa de 25 g y en el marcado con la división 100 otra masa de 50 g.

1. ¿En qué división hay que colocar el punto de apoyo para que la barra permanezca horizontal?

2. ¿Qué contrapeso habría que añadir a la división 25 para que, apoyándose la barra por su punto medio, siguiera quedando en equilibrio?



Problema VI-19-1.ª

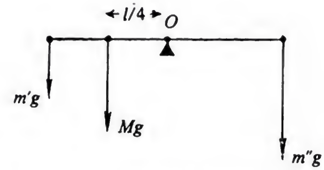
Solución

1) Tomando momentos con respecto al punto de apoyo (Figura VI-19-1.ª):

$$\Sigma N_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m'gx + mg\left(x - \frac{l}{2}\right) - m''g\,(l - x) = 0$$

$$m'x + mx - m\,\frac{l}{2} - m''l + m''x = 0$$

$$\boxed{x = \frac{m\,\dfrac{l}{2} + m''l}{m + m' + m''} = \frac{l}{2}\,\frac{m + 2m''}{m + m' + m''} = \frac{1}{2}\,\frac{50 + 100}{125} = 0{,}6 \text{ m} = 60 \text{ cm}}$$



Problema VI-19-2.ª

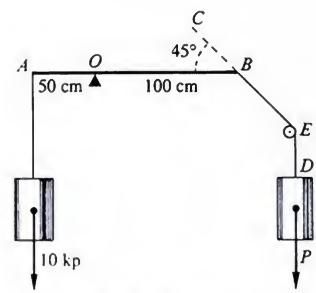
2) Tomando momentos con respecto al punto medio O de la barra (Figura VI-19-2.ª):

$$\Sigma N_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m'g\,\frac{l}{2} + Mg\,\frac{l}{4} - m''g\,\frac{l}{2} = 0$$

simplificando:

$$m' + \frac{M}{2} - m'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{M = 2(m'' - m') = 2(50 - 25) = 50 \text{ g}}$$

Problema 20. Calcular el peso P que hay que colgar de la cuerda BD que pasa por la polea E para que exista equilibrio en la palanca AB, siendo el ángulo $OBC = 45°$.



Problema VI-20

Solución

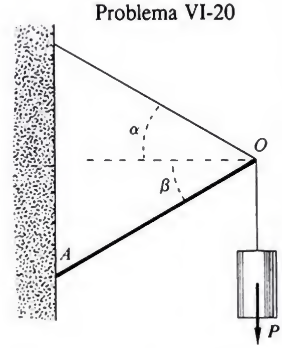
Tomando momentos respecto a O: $\quad 10 \times 50 - P\,100 \cos 45° = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 7{,}07 \text{ kp}}$

Problema 21. Demostrar que cuando el peso del puntal de la figura, es despreciable, la fuerza que actúa sobre el punto A, sigue la dirección del puntal. Determinar tal fuerza (compresión) y la tensión de la cuerda. Hacer las aplicaciones:

1. $\alpha =$ $\quad \beta = 30°$ y $P = 1\,000$ kp.

2. $\alpha = 0$; $\quad \beta = 60°$ y $P = 1\,000$ kp.

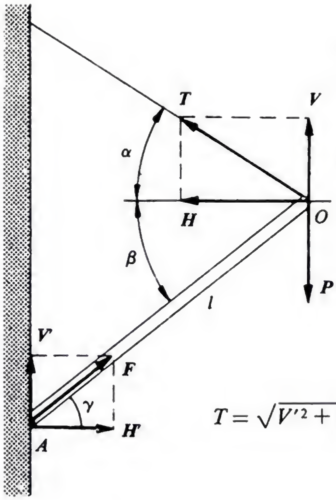
3. $\alpha = 30°$; $\beta = 0$ y $P = 1\,000$ kp.



Problema VI-21

Solución

Tomando momentos con respecto a O (Figura VI-21-1.ª):



Problema VI-21-1.ª

$$H'l\,\text{sen}\beta - V'l\cos\beta = 0$$

luego:

$$\text{tag}\beta = \frac{V'}{H'} = \text{tag}\gamma \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \gamma$$

luego F tendrá la dirección del puntal. Por otra parte:

$$P = V + V' \qquad P = H\text{tag}\alpha + H\text{tag}\beta$$

$$H = H' \qquad H = \frac{P}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta} = H'$$

$$\text{tag}\alpha = \frac{V}{H}$$

$$\text{tag}\beta = \frac{V'}{H'} \qquad V = \frac{P\text{tag}\alpha}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta} \qquad V' = \frac{P\text{tag}\beta}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}$$

$$T = \sqrt{V'^2 + H'^2} = \frac{P}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}\sqrt{1 + \text{tag}^2\alpha} = \frac{P}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}\,\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{P\cos\beta}{\text{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\beta} = \frac{P\cos\beta}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$$

$$F = \sqrt{V'^2 + H'^2} = \frac{P}{\text{tag}\alpha + \text{tag}\beta}\sqrt{1 + \text{tag}^2\beta} = \frac{P\cos\alpha}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)}$$

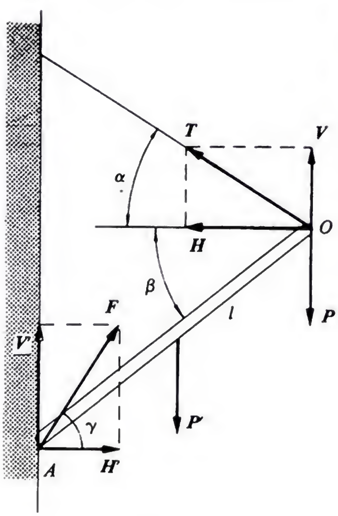
Aplicación:

1) $\boxed{T = 1\,000 \text{ kp}}$ $\qquad \boxed{F = 1\,000 \text{ kp}}$

2) $\boxed{T = \frac{1\,000}{\sqrt{3}} \text{ kp}}$ $\qquad \boxed{F = \frac{2\,000}{\sqrt{3}} \text{ kp}}$

3) $\boxed{T = 1\,000\sqrt{3} \text{ kp}}$ $\qquad \boxed{F = 2\,000\sqrt{3} \text{ kp}}$

Problema 22. El puntal de la figura VI-21 pesa P' y su centro de gravedad está en su centro geométrico. Determinar el módulo y la dirección de la fuerza que actúa sobre el punto en que se sujeta el puntal a la pared y la tensión de la cuerda. Hacer las mismas aplicaciones del problema anterior, con $P' = 200$ kp.



Problema VI-22

Solución

$$V + V' = P + P' \tag{1}$$

$$H = H' \tag{2}$$

Tomando momentos respecto a 0 (Figura VI-22):

$$P'\frac{l}{2}\cos\beta + H'l\,\text{sen}\beta - V'l\cos\beta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{tag}\beta = \frac{2V' - P'}{2H'} \tag{3}$$

teniendo en cuenta que:

$$\text{tag}\alpha = \frac{V}{H} \tag{4}$$

nos resultará que las (1), (2), (3) y (4) constituyen un sistema de 4 ecuaciones con las incógnitas V, H, V' y H', que calculadas resuelven:

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} \qquad F = \sqrt{V'^2 + H'^2} \qquad \text{tag}\gamma = \frac{V'}{H'}$$

Aplicación:

1)

$$V + V' = 1\,200 \text{ kp}$$
$$H = H'$$
$$\text{tag}\,30° = \frac{2V' - 200}{2H'}$$
$$\text{tag}\,30° = \frac{V}{H}$$

$$V = 550 \text{ kp}$$
$$V' = 650 \text{ kp}$$
$$H = H' = 550\sqrt{3} \text{ kp}$$

$$\boxed{T = 1\,100 \text{ kp}}$$
$$\boxed{F = 1\,153 \text{ kp}}$$
$$\text{tag}\gamma = \frac{13}{11\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\gamma = 38°\ 18'\ 24''}$$

2)

$$V + V' = 1\,200 \text{ kp}$$
$$H = H'$$
$$\text{tag}\,60° = \frac{2V' - 200}{2H'}$$
$$V = 0$$

$$V' = 1\,200 \text{ kp}$$
$$H = H' = \frac{1\,100}{\sqrt{3}} \text{ kp}$$

$$\boxed{T = \frac{1\,100}{\sqrt{3}} = 1\,635 \text{ kp}}$$
$$\boxed{F = 1\,358 \text{ kp}}$$
$$\text{tag}\gamma = \frac{12\sqrt{3}}{11} \Rightarrow \boxed{\gamma = 62°\ 6'\ 38''}$$

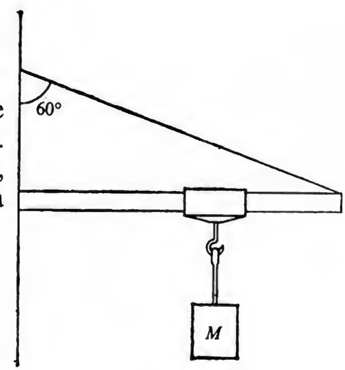
3)

$$V + V' = 1\,200$$
$$H = H'$$
$$V' = 100 \text{ kp}$$
$$\text{tag}\,30° = \frac{V}{H}$$

$$V = 1\,100 \text{ kp}$$
$$H = H' = 1\,100\sqrt{3}$$

$$\boxed{T = 2\,200 \text{ kp}}$$
$$\boxed{F = 1\,908 \text{ kp}}$$
$$\text{tag}\gamma = \frac{1}{11\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\gamma = 3°\ 0'\ 16''}$$

Problema 23. La viga de la figura, que pesa 1 000 kg y tiene 8 m de larga, hace de carril aéreo. Sobre ella desliza un colgador en el que colocamos 2 000 kg de carga. Calcular: la tensión del cable de soporte, la fuerza ejercida por la pared sobre la viga, y el ángulo que forma ésta con la horizontal cuando la carga se encuentra a una distancia de 6 m de la pared. (Se desprecian los pesos de colgador y cable).



Problema VI-23

Solución

$$V + V' = (M + m)\,g$$
$$H = H'$$

tomando momentos respecto a O (Figura VI-23-1.ª):

$$Mgx + mg\frac{l}{2} - Vl = 0$$

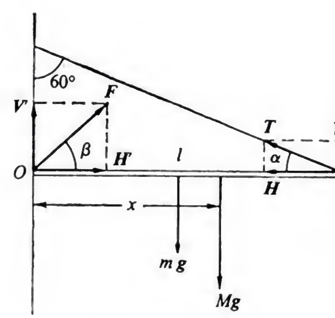
que junto con:

$$\text{tag}\alpha = \frac{V}{H}$$

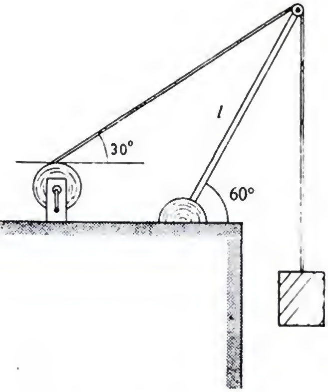
constituye un sistema de cuatro ecuaciones con las incógnitas V, H, V' y H' que calculadas y sustituidas en:

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} \qquad F = \sqrt{V'^2 + H'^2} \qquad \text{tag}\beta = \frac{V'}{H'}$$

nos resuelve el problema.



Problema VI-23-1.ª



Problema VI-24

Aplicación:

$$\begin{array}{l|l|l} m = 1\,000 \text{ kg} & V + V' = 3\,000 & \\ M = 2\,000 \text{ kg} & H = H' & V = 2\,000 \text{ kp} \\ \alpha = 30^\circ & 6 \times 2\,000 + 4 \times 1\,000 - 8\,V = 0 & H = H' = 3\,464 \text{ kp} \\ x = 6 \text{ m} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{V}{H} & V' = 1\,000 \text{ kp} \\ l = 8 \text{ m} & & \end{array}$$

$\boxed{T = 4\,000 \text{ kp}}$ $\boxed{F = 1\,605 \text{ kp}}$ $\boxed{\beta = 16^\circ\, 6'\, 9''}$

Problema 24. La pluma de 4 m de la grúa de la figura pesa 200 kg y está sosteniendo una carga de 1 000 kg. Calcular la tensión de la cuerda, la fuerza sobre el perno y el ángulo que forma ésta con la horizontal.

Solución

$$V' = (M + m)\,g + V$$
$$H = H'$$

Tomando momentos respecto a O (Figura VI-24-1.ª):

$$mg\,\frac{l}{2}\,\cos\gamma + H' l \operatorname{sen}\gamma - V l \cos\gamma = 0$$

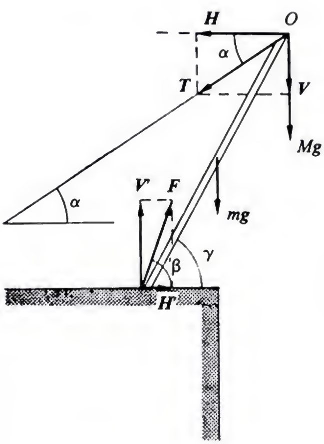
que junto con:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{V}{H}$$

constituye un sistema de cuatro ecuaciones con las incógnitas V, H, V' y H' que calculadas y sustituidas en:

$$T = \sqrt{V^2 + H^2} \qquad F = \sqrt{V'^2 + H'^2} \qquad \operatorname{tag}\beta = \frac{V'}{H'}$$

nos resuelve el problema.



Problema VI-24-1.ª

Aplicación:

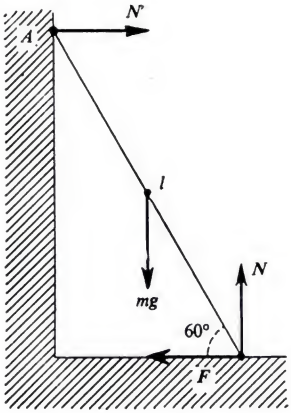
$$\begin{array}{l|l|r} M = 1\,000 \text{ kg} & V' = 1\,200 + V & V = 550 \text{ kp} \\ m = 200 \text{ kg} & H = H' & V' = 1\,750 \text{ kp} \\ \alpha = 30^\circ & 100 \cos 60^\circ + H' \operatorname{sen} 60^\circ - V' \cos 60^\circ = 0 & H = H' = 953 \text{ kp} \\ \gamma = 60^\circ & \operatorname{tag} 30^\circ = \dfrac{V}{H} & \end{array}$$

$\boxed{T = 1\,100 \text{ kp}}$ $\boxed{F = 1\,993 \text{ kp}}$ $\boxed{\beta = 61^\circ\, 26'}$

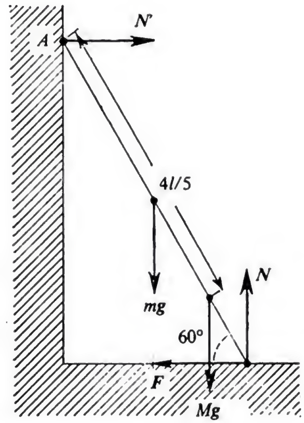
Problema 25. Una escalera de mano de 3 m de longitud se apoya sin rozamientos sobre una pared vertical y el suelo horizontal, formando un ángulo de 60° con el suelo. La escalera tiene cinco travesaños equidistantes y pesa en total 40 kg, que pueden considerarse homogéneamente repartidos. (Considerar el CM en el centro de la escalera). El último travesaño coincide, además, con el extremo superior de la escalera. Calcúlese la fuerza que habrá que ejercer horizontalmente sobre la base de la escalera, para que ésta no resbale, en los casos siguientes:

1. La escalera sola.
2. Con un hombre de 80 kg subido, en posición vertical, al primer travesaño.
3. Id., íd., íd., al cuarto travesaño.

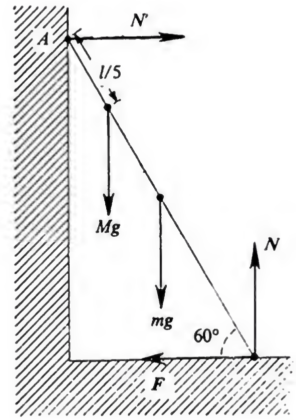
Solución



Problema VI-25-1.ª



Problema VI-25-2.ª



Problema VI-25-3.ª

1) Aplicando las condiciones de equilibrio y tomando momentos con respecto al punto A(Figura VI-25-1.ª).

$$\left.\begin{array}{l} N = mg \\ Nl\cos\varphi - Fl\operatorname{sen}\varphi - mg\,\dfrac{l}{2}\cos\varphi = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{F = \dfrac{mg}{2\operatorname{tag}\varphi} = \dfrac{40}{2\sqrt{3}} = 11{,}5 \text{ kp}}$$

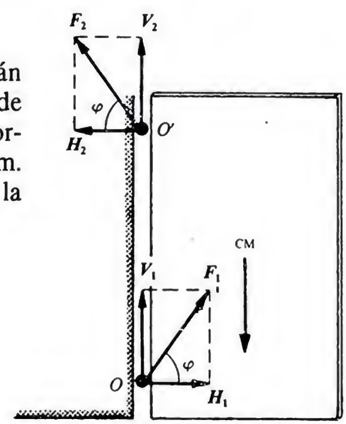
2) Haciendo lo mismo que en 1) (Figura VI-25-2.ª):

$$\left.\begin{array}{l} N = mg + Mg \\ Nl\cos\varphi - Fl\operatorname{sen}\varphi - Mg\,\dfrac{4l}{5}\cos\varphi - mg\,\dfrac{l}{2}\cos\varphi = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{F = g\dfrac{2M + 5m}{10\operatorname{tag}\varphi} = \dfrac{160 + 200}{10\sqrt{3}} = 20{,}8 \text{ kp}}$$

3) Haciendo lo mismo que en 1) y 2) (Figura VI-25-3.ª):

$$\left.\begin{array}{l} N = mg + Mg \\ Nl\cos\varphi - Fl\operatorname{sen}\varphi - Mg\,\dfrac{l}{5}\cos\varphi - mg\,\dfrac{l}{2}\cos\varphi = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{F = g\dfrac{8M + 5m}{10\operatorname{tag}\varphi} = \dfrac{640 + 200}{10\sqrt{3}} = 48{,}5 \text{ kp}}$$

Problema 26. Una puerta que pesa 60 kg está sujeta por dos goznes que están separados 1,80 m. Cada gozne soporta la mitad del peso de la puerta y su centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico. La distancia de los goznes a los bordes superior e inferior de la puerta es la misma. La anchura de la puerta es de 1,20 m. Calcular las fuerzas que actúan sobre cada gozne y el ángulo que forman con la horizontal.



Problema VI-26

Solución

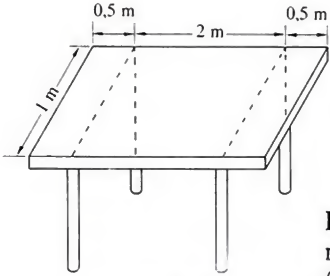
$$V_1 = V_2 = 30 \text{ kp}$$
$$H_1 = H_2$$

Tomando momentos con respecto al punto O:

$$180H_2 - 60 \times 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_2 = 20 \text{ kp} = H_1$$

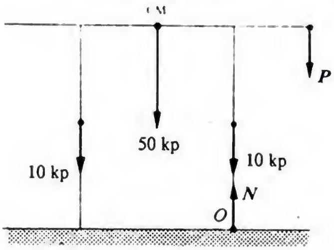
$$\boxed{F_1 = F_2 = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = 10\sqrt{13}\ \text{kp} = 36\ \text{kp}}$$

$$\text{tag}\varphi = \frac{V_1}{H_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi = 56°\ 18'\ 36''}$$



Problema VI-27

Problema 27. Calcular el mínimo peso P que se debe colocar en el extremo de la mesa de la figura para que vuelque. El peso del tablero es 50 kg y el de cada pata 5 kg. Las dimensiones quedan expresadas en la figura. El centro de gravedad de la mesa está en la vertical que pasa por el centro del tablero.

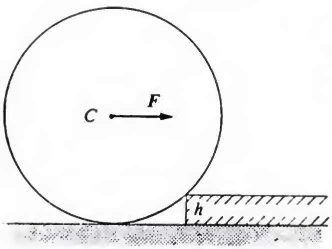


Problema VI-27-1.ª

Solución

Supongamos el peso P colocado en el extremo derecho de la mesa. El peso de las patas es 10 kg y su línea de acción corta a la línea que une los extremos superiores de las patas en su punto medio. La fuerza que ejerce el suelo sobre la mesa estará localizada, en el caso extremo que estamos estudiando, en las patas de la derecha. Tomando momentos con respecto al punto O, nos quedará:

$$\Sigma N_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 50 \times 1 + 10 \times 2 - P0{,}5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = 140\ \text{kp}}$$



Problema VI-28

Problema 28. Calcular la fuerza horizontal F que es necesario aplicar al centro de un rodillo de 100 kg de masa, y 50 cm de radio para hacerla pasar por encima del obstáculo representando en la figura, que tiene 10 cm de altura.

Solución

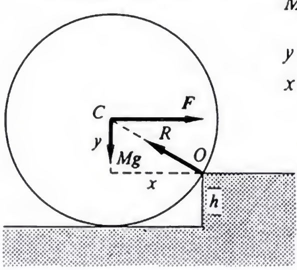
Para que F sea la mínima, no existirá la fuerza que el suelo horizontal ejerce sobre el rodillo; tomando momentos respecto de O e igualando a cero, puesto que estamos en el caso extremo, tendremos:

$$Mgx - Fy = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F = Mg\frac{x}{y}$$

$$y = R - h$$

$$x = \sqrt{R^2 - y^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$

$$\boxed{F = Mg\ \frac{\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h} = 100\ \frac{\sqrt{2 \times 50 \times 10 - 100}}{40} = 75\ \text{kp}}$$



Problema VI-28-1.ª

C) BALANZA

Problema 29. **1.** Indicar las pesas que se deben poner en uno de los palillos de una balanza exacta, para equilibrar una masa de 48,794 g, colocada en el otro platillo.

2. Suponiendo que el reiter de la balanza tuviera una masa de 8 miligramos, determinar el error absoluto y relativo al equilibrar la masa de 48,794 g.

Solución

1)

2 pesas de 20	g	40	g
1 » » 5	g	5	g
1 » » 2	g	2	g
1 » » 1	g	1	g

1 »	» 0,5 g	....	0,5 g
1 »	» 0,2 g	....	0,2 g
1 »	» 0,05 g	....	0,05 g
2 »	» 0,02 g	....	0,04 g
El reiter en la división 4		....	0,004 g
			48,794 g

2) Para equilibrar la masa de 0,004 g con un reiter de 0,008 g se deberá colocar éste en una división n en la que se cumpla:

$$0{,}004\, l = 0{,}008\, n\, \frac{l}{10} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{10 \times 0{,}004}{0{,}008} = 5$$

Estando puesto el reiter en la división 5, creeremos que el valor de la pesada del problema anterior es 48,795 g en vez de 48,794 g, habiéndose obtenido un error de 0,001 g por exceso.

$$\boxed{\epsilon_r = \frac{0{,}1}{48{,}794}\ \% \simeq 0{,}002\ \%}$$

Problema 30. Un comerciante muy ladrón no se contenta con el 20 por ciento de ganancia sobre el precio de coste, que le permiten las disposiciones legales; desea ganar el 50 por ciento; para ello alarga uno de los brazos de la balanza y pesa poniendo la mercancía en el platillo del brazo más largo, y las pesas en el otro. Siendo 20 cm la longitud del brazo correspondiente a las pesas ¿qué longitud debe tener el otro brazo?

Solución

Si p es el precio de coste de 1 g, por m g que marcan las pesas, el comerciante cobra:

$$pm + 0{,}20\,pm$$

Este ingreso es igual al precio de coste de m' gramos de mercancía (que es lo que realmente entrega) más el 50 por 100.

$$pm + 0{,}20\,pm = pm' + 0{,}50\,pm' \qquad \Rightarrow \qquad 1{,}20\,m = 1{,}50\,m'$$

Aplicando la condición de equilibrio de la balanza, siendo el brazo correspondiente a las pesas 20 cm y el otro x:

$$20\,m = x\,m'$$

Por división de las dos últimas, obtendremos:

$$\frac{1{,}20}{20} = \frac{1{,}50}{x} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = \frac{20 \times 1{,}50}{1{,}20} = 25 \text{ cm}}$$

Problema 31. Un dependiente del comerciante ladrón, del problema anterior, pensando tal vez, «quien roba a un ladrón...», vende a sus familiares y amigos poniendo la mercancía en el platillo del brazo corto y las pesas en el otro. ¿Qué pérdida (tanto por ciento del precio de coste) origina al comerciante?

Solución

Razonando como en el problema anterior

$$pm + 0{,}20\,pm = pm' - \frac{x}{100}\,pm'$$

siendo x el tanto por cien de pérdida sobre el precio de coste.

$$1{,}20\,m = m'\left(1 - \frac{x}{100}\right)$$

Los brazos de la balanza son:

$$\left.\begin{array}{lll} 25 \text{ cm} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{brazo de las pesas } (m) \\ 20 \text{ cm} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \text{brazo de la mercancía } (m') \end{array}\right| \Rightarrow \quad 25\,m = 20\,m'$$

Por división:

$$\frac{1{,}20}{25} = \frac{1 - \dfrac{x}{100}}{20} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = 100 - \frac{2\,400}{25} = 4\ \%}$$

Capítulo VII

LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL DE NEWTON
PESO - CENTRO DE MASA - ROZAMIENTOS

A) GRAVITACION: PESO

FORMULARIO

LEY DE GRAVITACIÓN UNIVERSAL DE NEWTON:

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{M_0 M}{r^3}\,\boldsymbol{r} \qquad G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}$$

$$\boldsymbol{g} = -G\,\frac{M_0}{r^3}\,\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{P} = M\boldsymbol{g}$$

Problema 1. **1.** Calcular el peso en kp de un hombre de 70 kg de masa, que estuviese a una altura en la que la intensidad de la gravedad es 970 dyn/g.
2. ¿Cuál es el valor de la intensidad del campo gravitatorio para que el individuo pese 65 kp?

Solución

1)

$$\boxed{P = Mg = \frac{70}{9{,}8}\,9{,}7 = 69{,}28\ \mathrm{kp}}$$

2)

$$65 = \frac{70}{9{,}8}\,g' \quad \Rightarrow \quad \boxed{g' = \frac{65 \times 9{,}8}{70} = 9{,}1\ \mathrm{m/s^2}}$$

Problema 2. **1.** ¿Cuánto pesaría un hombre de 70 kg en un planeta de masa 10 veces menor y radio 10 veces menor que la masa y radio de la Tierra.
2. ¿Y en otro planeta de radio 10 veces menor y masa 100 veces mayor que los de la Tierra?

Solución

1) En la Tierra:

$$P_0 = 70\ \mathrm{kp} = G\,\frac{M_0 M}{R_0^2}$$

En el otro planeta:

$$P = G\,\frac{0{,}1\,M_0 M}{(0{,}1\,R_0)^2}$$

Por división

$$\frac{70}{P} = \frac{0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = 700 \text{ kp}}$$

1) En la Tierra:

$$P_0 = 70 \text{ kp} = G\,\frac{M_0 M}{R_0^2}$$

En el otro planeta:

$$P = G\,\frac{0{,}01\,M_0 M}{(0{,}1\,R_0)^2} = G\,\frac{0{,}01\,M_0 M}{0{,}01\,R_0^2} = G\,\frac{M_0 M}{R_0^2}$$

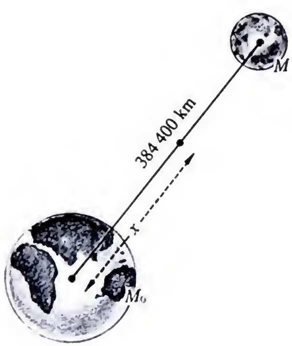
Comparando las dos expresiones anteriores se obtiene:

$$\boxed{P = 70 \text{ kp}}$$

Problema 3. ¿A qué altura sobre el nivel del mar habría que subir un cuerpo para que su peso fuera la mitad que a ese nivel? ($R_0 = 6\,370$ km)

Solución

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = G\,\dfrac{M_0 M}{R_0^2} \\[2ex] P = \dfrac{P_0}{2} = G\,\dfrac{M_0 M}{(R_0 + h)^2} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{(R_0 + h)^2}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = R_0\,(\sqrt{2} - 1) = 2\,638{,}5 \text{ km}}$$



Problema VII-4

Problema 4. ¿En qué punto se equilibran las atracciones que ejercen la Tierra y la Luna sobre un cuerpo? Distancia entre los centros de los dos astros = 384 400 km. La masa de la Tierra es 81 veces mayor que la de la Luna.

Solución

Llamando M a la masa de la Luna, la masa de la Tierra será 81 M. Si x es la distancia entre el centro de la Tierra y un punto material en equilibrio (384400 — x) km es la distancia el punto a la Luna. Llamamos m a la masa del punto material. Al ser iguales las dos atracciones dadas por la ley de gravitación universal, se verifica:

$$G\,\frac{81\,Mm}{x^2} = G\,\frac{Mm}{(384\,400 - x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{81}{x^2} = \frac{1}{(384\,400 - x)^2}$$

$$\pm\, x = 9 \times 384\,400 - 9\,x \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \boxed{x_1 = \dfrac{9 \times 384\,400}{10} = 345\,960 \text{ km}} \\[2ex] \boxed{x_2 = \dfrac{9 \times 384\,400}{8} = 432\,450 \text{ km}} \end{array}\right.$$

Esta última solución corresponde a un punto más allá de la Luna donde son iguales las atracciones de los dos astros, y del mismo sentido, en tal punto no existe equilibrio.

Problema 5. Determinar la masa y la densidad media de la Tierra. Radio terrestre = 6 370 km. (Emplear como datos los valores de G y g_0).

Solución

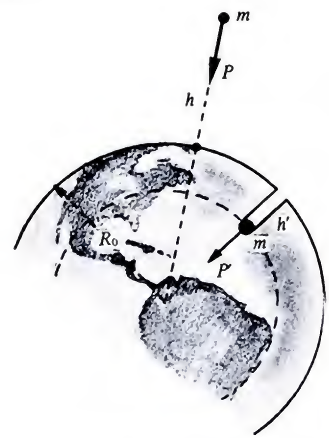
1) $$g_0 = G\,\frac{M_0}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_0 = \frac{g_0 R_0{}^2}{G} = \frac{9{,}8 \times 6\,370^2\ 10^6}{6{,}67 \times 10^{-11}} = 59{,}62 \times 10^{23}\ \text{kg}}$$

2) $$\rho = \frac{M_0}{V_0} = \frac{3 g_0 R_0{}^2}{4 G \pi R_0{}^3} = \frac{3 g_0}{4 G \pi R_0}$$

Trabajamos en el sistema Giorgi:

$$\boxed{\rho = \frac{3 \times 9{,}8}{4 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \pi\, 6\,370 \times 10^3} = 5\,500\ \text{kg/m}^3 = 5{,}5\ \text{g/cm}^3}$$

Problema 6. Supuesta la Tierra esférica de radio R_0 y homogénea (densidad constante), calcular la profundidad a que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura h sobre su superficie.



Problema VII-6

Solución

Peso a una altura h:

$$P = G\,\frac{m M_0}{(R_0 + h)^2}$$

en la que:

$$M_0 = \frac{4}{3}\,\pi R_0^3 \rho$$

Peso a una profundidad h':

$$P' = G\,\frac{m M}{(R_0 - h')^2}$$

en la que:

$$M = \frac{4}{3}\,\pi\,(R_0 - h')^3\,\rho$$

igualando y simplificando queda:

$$\frac{R_0^3}{(R_0 + h)^2} = R_0 - h' \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = R_0 - \frac{R_0^3}{(R_0 + h)^2}}$$

Problema 7. La masa del Sol es 324 440 veces mayor que la de la Tierra y su radio 108 veces mayor que el terrestre. ¿Cuál será la altura alcanzada por un proyectil que se lanzase verticalmente hacia arriba desde la superficie solar, a una velocidad de 720 km/h? ¿Cuántas veces es mayor el peso de un cuerpo en el Sol que en la Tierra?

Solución

1) $$v_0 = 720\ \text{km/h} = 200\ \text{m/s}$$

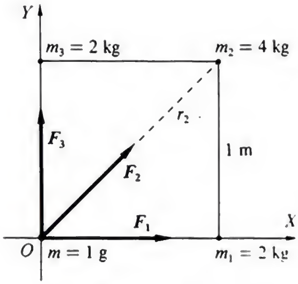
$$v_0 = \sqrt{2 g_s h} \qquad h = \frac{v_0^2}{2 g_s}$$

$$\left.\begin{array}{l} g_s = G\,\dfrac{M_s}{R_s^2} = G\,\dfrac{324\,440\,M_0}{108^2 R_0^2} \\[2ex] g_0 = G\,\dfrac{M_0}{R_0^2} \end{array}\right| \Rightarrow \quad g_s = \frac{324\,440}{108^2}\ g_0$$

$$\boxed{h = \frac{108^2 v_0^2}{324\,440 \times 2g_0} = \frac{108^2 \times 4 \times 10^4}{324\,440 \times 2 \times 9{,}8} \simeq 73{,}4 \text{ m}}$$

2) $$\left.\begin{array}{l} P_s = Mg_s \\ P_0 = Mg_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{P_s}{P_0} = \frac{g_s}{g_0} = \frac{324\,440}{108^2} = 27{,}8}$$

Problema 8. Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) tres masas puntuales de 2, 4 y 2 kg se encuentran en tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado. ¿Cuál es la fuerza que ejercerán sobre una partícula de 1 g colocada en el cuarto vértice?



Problema VII-8

Solución

$$F_1 = F_3 = 6{,}67 \times 10^{-11}\, \frac{2 \times 10^{-3}}{1^2} = 13{,}34 \times 10^{-14} \text{ N}$$

$$F_2 = G\,\frac{m m_2}{r_2^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\, \frac{4 \times 10^{-3}}{2} = 13{,}34 \times 10^{-14} \text{ N}$$

$$\varphi_1 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1 \cos\varphi_1 = 13{,}34 \times 10^{-14} \text{ N} \\ F_{1y} = F_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\varphi_2 = 45° \quad \left| \begin{array}{l} F_{2x} = F_2 \cos\varphi_2 = 13{,}34 \times 10^{-14}\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \\ F_{2y} = F_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = 13{,}34 \times 10^{-14}\, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ N} \end{array}\right.$$

$$\varphi_3 = 90° \quad \left| \begin{array}{l} F_{3x} = F_3 \cos\varphi_3 = 0 \\ F_{3y} = F_3 \operatorname{sen}\varphi_3 = 13{,}34 \times 10^{-14} \text{ N} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = 13{,}34 \times 10^{-14} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \text{ N}}$$

$$F = 32{,}20 \times 10^{-14} \text{ N}$$

B) CENTRO DE MASA

FORMULARIO

COORDENADAS DEL CENTRO DE MASA:

$$X_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \qquad Y_G = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \qquad Z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Si el centro de masa se toma como origen de coordenadas:

$$\sum_i m_i x_i = 0 \qquad \sum_i m_i y_i = 0 \qquad \sum_i m_i z_i = 0$$

Las ecuaciones diferenciales del centro de masa son:

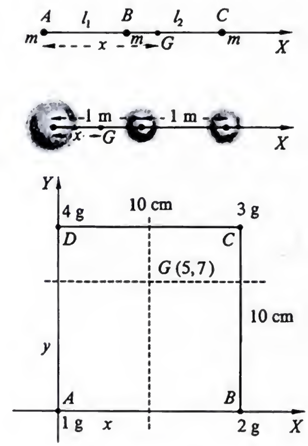
$$x_G = \frac{\int x\,dm}{M} \qquad y_G = \frac{\int y\,dm}{M} \qquad z_G = \frac{\int z\,dm}{M}$$

Podemos definir un vector que nos da la posición del centro de masa, sus componentes coordenadas tendrán que ser (x_G, y_G, z_G,). Si los vectores de posición de un sistema de n partículas de masas, m_1, m_2, m_3..., son $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$... escribiremos:

$$\boldsymbol{R} = \frac{\Sigma\, m_i \boldsymbol{r}_i}{M} = \frac{\int \boldsymbol{r}\, dm}{M}$$

siendo $M = \Sigma\, m_i$

Problema 9. **1.** Determinar la posición del centro de masas formado por tres puntos materiales A, B, C, de la misma masa, situados en línea recta, siendo $AB = l_1$ y $BC = l_2$.
2. Tres bolas de 8, 2 y 2 kg están en la línea recta y separados sus centros unos de otros 1 m y colocadas en el orden indicado. Determinar la posición del centro de masas del sistema.
3. En los vértices sucesivos A, B, C y D de un cuadro de lado 10 cm. hay localizadas masas de 1, 2, 3 y 4 g respectivamente. Determinar la posición del centro de masas.



Problema VII-9

Solución

1)
$$x = \frac{m \times 0 + l_1 m + (l_1 + l_2) m}{3m} = \frac{m(2l_1 + l_2)}{3m} = \frac{2l_1 + l_2}{3}$$

2)
$$x = \frac{8 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2}{12} = \frac{6}{12} = 0{,}5 \text{ m}$$

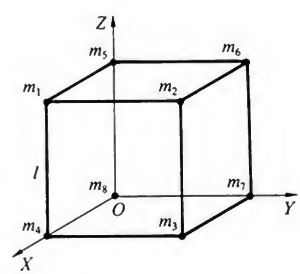
El centro de masas se encuentra a 0,5 m del centro de la primera bola.

3)
$$x = \frac{2 \times 10 + 3 \times 10}{10} = \frac{50}{10} = 5 \text{ cm}$$

$$y = \frac{3 \times 10 + 4 \times 10}{10} = \frac{70}{10} = 7 \text{ cm}$$

G es el punto (5, 7) cm.

Problema 10. En cada uno de los vértices de un cubo de arista l están localizadas las masas expresadas en la figura. Determinar las coordenadas del centro de masas.



Problema VII-10

Solución

Llamando m a la suma de todas las masas:

$$x_G = \frac{m_1 l + m_2 l + m_3 l + m_4 l}{m} = \frac{(m_1 + m_2 + m_3 + m_4) l}{m}$$

$$y_G = \frac{(m_2 + m_3 + m_6 + m_7) l}{m}$$

$$z_G = \frac{(m_1 + m_2 + m_5 + m_6) l}{m}$$

Problema 11. Tres masas puntuales de 2, 3 y 4 kg se encuentran en A (1, 2, 1), B (−2, 1, 0) y C (3, 2, 4) referidos a un sistema de ejes cartesianos y medidas estas coordenadas en metros. Calcular el vector de posición del centro de masa.

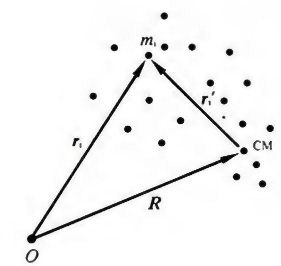
Solución

$$\boldsymbol{R} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M}$$

$$\left.\begin{aligned} m_1\boldsymbol{r}_1 &= 2(\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} \text{ kg·m} \\ m_2\boldsymbol{r}_2 &= 3(-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}) = -6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j} \text{ kg·m} \\ m_3\boldsymbol{r}_3 &= 4(3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}) = 12\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k} \text{ kg·m} \\ M &= 2+3+4 = 9 \text{ kg} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{R} = \frac{8}{9}\boldsymbol{i} + \frac{5}{3}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \text{ m}}$$

Problema 12. Tres partículas de masas $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 8$ kg y $m_3 = 7$ kg se encuentran en un instante determinado en A (1, 0, 2), B (2, 1, 1) y C (0, 1, 2) estando estas coordenadas medidas en metros; y poseen velocidades: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ m/s, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ m/s y $\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ m/s. Calcular:

1. Posición del CM en el instante considerado.
2. Velocidad del CM respecto al sistema de referencia en que hemos dado los datos.
3. Velocidad de las partículas referidas al CM como origen.



Problema VII-12

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k} \text{ m} \\ \boldsymbol{r}_2 &= 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} \text{ m} \\ \boldsymbol{r}_3 &= \boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k} \text{ m} \end{aligned}\right| \quad \boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{R} = 1{,}05\boldsymbol{i} + 0{,}75\boldsymbol{j} + 1{,}6\boldsymbol{k} \text{ m}}$$

2)

$$\boldsymbol{R} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i}{M}$$

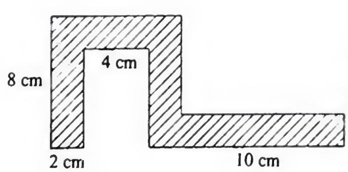
$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3}{m_1+m_2+m_3} = 0{,}95\boldsymbol{i} + 0{,}95\boldsymbol{j} - 0{,}85\boldsymbol{k} \text{ m/s}}$$

3) De la figura obtenemos:

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}$$

luego:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1' &= \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = 0{,}05\boldsymbol{i} - 2{,}95\boldsymbol{j} + 1{,}85\boldsymbol{k} \text{ m/s} \\ \boldsymbol{v}_2' &= \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v} = -0{,}95\boldsymbol{i} + 0{,}05\boldsymbol{j} - 0{,}15\boldsymbol{k} \text{ m/s} \\ \boldsymbol{v}_3' &= \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v} = 1{,}05\boldsymbol{i} + 2{,}05\boldsymbol{j} - 1{,}15\boldsymbol{k} \text{ m/s} \end{aligned}}$$



Problema VII-13

Problema 13. Calcular la posición del centro de gravedad de la superficie plana representada en la figura.

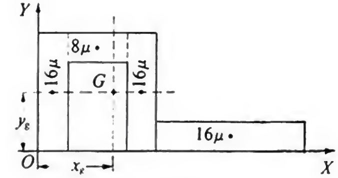
Solución

Llamando μ a la masa de la unidad de superficie, tendremos:

$$x_G = \frac{16\mu + 8\mu 4 + 16\mu 7 + 16\mu 12}{16\mu + 8\mu + 16\mu + 16\mu} \simeq 6{,}28 \text{ cm}$$

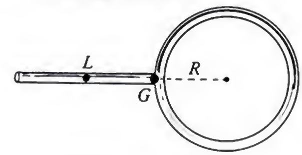
$$y_G = \frac{16\mu 4 + 8\mu 7 + 16\mu 4 + 16\mu}{16\mu + 8\mu + 16\mu + 16\mu} \simeq 3{,}57 \text{ cm}$$

$$\boxed{G\ (6{,}28,\ 3{,}57)\ \text{cm}}$$



Problema VII-13-1.ª

Problema 14. Tenemos un alambre homogéneo con el que hemos construido un objeto de la forma de la figura. (Varilla de longitud L y radio el aro igual a R). Hallar la relación que debe existir entre R y L para que el centro de gravedad del sistema sea G.

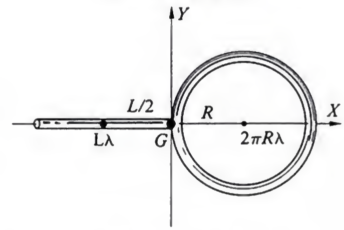


Problema VII-14

Solución

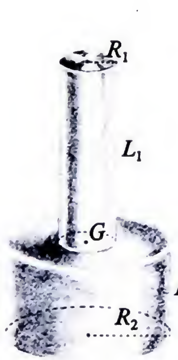
Si λ es la masa de la unidad de longitud, la masa de la varilla será λL y la del aro $\lambda 2\pi R$; podemos considerar tales masas concentradas en el centro de la varilla y del aro; se deberá verificar:

$$\Sigma m_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda L \frac{L}{2} - \lambda 2\pi R R = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{L^2}{2} = 2\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{L}{R} = 2\sqrt{\pi}}$$

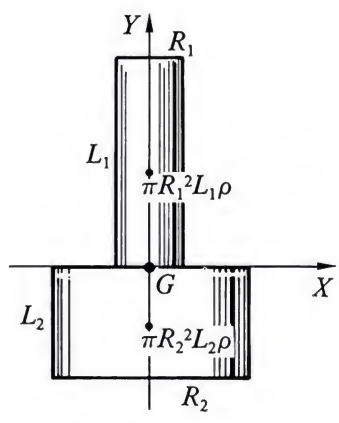


Problema VII-14-1.ª

Problema 15. Hallar la ley que relaciona las alturas L_1 y L_2 y los radios R_1 y R_2 de los cilindros macizos y homogéneos de la figura, para que el centro de gravedad del sistema sea G (centro común de las caras de contacto).



Problema VII-15



Problema VII-15-1.ª

Solución

Llamando ρ a la masa de la unidad de volumen, la de cada cilindro será:

$$M_1 = \pi R_1^2 L_1 \rho$$
$$M_2 = \pi R_2^2 L_2 \rho$$

Tomando el origen de coordenadas en el centro de gravedad, como eje de ordenadas el eje de los cilindros y considerando tales masas concentradas en el centro de cada cilindro, se deberá verificar:

$$\Sigma m_i y_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi R_1^2 L_1 \rho \frac{L_1}{2} - \pi R_2^2 L_2 \rho \frac{L_2}{2} = 0$$

o sea:

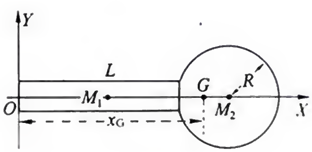
$$R_1^2 L_1^2 = R_2^2 L_2^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{L_2^2}{L_1^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_2}{L_1}}$$

Problema VII-16

Problema 16. Calcular la posición del centro de gravedad de la pieza homogénea de la figura. $R = 30$ cm, $r = 10$ cm y $L = 1$ m.

Solución

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \frac{M}{V} \qquad \left| \quad \begin{array}{l} M_1 = \pi r^2 L \rho \\ M_2 = \dfrac{4}{3} \pi R^3 \rho \end{array} \right.$$

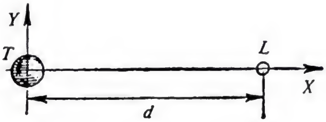


Problema VII-16-1.ª

$$x_G = \frac{\pi r^2 L \rho \dfrac{L}{2} + \dfrac{4}{3} \pi R^3 \rho (L + R)}{\pi r^2 L \rho + \dfrac{4}{3} \pi R^3 \rho} = \frac{3r^2 L^2 + 8R^3(L + R)}{6r^2 L + 8R^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_G = 112{,}6 \text{ cm}}$$

Problema 17. La masa de la Luna es 0,012 la masa de la Tierra; el radio de la Luna es 0,27 el radio de la Tierra; y la distancia media entre sus centros es 60,3 radios terrestres. Calcular:
1. La situación del centro de gravedad del sistema Tierra-Luna.
1. El valor de la gravedad en la superficie lunar.

Solución



Problema VII-17

$$M_L = 0{,}012\, M_0 \qquad R_L = 0{,}27\, R_0 \qquad d = 60{,}3\, R_0$$

1) $$\boxed{x_G = \frac{M_L d}{M_0 + M_L} = \frac{0{,}012 M_0\, 60{,}3 R_0}{M_0 + 0{,}012 M_0} = \frac{0{,}7236}{1{,}012} R_0 = 0{,}715\, R_0}$$

2) $$g_L = G \frac{M_L}{R_L^2} \qquad g_0 = G \frac{M_0}{R_0^2} \qquad \boxed{g_L = g_0 \frac{M_L R_0^2}{M_0 R_L^2} = 9{,}8 \frac{0{,}012 M_0 R_0^2}{M_0 0{,}27^2 R_0^2} = 1{,}61 \text{ m/s}^2}$$

Problema 18. El centro de gravedad del sistema formado por la Tierra y la Luna dista 379 440 km del centro de la Luna. Sabiendo que la distancia Luna-Tierra es de 384 000 km calcular a partir de estos datos cuántas veces mayor es la masa de la Tierra que la de la Luna.

Solución

Tomando el origen de coordenadas en el centro de gravedad del sistema, obtenemos:

$$\Sigma m_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad M_0\,(384\,000 - 379\,440) - M_L\, 379\,440 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{M_0}{M_L} \simeq 83}$$

Problema 19. Un recipiente de forma cilíndrica de 30 cm de altura y que pesa en vacío 0,2 kg se llena totalmente con 1 kg de líquido; en estas condiciones el centro de gravedad está situado en el centro del cilindro. A medida que vaciamos el recipiente el centro de gravedad se desplaza hacia abajo y una vez vacío se encuentra de nuevo en la mitad. ¿Cuál es la altura del líquido para la que el centro de gravedad se encuentra en el punto más abajo?

Solución

Si llamamos m_0 la masa inicial de líquido (1 kg), m la masa de líquido cuando se encuentra a la altura h, M a la masa del recipiente y ρ la densidad del líquido:

$$\left.\begin{array}{l} m_0 = A\,H\rho \\ \\ m = A\,h\,\rho \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad m = m_0\,\frac{h}{H}$$

luego:

$$y_G = \frac{M\dfrac{H}{2} + m_0\dfrac{h}{H}\dfrac{h}{2}}{M + m_0\dfrac{h}{H}} = \frac{1}{2}\,\frac{MH^2 + m_0 h^2}{MH + m_0 h}$$

Sustituyendo en el CGS los valores dados:

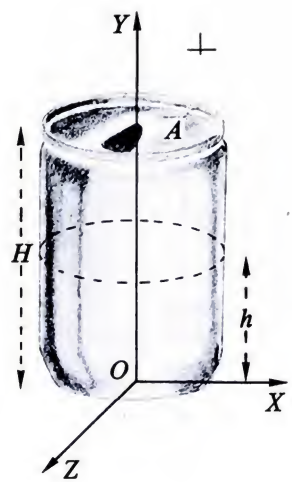
$$y_G = \frac{1}{2}\,\frac{200 \times 30^2 + 1\,000\,h^2}{200 \times 30 \ + 1\,000\,h} = \frac{1}{2}\,\frac{180 + h^2}{6 + h}$$

derivando e igualando a cero:

$$\frac{dy_G}{dh} = \frac{1}{2}\,\frac{(6+h)2h - (180 + h^2)}{(6+h)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad h^2 + 12h - 180 = 0$$

como la solución negativa de esta ecuación no tiene sentido físico; la positiva es la que resuelve el problema:

$$\boxed{h = 8{,}7 \text{ cm}}$$



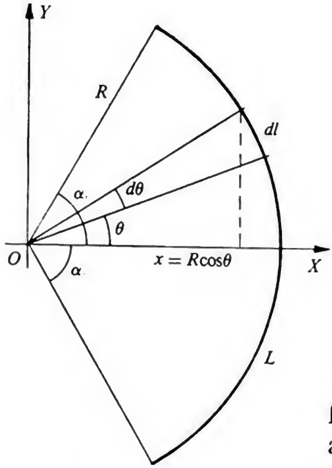
Problema VII-19

Problema 20. Calcular la posición del centro de masa de un arco de circunferencia de amplitud 2α y radio R.

Solución

Tomando como eje X el de simetría, la ordenada y_G del centro de masa será nula.

$$x_G = \frac{\displaystyle\int x\,dm}{M}$$



Problema VII-20

Llamando λ a la masa de la unidad de longitud, un elemento diferencial de arco dl tendrá por masa:

$$dm = \lambda\, dl = \lambda R\, d\theta$$

y como:

$$x = R\cos\theta \qquad\qquad M = \lambda L = 2\lambda R\alpha$$

sustituyendo obtenemos:

$$x_G = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \lambda R^2 \cos\theta\, d\theta}{2\lambda R\alpha} = \frac{R\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{2\alpha}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_G = \frac{R\,\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}}$$

Problema 21. Encontrar la posición del centro de masa de un sector circular de amplitud 2α y radio R. Hacer aplicación del resultado para calcular la posición del centro de masa para un semicírculo.

Solución

Tomando como eje X el de simetría la ordenada y_G será nula. Si llamamos σ a la masa de la unidad de área, tendremos:

$$x_G = \frac{\int x\, dm}{M} = \frac{\int x\sigma\, dA}{\sigma A} = \frac{\int x\, dA}{A}$$

Según el problema anterior la posición del centro de masa del elemento de área dA de la figura estará situado a una distancia del origen igual a $(r\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,/\,\alpha$; y teniendo en cuenta que:

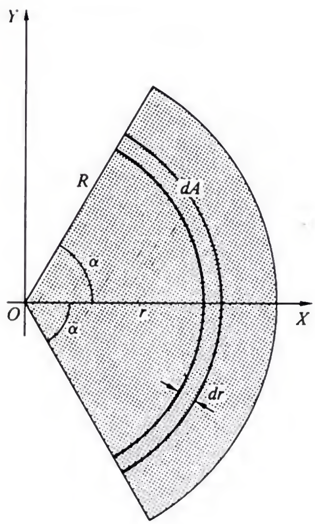
$$dA = 2r\alpha\, dr \qquad\qquad A = \frac{2\alpha\pi R^2}{2\pi} = \alpha R^2$$

sustituyendo nos queda:

$$x_G = \frac{\int_0^R \frac{r\,\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}\, 2r\alpha\, dr}{\alpha R^2} = \frac{2\,\mathrm{sen}\alpha \int_0^R r^2\, dr}{\alpha R^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_G = \frac{2}{3}\,\frac{R\,\mathrm{sen}\alpha}{\alpha}}$$

para un área semicircular ($\alpha = \pi/2$):

$$\boxed{x_G = \frac{4R}{3\pi}}$$



Problema VII-21

Problema 22. Calcular la posición del centro de gravedad de una semiesfera de radio R.

Solución

Tomando los ejes como se indica en la figura, y llamando ρ a la masa de la unidad de volumen, tendremos:

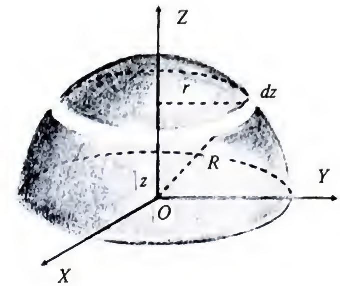
$$x_G = 0 \qquad y_G = 0 \qquad z_G = \frac{\int z\, dm}{M} = \frac{\int z\rho\, dV}{\rho V} = \frac{\int z\, dV}{V}$$

como:

$$dV = \pi r^2 dz = \pi (R^2 - z^2) dz \qquad V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

luego:

$$z_G = \frac{\displaystyle\int_0^R z\pi(R^2 - z^2)dz}{\dfrac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3\displaystyle\int_0^R (R^2 z - z^3)dz}{2R^3} = \frac{3\left[R^2 \dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^4}{4}\right]_0^R}{2R^3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z_G = \frac{3}{8} R}$$



Problema VII-22

Problema 23. Determinar la posición del centro de gravedad de un cono o pirámide rectos y homogéneos.

Solución

Si la masa específica del cuerpo es ρ, la masa de la rebanada dibujada en la figura es:

$$dm = A' dz\, \rho$$

y verificándose:

$$\frac{A'}{z^2} = \frac{A}{h^2} \qquad \Rightarrow \qquad dm = A \frac{z^2}{h^2} \rho\, dz$$

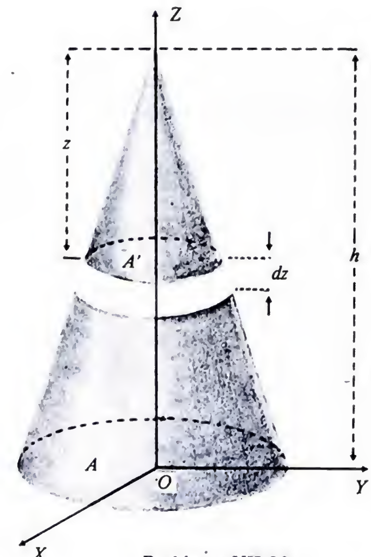
La masa total del cono (o pirámide) es:

$$M = \frac{1}{3} A h \rho$$

y la distancia del centro de gravedad al vértice del cono (o pirámide) es:

$$\boxed{z_G = \frac{\displaystyle\int_0^h z\, dm}{M} = \frac{\displaystyle\int_0^h A \frac{\rho}{h^2} z^3 dz}{\dfrac{1}{3} A h \rho} = \frac{3A\rho}{A h^3 \rho} \int_0^h z^3 dz = \frac{3}{h^3}\frac{h^4}{4} = \frac{3}{4} h}$$

Por simetría el centro de gravedad debe estar sobre la propia altura del cono o la pirámide, y situado a 3/4 de su altura del vértice (a 1/4 de su altura de base).



Problema VII-23

C) ROZAMIENTO DE SISTEMAS EN EQUILIBRIO ESTATICO

FORMULARIO

DESLIZAMIENTO:

$$0 \leqslant R_{\text{estático}} \leqslant \mu_e N$$

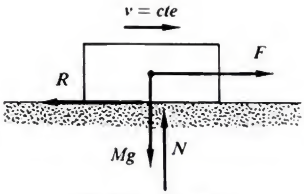
$$R_{\textit{dinámico}} = \mu_d N$$

RODADURA:

$$N_R = \rho N \qquad \left([\rho] = L^{-1}\right)$$

N_R: par de rodadura. N: fuerza normal.

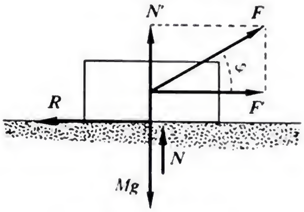
Problema 24. Calcular la fuerza necesaria para arrastrar por el suelo horizontal un bloque de 100 kg, si su coeficiente dinámico de rozamiento es 0,25.



Problema VII-24

Solución

$$\boxed{F = R = \mu N = 0{,}25 \times 100 = 25 \text{ kp}}$$

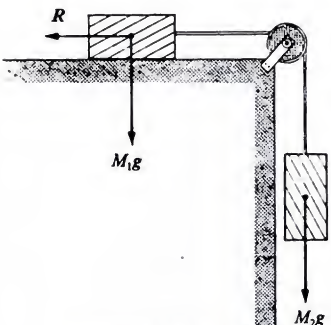


Problema VII-25

Problema 25. Queremos arrastrar por el suelo horizontal un bloque de 100 kg con movimiento uniforme; para ello le atamos una cuerda y tiramos de ella formando un ángulo de 30° con el suelo. Calcular la fuerza necesaria. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el suelo y el bloque vale 0,3.

Solución

$$F' = R \quad \left| \begin{array}{l} F' = F\cos\varphi \\ R = \mu N = \mu\,(Mg - F\mathrm{sen}\varphi) \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} F\cos\varphi = \mu Mg - \mu F\mathrm{sen}\varphi \\ \boxed{F = Mg\dfrac{\mu}{\cos\varphi + \mu\,\mathrm{sen}\varphi} = 29{,}5 \text{ kp}} \end{array} \right.$$

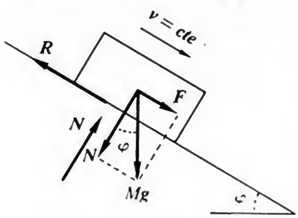


Problema VII-26

Problema 26. Un bloque de masa M_1 se encuentra sobre una mesa horizontal, se une mediante una cuerda horizontal que pasa por una polea ligera colocada en el borde de la mesa, a un bloque suspendido de masa M_2. Determinar el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la mesa cuando el sistema se mueve con movimiento uniforme.

Solución

$$M_2 g = R \qquad R = \mu M_1 g \qquad \Rightarrow \qquad M_2 g = \mu M_1 g \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mu = \frac{M_2}{M_1}}$$

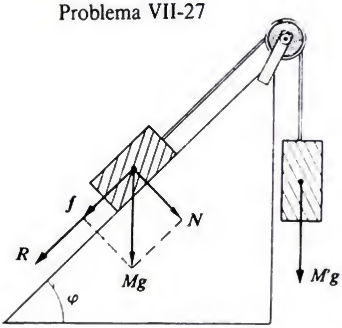


Problema VII-27

Problema 27. Sobre un tablero de madera horizontal colocamos un cuerpo también de madera. Vamos inclinando el tablero y cuando forma un ángulo de 20° con la horizontal, el cuerpo desliza con movimiento uniforme. Calcular el coeficiente dinámico de rozamiento de la madera contra la madera.

Solución

$$F = R \quad \left| \begin{array}{l} F = Mg\,\mathrm{sen}\varphi \\ F = \mu N = \mu Mg\cos\varphi \end{array} \right| \quad \boxed{\mu = \mathrm{tag}\varphi = \mathrm{tag}\,20° = 0{,}364}$$



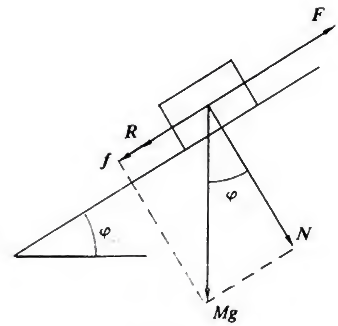
Problema VII-28

Problema 28. En el extremo superior de un plano inclinado un ángulo φ sobre la horizontal, hay una polea ligera por cuya garganta pasa un cordón; uno de los dos ramales de ese cordón se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado a su extremo una masa M que sube con movimiento uniforme a lo largo del plano. Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el plano es μ, determinar la masa del cuerpo que colgada del otro extremo del cordón cae verticalmente a esa velocidad constante, y hace subir por el plano al de masa M.

Solución

$$M'g = f + R \quad \left| \begin{array}{l} f = Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R = \mu N = \mu Mg\cos\varphi \end{array} \right| \cdot M'g = Mg\operatorname{sen}\varphi + \mu Mg\cos\varphi$$

$$\boxed{M' = M(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)}$$



Problema VII-29-1.ª

Problema 29. Se quiere subir un cuerpo por un plano inclinado un ángulo de 30°. El coeficiente dinámico de rozamiento entre la superficie del plano y el móvil es 0,3. El peso del cuerpo es 10 kg. Calcular:

1. Fuerza paralela al plano necesaria para subirlo con movimiento uniforme.

2. Fuerza horizontal necesaria para subirlo con movimiento uniforme.

Solución

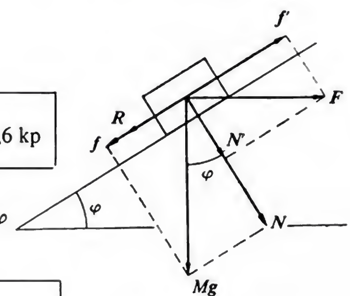
1)

$$F = f + R \quad \left| \begin{array}{l} f = Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R = \mu N = \mu Mg\cos\varphi \end{array} \right| \quad \boxed{F = Mg(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi) = 10\left(\frac{1}{2} + 0{,}3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{kp} = 7{,}6\ \text{kp}}$$

2)

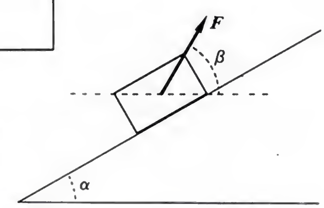
$$f' = f + R \quad \left| \begin{array}{l} f' = F\cos\varphi \\ f = Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R = \mu(N + N') = \mu(Mg\cos\varphi + F\operatorname{sen}\varphi) \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} F\cos\varphi = Mg\operatorname{sen}\varphi + \mu Mg\cos\varphi + \mu F\operatorname{sen}\varphi \\ F = Mg\operatorname{tag}\varphi + \mu Mg + \mu F\operatorname{tag}\varphi \end{array}$$

$$\boxed{F = Mg\,\frac{\operatorname{tag}\varphi + \mu}{1 - \mu\operatorname{tag}\varphi} = 10\,\frac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 0{,}3}{1 - \dfrac{0{,}3}{\sqrt{3}}} = 10{,}6\ \text{kp}}$$



Problema VII-29-2.ª

Problema 30. Calcular la fuerza F necesaria para subir un cuerpo por un plano inclinado (figura), con movimiento uniforme en función de α, β, M y μ siendo M la masa del cuerpo y μ el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el plano.

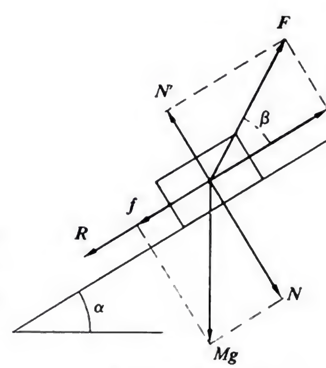


Problema VII-30

Solución

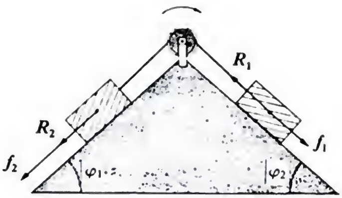
$$f' = f + R \quad \left| \begin{array}{l} f' = F\cos\beta \\ f = Mg\operatorname{sen}\alpha \\ R = \mu(N - N') = \mu(Mg\cos\alpha - F\operatorname{sen}\beta) \end{array} \right.$$

$$F\cos\beta = Mg\operatorname{sen}\alpha + \mu Mg\cos\alpha - \mu F sen\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = Mg\,\frac{\operatorname{sen}\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\operatorname{sen}\beta}}$$

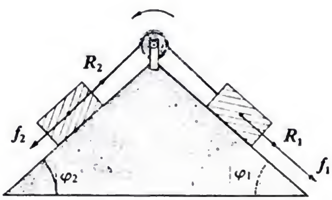


Problema VII-30-1.ª

Problema 31. Sobre un plano inclinado un ángulo φ_1 se tiene un cuerpo de masa M_1 que está unido a una cuerda que pasa por una polea ligera con otro cuerpo de masa M_2 en un plano de ángulo φ_2. Calcular el coeficiente de rozamiento dinámico entre los cuerpos y los planos (supuesto el mismo) si el sistema se mueve con movimiento uniforme.



Problema VII-31-1.ª



Problema VII-31-2.ª

Solución

El problema tiene dos soluciones; según que el sistema se mueva en uno de los dos sentidos indicados en las figuras.

1.^{er} Caso (figura 1.ª):

$$f_1 - R_1 - f_2 - R_2 = 0 \quad \left|\begin{array}{l} f_1 = M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi_1 \\ R_1 = \mu N_1 = \mu M_1 g \cos\varphi_1 \\ f_2 = M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi_2 \\ R_2 = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\varphi_2 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \qquad M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi_1 - \mu M_1 g\cos\varphi_1 - M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi_2 - \mu M_2 g\cos\varphi_2 = 0$$

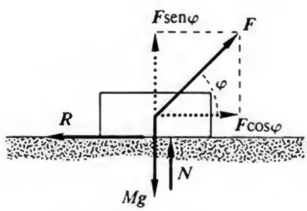
$$\boxed{\mu = \frac{M_1\,\mathrm{sen}\varphi_1 - M_2\,\mathrm{sen}\varphi_2}{M_1\cos\varphi_1 + M_2\cos\varphi_2}}$$

2.º Caso (figura 2.ª):

$$f_2 - R_2 - f_1 - R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi_2 - \mu M_2 g\cos\varphi_2 - M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi_1 - \mu M_1 g\cos\varphi_1 = 0$$

$$\boxed{\mu = \frac{M_2\,\mathrm{sen}\varphi_2 - M_1\,\mathrm{sen}\varphi_1}{M_2\cos\varphi_2 + M_1\cos\varphi_1}}$$

Problema 32. Calcular la fuerza mínima posible que tiene que hacer un hombre arrastrando un cuerpo de 100 kg de masa por un terreno horizontal si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el terreno es 0,5.



Problema VII-32

Solución

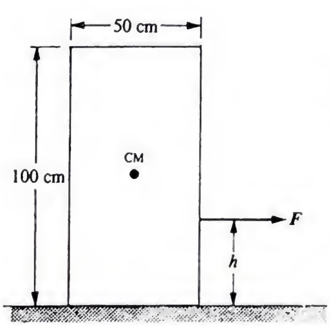
Para que se cumplan las condiciones del enunciado el cuerpo tendrá que ser arrastrado con movimiento uniforme y F será mínima para un ángulo determinado, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} F\cos\varphi = R \\ R = \mu Mg - \mu F\,\mathrm{sen}\varphi \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad F\cos\varphi = \mu Mg - \mu F\,\mathrm{sen}\varphi \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu Mg}{\cos\varphi + \mu\,\mathrm{sen}\varphi}$$

$$\frac{dF}{d\varphi} = \mu Mg\,\frac{\mathrm{sen}\varphi - \mu\cos\varphi}{(\cos\varphi + \mu\,\mathrm{sen}\varphi)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\varphi = \mu = 0{,}5 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 26°\ 33'\ 54''$$

luego:

$$\boxed{F = \frac{0{,}5 \times 100}{\cos\varphi + 0{,}5\,\mathrm{sen}\varphi} = 44{,}7 \text{ kp}}$$



Problema VII-33

Problema 33. Un bloque de 54 kg de peso desliza sobre una superficie con movimiento uniforme producido por la fuerza F según se indica en la figura. Calcular:

1. La posición de la línea de acción de la normal cuando $h = 30$ cm

2. Determinar el valor que puede tener h para que el bloque deslice sin volcar. El coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,5 y el centro de masa del bloque se encuentra en el centro geométrico.

Solución

1)

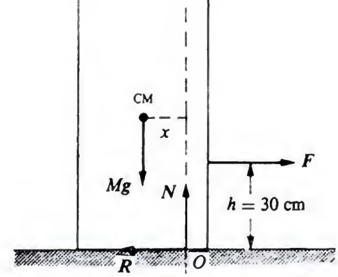
$$N = Mg$$
$$F = R = \mu N = 0{,}5 \times 54 = 27 \text{ kp}$$

tomando momentos respecto a O (o lo que es lo mismo el par constituido por Mg y N es igual y de sentido contrario al formado por F y R), tendremos:

$$Fh - Mgx = 0 \quad \Rightarrow \quad 27 \times 30 - 54x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 15 \text{ cm}}$$

2) En el caso en que el bloque esté a punto de volcar la normal estará aplicada en el extremo del bloque como se indica en la figura. Igualando pares o tomando momentos respecto a O, tendremos:

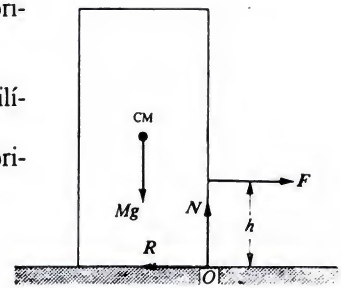
$$27h - 54 \times 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 50 \text{ cm}}$$



Problema VII-33-1.ª

Problema 34. Un cuerpo de 10 kg se encuentra sobre una superficie horizontal; si el coeficiente de rozamiento estático entre ambos es 0,3 y el dinámico es 0,2. Calcular:

1. Valor de la fuerza de rozamiento si actuamos sobre el cuerpo con una fuerza horizontal de 1 kp.
2. Valor de la fuerza mínima para la que se inicia el movimiento.
3. Valor de la fuerza mínima capaz de mantener al cuerpo con movimiento rectilíneo y uniforme.
4. Valor de la fuerza de rozamiento si actuamos sobre el cuerpo con una fueza horizontal de 5 kp.

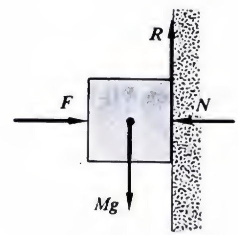


Problema VII-33-2.ª

Solución

1) $R = 1$ kp
2) $R = R_e = \mu_e Mg = 0{,}3 \times 10 = 3$ kp
3) $F = R_d = \mu_d Mg = 0{,}2 \times 10 = 2$ kp
4) $R = R_d = 2$ kp

Problema 35. Calcular la fuerza horizontal mínima con que hay que apretar un bloque de 1 kg contra la pared vertical para que éste no caiga. El coeficiente estático de rozamiento entre pared y bloque vale 0,5.



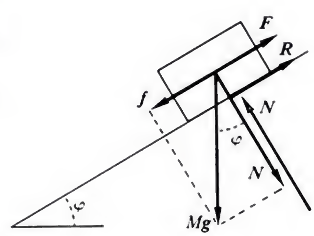
Problema VII-35

Solución

$$\left.\begin{array}{r} Mg = R \\ N = F \\ R = \mu_e N \end{array}\right| \qquad Mg = \mu_e F \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{Mg}{\mu_e} = \frac{1}{0{,}5} = 2 \text{ kp}}$$

Problema 36. Un bloque de 100 kg se encuentra sobre un plano inclinado 45°; si el coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y el plano es 0,3, calcular:

1. Fuerza mínima paralela al plano inclinado capaz de mantener al bloque en reposo.
2. Fuerza mínima horizontal capaz de mantener al bloque en reposo.



Problema VII-36-1.ª

Solución

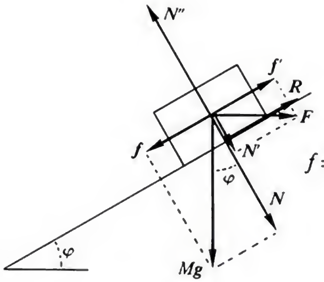
1)

$$f = F + R \quad \left| \begin{array}{l} f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu_e Mg\cos\varphi \end{array} \right| \qquad \boxed{F = Mg\,(\text{sen}\varphi - \mu_e\cos\varphi) = 100\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 49{,}5 \text{ kp}}$$

2)

$$f = f' + R \quad \left| \begin{array}{l} f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ f' = F\cos\varphi \\ R = \mu_e\,(Mg\cos\varphi + F\text{sen}\varphi) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} Mg\,\text{sen}\varphi = F\cos\varphi + \mu_e Mg\cos\varphi + \mu_e F\text{sen}\,\varphi \\ Mg\,\text{tag}\varphi = F + \mu_e Mg + \mu_e F\text{tag}\varphi \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{F = Mg\,\frac{\text{tag}\varphi - \mu_e}{1 + \mu_e\text{tag}\varphi} = 100\,\frac{1 - 0{,}3}{1 + 0{,}3} = 53{,}8\ \text{kp}}$$



Problema VII-36-2.ª

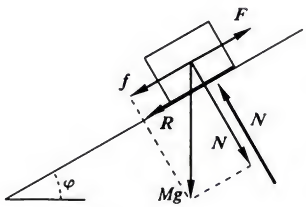
Problema 37. Un cuerpo de masa M se encuentra en reposo sobre un plano inclinado un ángulo φ respecto de la horizontal. Si el coeficiente estático de rozamiento entre el cuerpo y el plano es μ_e. Calcular:

1. La fuerza mínima paralela al plano necesaria para que el cuerpo empiece a subir por el plano.

2. La fuerza mínima paralela al plano necesaria para que el cuerpo comience a moverse hacia abajo sobre el plano.

3. La fuerza mínima horizontal para que el cuerpo comience a ascender por el plano.

4. La fuerza mínima horizontal para que el cuerpo comience a descender por el plano.



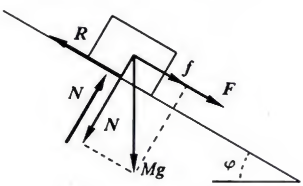
Problema VII-37-1.ª

Solución

Para que se cumplan las condiciones del enunciado tendrá que verifircarse:

$$\mu_e > \text{tag}\varphi$$

1) $$\left. \begin{array}{l} F = f + R \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu_e N = \mu_e Mg\cos\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{F = Mg\,(\text{sen}\varphi + \mu_e\cos\varphi)}$$



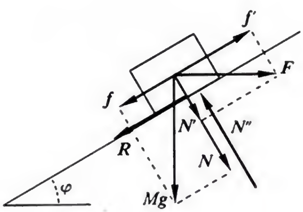
Problema VII-37-2.ª

2) $$\left. \begin{array}{l} F = R - f \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu_e Mg\cos\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{F = Mg\,(\mu_e\cos\varphi - \text{sen}\varphi)}$$

3) $$f' = f + R \quad \left| \begin{array}{l} f' = F\cos\varphi \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu_e(N + N') = \mu_e\,(Mg\cos\varphi + F\text{sen}\varphi) \end{array} \right.$$

luego:

$$\left. \begin{array}{l} F\cos\varphi = Mg\,\text{sen}\varphi + \mu_e Mg\cos\varphi + \mu_e F\text{sen}\varphi \\ \\ F = Mg\,\text{tag}\varphi + \mu_e Mg + \mu_e F\text{tag}\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{F = Mg\,\frac{\text{tag}\varphi + \mu_e}{1 - \mu_e\,\text{tag}\varphi}}$$

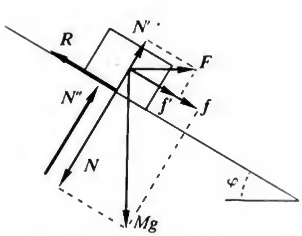


Problema VII-37-3.ª

4) $$f + f' = R \quad \left| \begin{array}{l} f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ f' = F\cos\varphi \\ R = \mu_e\,(N - N') = \mu_e\,(Mg\cos\varphi - F\text{sen}\varphi) \end{array} \right.$$

luego:

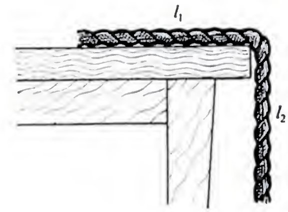
$$\left. \begin{array}{l} Mg\,\text{sen}\varphi + F\cos\varphi = \mu_e Mg\cos\varphi - \mu_e F\text{sen}\varphi \\ \\ Mg\,\text{tag}\varphi + F = \mu_e Mg - \mu_e F\text{tag}\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{F = Mg\,\frac{\mu_e - \text{tag}\varphi}{1 + \mu_e\,\text{tag}\varphi}}$$



Problema VII-37-4.ª

Problema 38. Colocamos una cuerda flexible de 1 m de de longitud sobre una

mesa de tal forma que parte de ella cuelga por un extremo. Si el coeficiente estático de rozamiento entre la mesa y la cuerda es 0,6 calcular la máxima longitud de cuerda que puede colgar sin que caiga.



Problema VII-38

Solución

M_1 = Masa de la cuerda sobre la mesa. M_2 = Masa de la cuerda que cuelga. λ = Masa de la unidad de longitud.

Cuando está a punto de comenzar a moverse:

$$M_2 g = \mu_e M_1 g \quad \Rightarrow \quad M_2 = \mu_e M_1$$

como:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \lambda l_1 \\ M_2 = \lambda l_2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \lambda l_2 = \mu_e \lambda l_1 \quad \Rightarrow \quad l_2 = 0{,}6\, l_1$$

que junto con que: $l_1 + l_2 = 1$ m

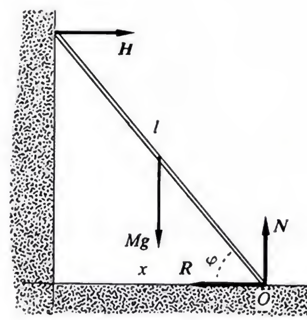
nos queda:

$$1{,}6 l_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1 = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625 \text{ m} = 62{,}5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l_2 = 37{,}5 \text{ cm}}$$

Problema 39. Una escalera de mano de 4 m de longitud (centro de masa en su punto medio), esta apoyada en una pared vertical sin rozamiento apreciable y el suelo horizontal con rozamiento, siendo 0,4 el coeficiente estático de rozamiento entre ambos.

1. Calcular la máxima distancia que puede separarse el pie de la escalera de la pared sin que se caiga.

2. Determinar la altura sobre el suelo a la que podría subir un hombre de igual masa que la escalera, estando el pie de la escalera separado de la pared las 4/5 partes de la distancia máxima calculada en el apartado anterior.



Problema VII-39-1.ª

Solución

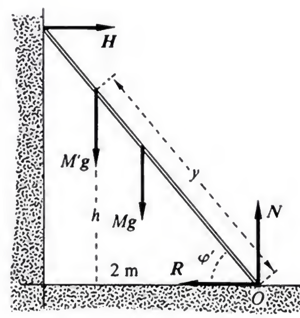
1) En el equilibrio inestable se verificará, (figura 1.ª):

$$\left.\begin{array}{l} N = Mg \\ H = R = \mu_e N \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \mu_e = \frac{H}{Mg}$$

tomando momentos respecto a *O:*

$$H l \operatorname{sen}\varphi - Mg\frac{l}{2}\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\varphi = \frac{Mg}{2H} = \frac{1}{2\mu_e} = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4\mu_e^2 (l^2 - x^2)$$

$$\boxed{x = \frac{2\mu_e l}{\sqrt{1 + 4\mu_e^2}} = \frac{2 \times 0{,}4 \times 4}{\sqrt{1 + 4 \times 0{,}4^2}} = 2{,}5 \text{ m}}$$



Problema VII-39-2.ª

2) En este caso (figura 2):

$$N = Mg + M'g = (M + M')g$$
$$H = R = \mu_e N = \mu_e (M + M')g$$

Tomando momentos con respecto a *O:*

$$H l \operatorname{sen}\varphi' - Mg\frac{l}{2}\cos\varphi' - M'gy\cos\varphi' = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\mu_e (M + M') l \operatorname{tag}\varphi' - Ml = 2M'y \quad \Rightarrow$$

$$y = l\frac{2\mu_c(M+M')\text{tag}\varphi' - M}{2M'}$$

y como $M = M'$, queda:

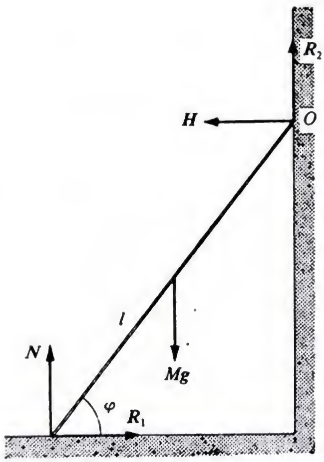
$$y = l\,\frac{4\,\mu_c\,\text{tag}\varphi' - 1}{2}$$

y como:

$$\text{tag}\varphi' = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3} \qquad\qquad \text{sen}\varphi' = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

obtenemos:

$$\boxed{h = y\,\text{sen}\varphi' = 4\,\frac{4\times 0{,}4\,\sqrt{3}-1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ m} = 3\text{ m}}$$



Problema VII-40

Problema 40. Una escalera de mano se apoya sobre una pared vertical y el suelo horizontal, siendo el coeficiente estático de rozamiento en los dos extremos 0,3. Calcular el valor mínimo que puede tomar el ángulo φ que forma la escalera con el suelo para que se mantenga sin caerse. El centro de gravedad de la escalera se encuentra en su centro geométrico.

Solución

$$R_1 = \mu_c N \qquad\qquad R_2 = \mu_c H$$

por encontrarse en equilibrio:

$$Mg = N + R_2$$
$$H = R_1$$

Tomando momentos con respecto a O:

$$R_1\,l\,\text{sen}\varphi + Mg\,\frac{l}{2}\cos\varphi - N\,l\cos\varphi = 0 \quad\Rightarrow\quad R_1\,\text{tag}\varphi + \frac{Mg}{2} - N = 0 \qquad (1)$$

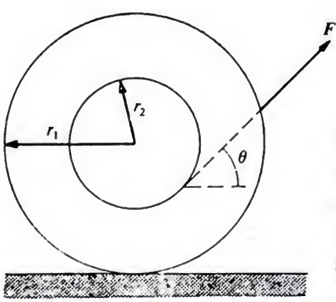
y como:

$$R_1 = \mu_c N = \mu_c(Mg - R_2) = \mu_c(Mg - \mu_c H) = \mu_c(Mg - \mu_c R_1) \quad\Rightarrow\quad R_1 = \frac{\mu_c Mg}{1+\mu_c^2}$$

$$N = Mg - R_2 = Mg - \mu_c H = Mg - \mu_c R_1 = Mg\left(1 - \frac{\mu_c^2}{1+\mu_c^2}\right) = \frac{Mg}{1+\mu_c^2}$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{\mu_c Mg}{1+\mu_c^2}\,\text{tag}\varphi + \frac{Mg}{2} - \frac{Mg}{1+\mu_c^2} = 0 \;\Rightarrow\; \text{tag}\varphi = \frac{1-\mu_c^2}{2\,\mu_c} = 1{,}52 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\varphi = 56°\ 36'}$$



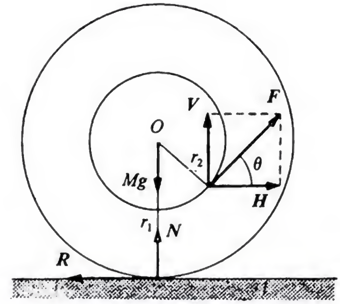
Problema VII-41

Problema 41. Dos discos de radio r_1 están unidos por un eje de radio r_2 como indica la figura. La masa total de la rueda así formada es M y el coeficiente de rozamiento entre ésta y la superficie en que descansa es μ. Al aplicarle una fuerza F la rueda rodará hacia la izquierda cuando θ sea grande y hacia la derecha cuando θ sea pequeño. Calcular:

1. Valor que debe de tomar θ de forma que la rueda no se desplace ni a un lado ni a otro.

2. Valor de F para el cual la rueda deslizará sin rodar manteniéndose en su lugar.

Solución



Problema VII-41-1.ª

1) Al ser $R < \mu N$ o como máximo $R = \mu N$ para el caso en que la rueda comenzase a deslizar sin rodar, tomando momentos con respecto a O, tendremos:

$$F r_2 - R r_1 = 0 \tag{1}$$

además:

$$\left.\begin{array}{l} H = R \\ \cos\theta = \dfrac{H}{F} = \dfrac{R}{F} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{r_2}{r_1}}$$

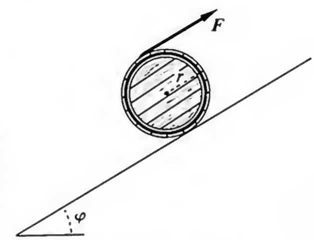
2) En el caso extremo $R = \mu N$ siendo:

$$N = Mg - V = Mg - F\,\text{sen}\theta$$

sustituyendo en (1) nos queda:

$$F r_2 - \mu r_1 \left(Mg - F \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{\mu r_1 M g}{r_2 + \mu \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}}$$

Problema 42. Enrollamos una cuerda a un barril cilíndrico de 200 kg para que tirando de ella lo subamos por una rampa de 30° de inclinación con la horizontal. Si el coeficiente de resistencia a la rodadura es 0,2 m. Calcular la mínima fuerza necesaria. (Radio del barril 35 cm).



Problema VII-42

Solución

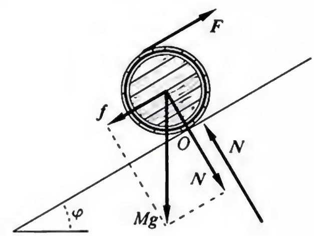
El par de rodadura valdrá:

$$N_R = \rho N = \rho M g \cos\varphi$$

tomando momentos respecto de O y en el caso extremo igualando a cero:

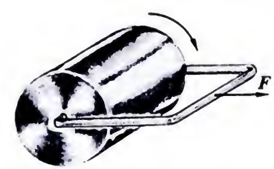
$$2 F r - M g r\,\text{sen}\varphi - \rho M g \cos\varphi = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{Mg}{2r}\left[r\,\text{sen}\varphi + \rho\cos\varphi \right] = \frac{200}{2 \times 0{,}35}\left(0{,}35 \times 0{,}5 + 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2} \right)\text{kp} = 100\ \text{kp}}$$



Problema VII-42-1.ª

Problema 43. Calcular la fuerza F de tracción paralela a un plano horizontal y aplicada al eje de un rodillo (figura) de 100 kp y 1 m de diámetro para que ruede sin deslizar con movimiento uniforme de rotación y traslación si el coeficiente de resistencia a la rodadura vale 0,1 m.



Problema VII-43

Solución

Aplicando las condiciones de equilibrio y tomando como centro de momentos el punto O (figura), se habrá de verificar:

$$R r - N_R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad R r = N \rho = M g \rho$$

Por otra parte, para que el centro de gravedad tenga movimiento uniforme se ha de cumplir:

$$F = R$$

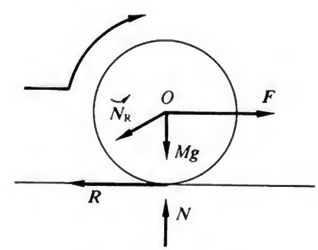
que sustituida en la anterior nos da para valor de la mínima fuerza de tracción:

$$F r = \rho M g \quad \Rightarrow \quad F = \rho\,\frac{Mg}{r}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{F = 0{,}1\,\frac{100}{0{,}5} = 20\ \text{kp}}$$

Si la fuerza F, es mayor que la calculada la rueda adquirirá un movimiento acelerado de rotación y traslación sin deslizamiento o con él.



Problema VII-43-1.ª

Capítulo VIII

DINAMICA

A) DINAMICA DE LOS SISTEMAS EN TRASLACION SIN ROZAMIENTO

FORMULARIO

PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE GALILEO:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t$$

derivando:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$$

MOMENTO LINEAL:

$$\boldsymbol{p} = \Sigma m_i \boldsymbol{v}_i = M\boldsymbol{v}$$

PRIMERA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO (SEGUNDO PRINCIPIO DE NEWTON):

$$\boldsymbol{F} = \Sigma \boldsymbol{F}_{cx} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{d\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i}{dt} = M\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = M\boldsymbol{a}$$

PRINCIPIO DE D'ALAMBERT:

$$\Sigma \boldsymbol{F}_{cx} - M\boldsymbol{a} = 0$$

IMPULSO:

$$d\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}dt \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{I} = \int_{v_0}^{v} d\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0$$

TEOREMA DEL CENTRO DE MASA: El centro de masa de un sistema se mueve como si toda su masa estuviese concentrada en dicho centro y la resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas en él.
Sacamos como conclusión que «las fuerzas internas no afectan al movimiento del centro de masa».

NOTA: Para resolver los problemas de Dinámica se pueden emplear dos métodos diferentes que nos conducen a las mismas conclusiones y, por tanto, ambos procedimientos son válidos. El primero consiste en utilizar el segundo principio de Newton, seleccionando un sistema de referencia inercial y considerar sólo las fuerzas «reales», es decir, las fuerzas que pueden definirse desde el sistema inercial elegido.
El segundo método, menos pedagógico, consiste en utilizar el principio de D'Alambert, considerándose en su aplicación no sólo las fuerzas «reales», sino también las fuerzas llamadas de «inercia», que para razonar su existencia tendremos que situarnos dentro del sistema, que al tener aceleración, no es un sistema de referencia inercial, y, por tanto, esta metodología parece ir en contra de la realidad física; sin embargo, como ya hemos dicho, nos lleva a las mismas conclusiones que con el método correcto. La aplicación del principio de D'Alambert reduce el problema dinámico a uno de estática, que en ocasiones es más sencillo.
En la resolución de los problemas utilizaremos los dos procedimientos indistintamente y algunos se resolverán de las dos maneras.

Problema 1. Dejamos caer un cuerpo en el interior de un ascensor desde 2 m de altura cuando está parado y cuando asciende con movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad 1 m/s. ¿A qué altura sobre el suelo del ascensor se encontrará el cuerpo a los 0,5 s, en cada uno de los casos?

Solución

Según el principio de relatividad de Galileo, tendrán que estar a la misma altura del suelo en uno y otro caso. En efecto:

1.^{er} CASO:

$$h = \frac{1}{2} gt^2 = \frac{1}{2} 9{,}8 \times 0{,}25 = 1{,}225 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2 - 1{,}225 = 0{,}775 \text{ m}}$$

2.° CASO:

Al soltar el cuerpo éste lleva una velocidad inicial hacia arriba de 1 m/s respecto del primer sistema inercial. La distancia al punto de partida es:

$$v_0t - \frac{1}{2} gt^2 = 0{,}5 - 1{,}225 = - 0{,}725 \text{ m}$$

Es decir, 0,725 m por debajo del punto de partida. El suelo del ascensor ha ascendido:

$$vt = 1 \times 0{,}5 = 0{,}5 \text{ m}$$

y, por tanto, el cuerpo se encontrará a una distancia del suelo:

$$\boxed{x = 2 - 0{,}725 - 0{,}5 = 0{,}775 \text{ m}}$$

Problema 2. Calcular el momento lineal de un coche que pesa 1 t y que marcha a una velocidad de 108 km/h. Si frena bruscamente, parándose en 80 m, ¿cuánto vale la fuerza de frenado?

Solución

$$v = 108 \text{ km/h} = 30 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{p = Mv = 10^3 \times 30 = 3 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

$$v = \sqrt{2as} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{900}{2 \times 80} = 5{,}625 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \boxed{F = Ma = 10^3 \times 5{,}625 = 5\,625 \text{ N}}$$

Problema 3. Un camión de 30 t de masa moviéndose en una carretera horizontal pasa de la velocidad de 30 km/h a 50 km/h en 2 min. Calcular la fuerza ejercida por el motor supuesta constante.

Solución

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\boxed{F = Ma = M\,\frac{v - v_0}{t} = 30 \times 10^3\,\frac{20 \times 10^3}{3\,600 \times 2 \times 60} = 1\,389 \text{ N} = 142 \text{ kp}}$$

Problema 4. La rapidez de un móvil varía uniformemente desde 5 m/s hasta 9 m/s en 2 s. Si la fuerza causante que produce esta variación vale 20 kp, calcular:
1. Velocidad media en dicho intervalo de tiempo.
2. Masa del móvil expresada en kg.

Solución

1)

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{9 - 5}{2} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = 5 \times 2 + \frac{1}{2} 2 \times 4 = 14 \text{ m} \Rightarrow \boxed{\overline{v} = \frac{14}{2} = 7 \text{ m/s}}$$

2)

$$F = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{F}{a} = \frac{20 \times 9{,}8}{2} = 98 \text{ kg}}$$

Problema 5. Una pelota de tenis que pesa 100 g lleva una velocidad de 20 m/s, y después de devuelta, en sentido contrario, su velocidad es de 40 m/s. Calcúlese:
1. La variación del momento lineal.
2. Si la pelota permanece en contacto con la raqueta 10^{-2} s, la fuerza media del golpe.

Solución

1)

$$\boxed{\Delta p = p_2 - p_1 = Mv_2 - (-Mv_1) = M(v_2 + v_1) = 10^{-1} \times 60 = 6\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}$$

2)

$$\boxed{\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6}{10^{-2}} = 600 \text{ N}}$$

Problema 6. Desde la azotea de un edificio de 10 m de altura dejamos caer una pelota de 400 g de masa; después de chocar con el suelo, rebota hasta 4,2 m de altura. Determinar:

1. El impulso debido al peso de la pelota en su caída.

2. El impulso recibido en el choque con el suelo.

Solución

1) Tomaremos sentido positivo hacia arriba; como:

$$I_1 = \int_0^{t_1} F\,dt = -mgj \int_0^{t_1} dt = -mgt_1 j$$

el tiempo t_1 que tarda la pelota en llegar al suelo será:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

luego:

$$\boxed{I_1 = -mg\sqrt{\frac{2h_1}{g}}\,j = -0{,}4 \times 9{,}8\sqrt{\frac{2 \times 10}{9{,}8}}\,j = -5{,}6j\ \mathrm{N \cdot m}}$$

2) En el choque de la pelota contra el suelo actúa una fuerza durante un tiempo pequeño que desconocemos; pero podemos calcular la variación del momento lineal en este choque, que será igual al impulso que nos piden. La velocidad inmediatamente antes del choque con el suelo será:

$$v_1 = -\sqrt{2gh_1}\,j = -\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10}\,j = -14j\ \mathrm{m/s}$$

y como alcanza la altura de 4,2 m, la velocidad v_2 con que rebota es:

$$v_2 = \sqrt{2gh_2}\,j = 9j\ \mathrm{m/s} \Rightarrow \boxed{I_2 = \Delta p = m(v_2 - v_1) = 0{,}4(9 + 14)j = 9{,}2j\ \mathrm{N \cdot m}}$$

Problema 7. Se deja caer libremente un cuerpo de 10 g de masa. Supuesta nula la resistencia del aire, y cuando su velocidad es $v = 20$ m/s, se le opone una fuerza que detiene su caída al cabo de 4 s.

1. ¿Cuál debe ser esa fuerza?

2. ¿Qué espacio habrá recorrido hasta el momento de oponerse la fuerza?

3. ¿Qué espacio total habrá recorrido hasta el momento de detenerse?

Solución

1) El valor de la deceleración del cuerpo es:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{20}{4} = 5\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\Sigma F_i = Ma \Rightarrow F - Mg = Ma \Rightarrow F = M(g + a) \Rightarrow \boxed{F = 10^{-2}(9{,}8 + 5) = 0{,}148\ \mathrm{N}}$$

2)

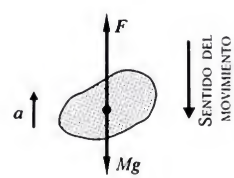
$$v = \sqrt{2gh_1} \Rightarrow \boxed{h_1 = \frac{v^2}{2g} = \frac{400}{2 \times 9{,}8} = 20\ \mathrm{m}}$$

3)

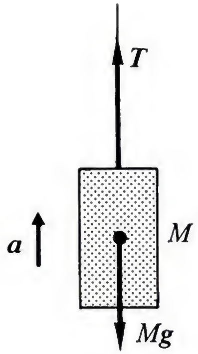
$$h_2 = \frac{1}{2} vt = \frac{1}{2} 20 \times 4 = 40\ \mathrm{m}$$

el espacio total H será:

$$\boxed{H = 20 + 40 = 60\ \mathrm{m}}$$



Problema VIII-7



Problema VIII-8

Problema 8. Un hilo tiene una resistencia a la ruptura de 0,5 kp. Colgamos de él un cuerpo de 300 g. Calcular la aceleración vertical hacia arriba que hay que dar al sistema para que el hilo se rompa.

Solución

$$\Sigma F_i = Ma \quad \Rightarrow \quad T - Mg = Ma$$

T: tensión de la cuerda. Luego:

$$0{,}5 \times 9{,}8 - 0{,}3 \times 9{,}8 = 0{,}3a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 6{,}53 \text{ m/s}^2}$$

Mínima aceleración que hay que dar al sistema para que el hilo se rompa.

Problema 9. Un bloque de 5 kg está sostenido por una cuerda y es arrastrado hacia arriba con una aceleración de 2 m/s^2. Se pide:

1. Calcular la tensión de la cuerda.

2. Si después de iniciado el movimiento la tensión de la cuerda se reduce a 49 N, ¿qué clase de movimiento tendrá lugar?

3. Si se afloja la cuerda por completo, se observa que el bloque continúa moviéndose, recorriendo 2 m antes de detenerse, ¿qué velocidad tenía?

Solución

1)

$$\Sigma F_i = Ma \quad \Rightarrow \quad T - Mg = Ma \quad \Rightarrow \boxed{T = M(g + a) = 5(9{,}8 + 2) = 59 \text{ N}}$$

2)

$$49 = Mg + Ma' = 5 \times 9{,}8 + 5a' \quad \Rightarrow \quad a' = 0$$

$$\boxed{\text{Movimiento rectilíneo y uniforme.}}$$

3)

$$\boxed{v = \sqrt{2|g|h} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2} = 6{,}26 \text{ m/s}}$$

Problema 10. Un montacargas posee una velocidad de régimen, tanto al ascenso como en el descenso, de 4 m/s, tardando 1 s en adquirirla al arrancar o en detenerse del todo en las paradas. Se carga un fardo de 600 kg y se sabe, además, que la caja del montacargas, con todos sus accesorios, tiene una masa de 1 200 kg. Calcúlese:

1. Fuerza que ejercerá el fardo sobre el suelo del montacargas durante el arranque para ascender.

2. Id., íd. durante el ascenso a la velocidad de régimen.

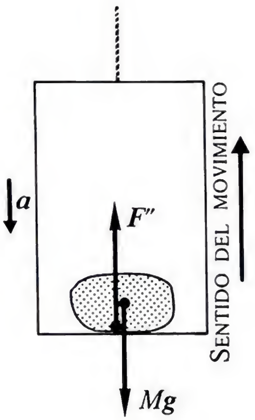
3. Id., íd. en el momento de detenerse.

4. Tensión de los cables del montacargas en el caso 1.

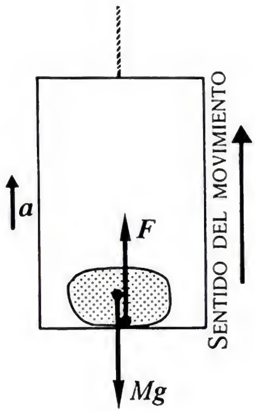
5. Id., íd. en el instante en que el montacargas inicia su descenso vacío.

Solución

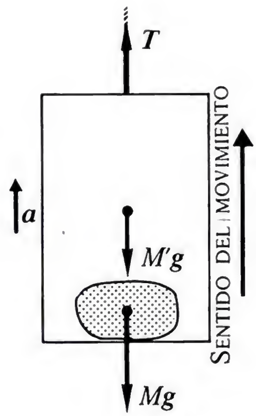
$$v = at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v}{t} = 4 \text{ m/s}^2$$



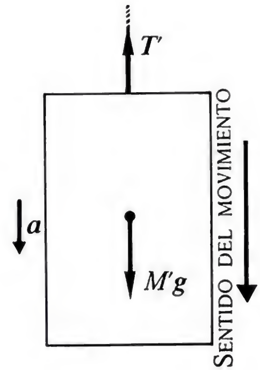
Problema VIII-10-1.ª



Problema VIII-10-2.ª



Problema VIII-10-3.ª



Problema VIII-10-4.ª

1) La ecuación del movimiento aplicada al fardo, teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre él (fig. 1.ª), será:

$$F - Mg = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = Mg + Ma = M(g + a) = \frac{600}{9{,}8}\,(9{,}8 + 4) = 885 \text{ kp}}$$

fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el fardo sobre el suelo del montacargas.

2)

$$F' - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F' = Mg = \frac{600}{9{,}8}\,9{,}8 = 600 \text{ kp}}$$

fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el fardo sobre el suelo del montacargas.

3) (Fig. 2.ª):

$$Mg - F'' = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'' = M(g - a) = \frac{600}{9{,}8}\,(9{,}8 - 4) = 355 \text{ kp}}$$

Fuerza igual y de sentido contrario a la que ejerce el fardo sobre el suelo del montacargas.

4) La ecuación del movimiento aplicada a todo el sistema (montacargas y fardo) nos da (fig. 3.ª):

$$T - Mg - M'g = (M + M')a \Rightarrow \boxed{T = (M + M')(g + a) = \frac{1\,800}{9{,}8}\,(9{,}8 + 4) = 2\,535 \text{ kp}}$$

5) Para este caso (fig. 4.ª):

$$M'g - T' = M'a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T' = M'(g - a) = \frac{1\,200}{9{,}8}\,(9{,}8 - 4) = 710 \text{ kp}}$$

Problema 11. Un hombre de 70 kg de peso se encuentra en la cabina de un ascensor, cuya altura es de 3 m.

1. Calcular la fuerza que soportará el suelo del mismo cuando ascienda con una aceleración constante de 2 m/s^2.
2. Calcularla igualmente cuando descienda con la misma aceleración.
3. Idem en el caso de que suba o baje con velocidad uniforme.
4. Cuando el ascensor se encuentra a 15 m del suelo se desprende la lámpara del techo. Calcular en el caso primero el tiempo que tarda en chocar con el suelo del ascensor.

Solución

1) Sobre el hombre actúan dos fuerzas: Mg hacia abajo y la fuerza normal hacia arriba que el suelo del ascensor hace sobre él. De la ecuación del movimiento del hombre:

$$F - Mg = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = M(g + a) = \frac{70}{9{,}8}(9{,}8 + 2) = 84{,}3 \text{ kp}}$$

igual pero de sentido contrario a la que soportará el suelo del ascensor.

2) En este caso:

$$Mg - F = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = M(g - a) = \frac{70}{9{,}8}(9{,}8 - 2) = 55{,}7 \text{ kp}}$$

igual pero de sentido contrario a la que soportará el suelo del ascensor.

3)

$$F - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = Mg = \frac{70}{9{,}8}\, 9{,}8 = 70 \text{ kp}}$$

4) En el instante de caer el cuerpo el ascensor lleva una velocidad vertical y hacia arriba v. El espacio vertical hacia abajo que debe recorrer la lámpara es:

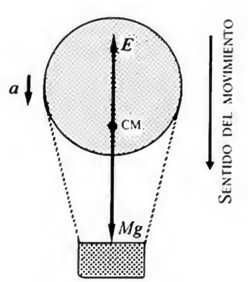
$$h - \left(vt + \frac{1}{2}\, at^2\right)$$

h altura del ascensor y $\left(vt + \frac{1}{2}\, at^2\right)$ ascenso del suelo de éste. La lámpara, al desprenderse lleva una velocidad inicial hacia arriba v. Aplicando la ecuación:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}\, at^2$$

siendo positivas las magnitudes hacia arriba y negativas las descendentes:

$$-h + vt + \frac{1}{2}\, at^2 = vt - \frac{1}{2}\, gt^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g + a}} \simeq \sqrt{\frac{6}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ s}}$$



Problema VIII-12-1.ª

Problema 12. Un globo con todos sus accesorios pesa 200 kg y desciende con una aceleración 10 veces menor que la de la gravedad. Calcular la masa de lastre que tiene que lanzarse para que ascienda con la misma aceleración.

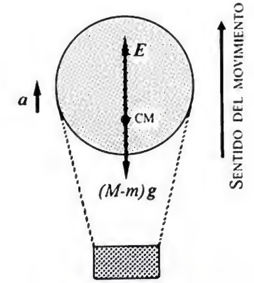
Solución

$$Mg - E = Ma$$

$$E - (M - m)g = (M - m)a$$

Sumando, nos queda:

$$mg = 2Ma - ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{2Ma}{g + a} = \frac{2M\dfrac{g}{10}}{g + \dfrac{g}{10}} = \frac{2M}{11} = \frac{2 \times 200}{11} = 36{,}36 \text{ kg}}$$



Problema VIII-12-2.ª

Problema 13. Tiramos del extremo de una cuerda homogénea, de sección constante y de longitud L, con una fuerza F mayor que su peso en dirección vertical y hacia arriba. Hallar la fuerza con que una parte de longitud l, contada a partir del otro extremo, actúa sobre la otra.

Solución

λ: Masa de la unidad de longitud.
M: Masa de toda la cuerda.
m: Masa de la longitud l.
a: Aceleración del sistema.

Por aplicación del segundo principio de Newton a la parte de la cuerda de masa m que se mueve con la aceleración del sistema:

$$f - mg = ma \quad \Rightarrow \quad f = m(g + a) = \lambda l(g + a)$$

haciendo lo mismo para toda la cuerda:

$$F - Mg = Ma \quad \Rightarrow \quad F = M(g + a) = \lambda L(g + a)$$

por división se obtiene:

$$\boxed{f = \frac{l}{L} F}$$

Problema VIII-13

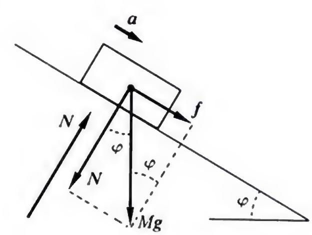
Problema 14. Una bala de 2 g de masa tarda 10^{-3} s en recorrer el cañón de un fusil. La fuerza que actúa sobre el proyectil mientras se encuentra en el cañón es $F = 500 - 2 \times 10^5 t$, escrita en el SI. Calcular la velocidad con que sale la bala de la boca del cañón.

Solución

$$F = \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad dp = F\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^v d(Mv) = \int_0^t F\,dt \quad \Rightarrow \quad Mv = \int_0^t F\,dt = \int_0^t (500 - 2 \times 10^5 t)\,dt = 500t - 10^5 t^2$$

$$\boxed{v = \frac{500t - 10^5 t^2}{M} = \frac{500 \times 10^{-3} - 10^5 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-3}} = 200 \text{ m/s}}$$

Problema 15. Sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal se coloca un objeto para que baje deslizándose. Si no existen rozamientos entre el objeto y el plano, determínese la aceleración de bajada de éste.



Problema VIII-15

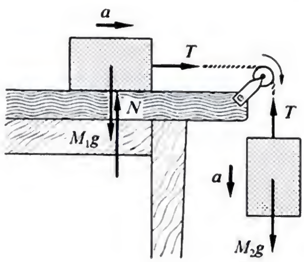
Solución

$$\left.\begin{aligned} f &= Ma \\ f &= Mg\,\text{sen}\,\varphi \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g\,\text{sen}\,\varphi = 9{,}8\ \frac{1}{2} = 4{,}9 \text{ m/s}^2}$$

Problema 16. Un bloque de masa M_1 que se encuentra sobre una mesa horizontal, sin rozamiento, se une mediante una cuerda horizontal que pasa por una polea de masa despreciable colocada en el borde de la mesa a un bloque suspendido de masa M_2.

1. ¿Cuál es la aceleración del sistema?

2. ¿Cuánto vale la tensión de la cuerda?



Problema VIII-16

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} M_2g - T = M_2a \\ T = M_1a \end{array}\right| \Rightarrow M_2g = (M_1 + M_2)a \Rightarrow \boxed{a = g\,\frac{M_2}{M_1 + M_2}}$$

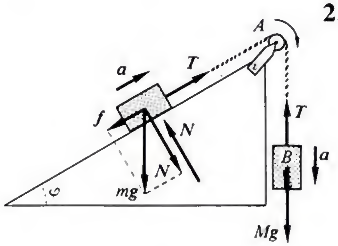
2)

$$\boxed{T = M_2(g - a) = M_1a = g\,\frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}}$$

Problema 17. En el extremo superior de un plano inclinado 30° sobre la horizontal hay una polea A (que supondremos de masa despreciable) por cuya garganta pasa un cordón; uno de los dos ramales de este cordón cae verticalmente y sostiene atado a un extremo un peso B de 220 g; el otro cordón se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado a un extremo una masa m que se desliza sin rozamiento. Si se deja en libertad el sistema, el cuerpo B cae verticalmente, recorriendo 1 m en 2 s. Se pide:

1. Calcular el valor de m.

2. Calcular el valor de la tensión en los dos ramales.



Problema VIII-17

Solución

Si el movimiento es uniformemente acelerado:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 1}{4} = 0{,}5 \text{ m/s}^2$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} Mg - T = Ma \\ T - f = ma \\ f = mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right| \Rightarrow Mg - mg\,\mathrm{sen}\,\varphi = (M + m)a$$

$$\boxed{m = M\,\frac{g - a}{g\,\mathrm{sen}\,\varphi + a} = 220\,\frac{9{,}8 - 0{,}5}{9{,}8 \times 0{,}5 + 0{,}5} = 379 \text{ g}}$$

2)

$$\boxed{T = Mg - Ma = M(g - a) = 220 \times 10^{-3}(9{,}8 - 0{,}5) = 2{,}0 \text{ N}}$$

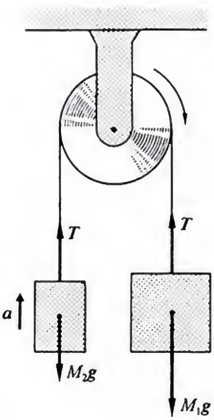
Problema 18. Por la garganta de una polea de masa despreciable, que gira sin rozamiento alrededor de su eje horizontal, pasa un hilo de masa despreciable, cuyos extremos sostienen dos pesos, P_1 y P_2.

1. En una primera experiencia los dos ramales del hilo son verticales, valiendo P_1 = 539 gp y P_2 = 441 gp. Despeciando la masa de la polea, calcular: a) La

aceleración del sistema. b) El espacio recorrido al cabo de los tres primeros segundos. c) La velocidad adquirida al cabo de esos 3 s.

2. En una segunda experiencia el ramal que sostiene el peso P_2 es paralelo a la línea de máxima pendiente de un plano inclinado, 30° sobre la horizontal, por el que se desliza P_2 sin rozamiento. Calcular los valores que deben tener P_1 y P_2 (cuya suma se mantiene igual que en la experiencia anterior, es decir, 980 gp) para que la velocidad del sistema al cabo de los tres primeros segundos sea la misma que en la experiencia anterior. Calcular la tensión del hilo durante el movimiento.

3. En esta segunda experiencia se corta el hilo en el instante en que han transcurrido los 3 s de inciarse espontáneamente el movimiento. Calcular la posición y la velocidad de P_2 al cabo de 1,2 s de haberse roto el hilo.



Problema VIII-18

Solución

$$M_1 = 0{,}539 \text{ kg} \qquad M_2 = 0{,}441 \text{ kg}$$

1)

a)

$$\left.\begin{array}{l} M_1g - T = M_1a \\ T - M_2g = M_2a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = g\,\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = 9{,}8\,\frac{0{,}098}{0{,}98} = 0{,}98 \text{ m/s}^2}$$

b)

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\,at^2 = \frac{1}{2}\,0{,}98 \times 9 = 4{,}41 \text{ m}}$$

c)

$$\boxed{v = at = 0{,}98 \times 3 = 2{,}94 \text{ m/s}}$$

2) Al ser la misma v en el mismo tiempo, a debe ser la misma:

$$a = 0{,}98 \text{ m/s}^2 \qquad M_1 + M_2 = 0{,}98 \text{ kg}$$

Descomponer M_2g en las direcciones paralela y perpendicular al plano (ver figura del problema anterior) y aplicar el segundo principio de Newton (supondremos que M_1 arrastra a M_2):

$$\left.\begin{array}{l} M_1g - T = M_1a \\ T - M_2g\,\text{sen}\varphi = M_2a \end{array}\right| \Rightarrow \; M_1g - M_2g\,\text{sen}\varphi = (M_1 + M_2)a$$

$$9{,}8M_1 - 9{,}8 \times 0{,}5M_2 = 0{,}98(M_1 + M_2)$$

dividiendo por 0,98:

$$\left.\begin{array}{l} 10M_1 - 5M_2 = M_1 + M_2 \\ M_1 + M_2 = 0{,}98 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{M_1 = 0{,}392 \text{ kg}} \\ \boxed{M_2 = 0{,}588 \text{ kg}} \end{array}$$

La tensión del hilo es:

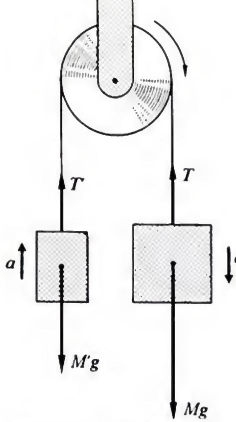
$$\boxed{T = M_1g - M_1a = M_2g\,\text{sen}\varphi + M_2a = \frac{0{,}392}{9{,}8}(9{,}8 - 0{,}98) = 0{,}3528 \text{ kp}}$$

3) La velocidad sobre el plano y hacia arriba al cortarse el hilo es:

$$v_0 = 2{,}94 \text{ m/s}$$

La aceleración hacia abajo (movimiento uniformemente decelerado) es:

$$M_2g\,\text{sen}\varphi = M_2a' \;\Rightarrow\; a' = g\,\text{sen}\varphi = 4{,}9 \text{ m/s}^2$$



Problema VIII-19-1.ª

La posición del cuerpo, a partir del lugar donde se rompe el hilo es:

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a' t^2 \quad \Rightarrow \quad s = 2{,}94 \times 1{,}2 - \frac{1}{2} 4{,}9 \times 1{,}2^2 = 0$$

La posición del cuerpo es la misma que en el instante de cortarse el hilo.

La velocidad es:

$$v = v_0 - a't \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 2{,}94 - 4{,}9 \times 1{,}2 = -\,2{,}94 \text{ m/s}}$$

la misma que en el instante de cortarse el hilo, pero hacia abajo, como es natural, ya que la energía cinética en tal posición debe ser la misma al subir que al bajar si no hay rozamientos.

Problema 19. Las masas que penden de los extremos del cordón (supuesto inextensible y sin peso) de una máquina de Atwood son 505 g y 495 g. Calcular la velocidad con que desciende la masa mayor, al haber efectuado un recorrido de 1 m (suponemos la polea sin peso).

Solución

Vamos a resolver el problema de dos formas: por la segunda ley de Newton y por el principio de D'Alambert.

1.^{er} MÉTODO: Teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre cada una de las masas (ver Fig. 1.ª), las ecuaciones del movimiento para cada una de ellas será:

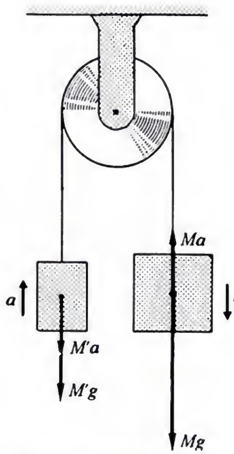
$$Mg - T = Ma$$

$$T' - M'g = M'a$$

Al ser el cordón inextensible y sin peso, tendrá que verificarse que $T = T'$, luego:

$$Mg - M'g = (M + M')a \quad \Rightarrow \quad a = g\,\frac{M - M'}{M + M'} \quad \Rightarrow \quad a = 980\,\frac{505 - 495}{505 + 495} = 98 \text{ cm/s}^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2 \times 98 \times 100} = 140 \text{ cm/s}}$$



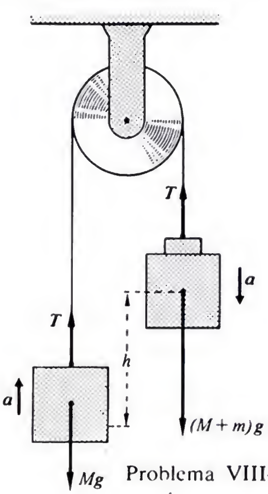
Problema VIII-19-2.ª

2.º MÉTODO: Aplicando el principio de D'Alambert y considerando las fuerzas a favor del movmiento como positivas, y las en contra de él como negativas (Fig. 2.ª), nos da:

$$Mg - Ma - M'g - M'a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = g\,\frac{M - M'}{M + M'}$$

obteniéndose los mismos resultados.

Problema 20. Dos masas iguales, cada una de 1 kg, penden de los extremos de un hilo inextensible y sin peso que pasa por una polea de masa despreciable. ¿Qué diferencia de altura debe haber entre las dos masas para que una sobrecarga de 20 g colocada sobre la más elevada dé lugar a que al cabo de 2 s ambas estén a la misma altura? Si las masas continúan moviéndose, ¿qué diferencia de altura habrá entre ellas al cabo de 4 s?



Problema VIII-20-1.ª

Solución

1.ª FORMA: La ecuación del movimiento a cada una de las cargas nos da:

$$\left.\begin{array}{l} (M + m)g - T = (M + m)a \\ T - Mg = Ma \end{array}\right| \Rightarrow \quad mg = (2M + m)a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m}{2M + m}\,g = \frac{2 \times 10^{-2}}{2 + 2 \times 10^{-2}}\,9{,}8 = 0{,}1 \text{ m/s}^2$$

1) El espacio recorrido en 2 s por uno cualquiera de los dos cuerpos es:

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \times 4 = 0{,}2 \text{ m}$$

luego:

$$\boxed{h = 2s = 0{,}4 \text{ m}}$$

2) Contando los $t_1 = 4$ s a partir del momento en que están a igual altura, cada uno de los cuerpos recorren una distancia:

$$s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} at_1^2$$

siendo v_0 la velocidad que llevan los dos cuerpos cuando están juntos:

$$v_0 = at = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2 \text{ m/s}$$

entonces:

$$s = 0{,}2 \times 4 + \frac{1}{2} 0{,}1 \times 16 = 1{,}6 \text{ m}$$

luego la diferencia de alturas será:

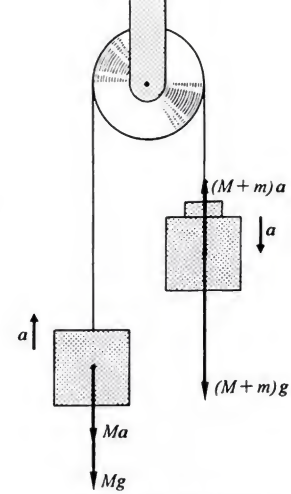
$$\boxed{h_1 = 2s = 3{,}2 \text{ m}}$$

2.ª FORMA: Calculemos la aceleración del sistema aplicando el principio de D'Alambert (Fig. 2.ª):

$$(m + M)g - (M + m)a - Mg - Ma = 0 \quad \Rightarrow$$

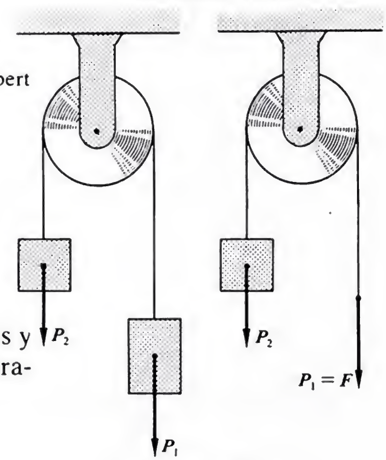
$$a = g \frac{m}{2M + m}$$

obteniéndose los mismos resultados.



Problema VIII-20-2.ª

Problema 21. En los sistemas representados en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. $P_1 = F = 10$ kp y $P_2 = 8$ kp. Determinar las aceleraciones de ambos sistemas.



Problema VIII-21

Solución

$$P_1 = 10 \text{ kp} \quad \Rightarrow \quad M_1 = 10 \text{ kg}$$

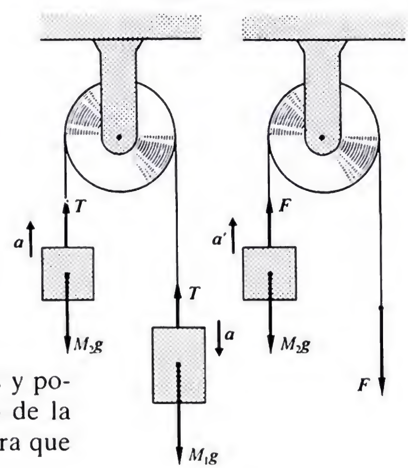
$$P_2 = 8 \text{ kp} \quad \Rightarrow \quad M_2 = 8 \text{ kg}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} M_1 g - T = M_1 a \\ T - M_2 g = M_2 a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = g \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = 9{,}8 \frac{10 - 8}{10 + 8} = 1{,}09 \text{ m/s}^2}$$

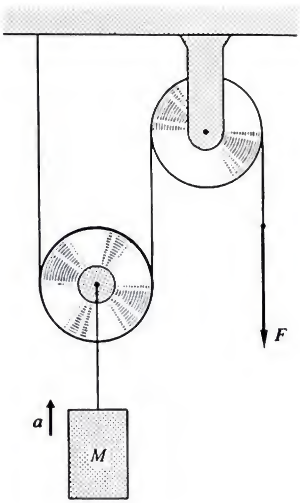
2)

$$F - M_2 g = M_2 a \quad \Rightarrow \boxed{a = \frac{F - M_2 g}{M_2} = \frac{10 \times 9{,}8 - 8 \times 9{,}8}{8} = 2{,}45 \text{ m/s}^2}$$

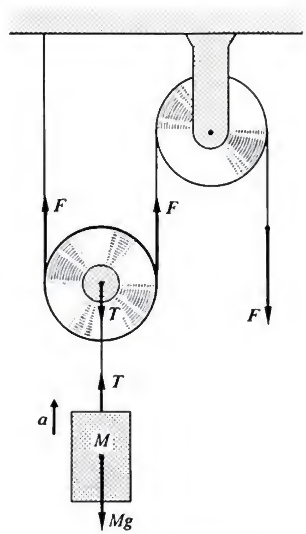


Problema VIII-21-1.ª

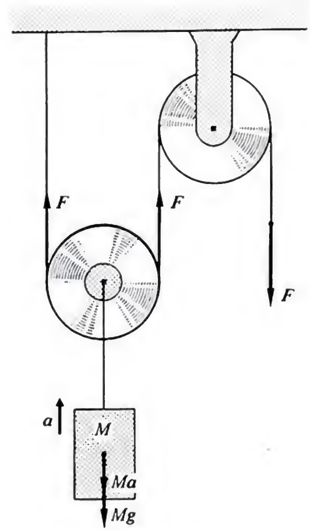
Problema 22. En el sistema representado en la figura los pesos de cables y poleas son despreciables. ¿Con qué fuerza F es necesario tirar del extremo de la cuerda para que la masa M se mueva hacia arriba con aceleración a? ¿Y para que el sistema se encuentre en equilibrio?



Problema VIII-22



Problema VIII-22-1.ª



Problema VIII-22-2.ª

Solución

1.^er^ MÉTODO (Fig. 1.ª): La ecuación del movimiento aplicada al cuerpo nos da:

$$T - Mg = Ma$$

al considerarse nulo el peso de las poleas:

$$2F - T = 0$$

luego:

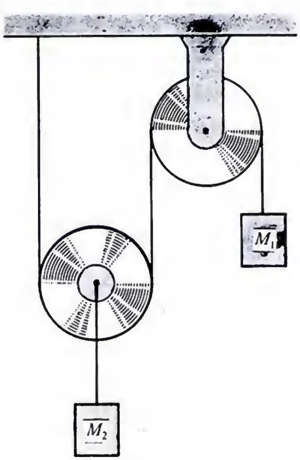
$$2F - Mg = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = M\,\frac{g + a}{2}}$$

2.º MÉTODO (Fig. 2.ª): La aplicación del principio de D'Alambert al sistema:

$$2F - Mg - Ma = 0 \quad \Rightarrow \quad F = M\,\frac{g + a}{2}$$

Para $a = 0$ el sistema se encuentra en equilibrio; luego:

$$\boxed{F = \frac{Mg}{2}}$$



Problema VIII-23

Problema 23. En el sistema representado en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar las condiciones de movimiento en uno u otro sentido y, en su caso, las aceleraciones de los cuerpos.

Solución

Las condiciones de movimiento son:

$2M_1g > M_2g$	$\Rightarrow$	M_1 baja y M_2 sube
$2M_1g = M_1g$	$\Rightarrow$	Sistema en equilibrio
$2M_1g < M_2g$	$\Rightarrow$	M_1 sube y M_2 baja

Sea a la aceleración descendente de M_1, entonces M_2 asciende con una aceleración $a/2$. La aplicación de la ecuación del movimiento a ambos cuerpos nos da:

$$M_1 g - T_1 = M_1 a$$

$$T_2 - M_2 g = M_2 \frac{a}{2}$$

pero:

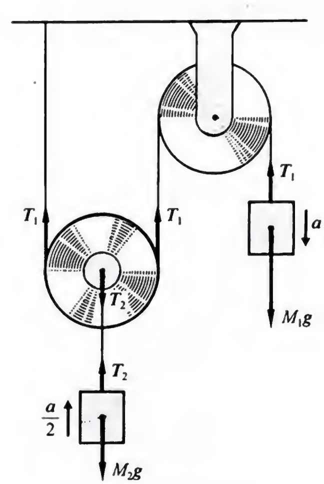
$$2T_1 - T_2 = 0$$

la resolución de este sistema de tres ecuaciones nos conduce a que:

$$\boxed{a_1 = a = 2g \frac{2M_1 - M_2}{4M_1 + M_2}}$$

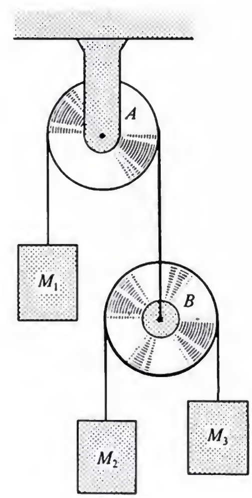
$$\boxed{a_2 = \frac{a}{2} = g \frac{2M_1 - M_2}{4M_1 + M_2}}$$

ecuaciones que nos confirman las condiciones de movimiento dadas.



Problema VIII-23-1.ª

Problema 24. En el sistema representado en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar las aceleraciones de los cuerpos.



Problema VIII-24

Solución

La aplicación de la ecuación del movimiento a los cuerpos, dando el sentido de las aceleraciones, los indicados en la figura (una vez resuelto el problema y, en su caso, sustituidos los valores numéricos, se obtendrá el sentido real), nos da:

$$M_1 a_1 = M_1 g - T_1$$

$$M_2 a_2 = M_2 g - T_2$$

$$M_3 a_3 = M_3 g - T_3$$

pero:

$$T_2 = T_3$$

$$T_1 = T_2 + T_3$$

La aceleración a_1 con que se mueve el cuerpo M_1 es la misma, pero de sentido contrario $(-a_1)$, con que se mueve la polea B, y la aceleración de los cuerpos M_2 y M_3 respecto a la polea B tienen que ser iguales y dirigidas en sentido contrario, llamando a a la aceleración de M_2 respecto de la polea B, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= (-a_1) + a \\ a_3 &= (-a_1) + (-a) \end{aligned}\right| \Rightarrow a_2 + a_3 = -2a_1$$

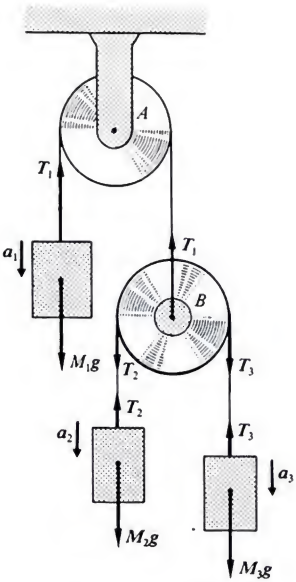
llamando T a la tensión T_1 y teniendo en cuenta su relación con T_2 y T_3, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_1 a_1 = M_1 g - T$$

$$M_2 a_2 = M_2 g - \frac{T}{2}$$

$$M_2 a_3 = M_3 g - \frac{T}{2}$$

$$a_2 + a_3 = -2a_1$$



Problema VIII-24-1.ª

eliminando T entre las tres primeras, nos queda:

$$\begin{aligned} M_1a_1 - 2M_2a_2 \qquad\qquad &= g(M_1 - 2M_2) \\ M_1a_1 \qquad\qquad - 2M_3a_3 &= g(M_1 - 2M_3) \\ 2a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

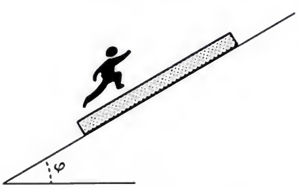
$$\Delta = \begin{vmatrix} M_1 & -2M_2 & 0 \\ M_1 & 0 & -2M_3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8M_2M_3 + 2M_1M_2 + 2M_1M_3$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} g(M_1 - 2M_2) & -2M_2 & 0 \\ g(M_1 - 2M_3) & 0 & -2M_3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = 2g\,\frac{M_2(M_1 - 2M_3) + M_3(M_1 - 2M_2)}{8M_2M_3 + 2M_1M_2 + 2M_1M_3}$$

$$\boxed{a_1 = g\,\frac{M_1(M_2 + M_3) - 2M_2M_3}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)}}$$

$$\boxed{a_2 = g\,\frac{4M_2M_3 + M_1(M_2 - 3M_3)}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)}}$$

$$\boxed{a_3 = g\,\frac{4M_2M_3 + M_1(M_3 - 3M_2)}{4M_2M_3 + M_1(M_2 + M_3)}}$$



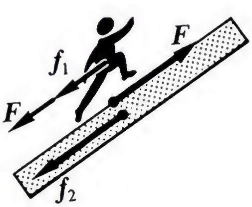
Problema VIII-25

Problema 25. Calcular la aceleración con que ha de subir un atleta de masa M_1 por un tablón de masa M_2 apoyado sobre un plano inclinado un ángulo φ, para que el tablón permanezca inmóvil. Entre el tablón y el plano inclinado no existe rozamiento. ¿Qué espacio recorrió el atleta, si su velocidad inicial era v_0, hasta el momento en que se paró?

Solución

Para que el tablón permanezca inmóvil, y por tanto no resbale a lo largo del plano, la fuerza F que el atleta hace sobre la tabla deberá estar dirigida a lo largo de la tabla y hacia arriba, compensando la componente de su peso ($f_2 = M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi$) dirigida hacia abajo. Sobre el atleta actuará una fuerza igual y de sentido contrario. Con estas condiciones, aplicando la ecuación del movimiento al atleta:

$$\left.\begin{aligned} -f_1 - F &= M_1a \\ f_1 &= M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \; -M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi - F = M_1a$$



Problema VIII-25-1.ª

pero, como ya hemos dicho:

$$F = f_2 = M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi$$

sustituyendo, nos queda:

$$-M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi - M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi = M_1a \;\Rightarrow\; \boxed{a = -g\,\frac{M_1 + M_2}{M_1}\,\mathrm{sen}\varphi}$$

El movimiento del atleta es uniformemente decelerado, llegando al reposo cuando:

$$v_0 = \sqrt{2|a|s} \;\Rightarrow\; \boxed{s = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{v_0^2M_1}{2g(M_1 + M_2)\,\mathrm{sen}\varphi}}$$

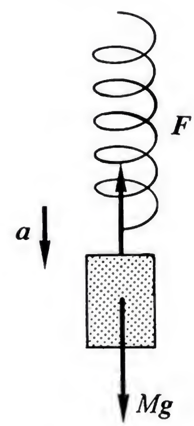
Problema 26. Los cuerpos caen sobre la tierra, atraídos por ella, con un movimiento acelerado. Si nos suponemos en el interior de una esfera metálica hueca, cayendo hacia la tierra, al volcar un vaso de agua, ésta no caería. ¿Podríamos pasear cabeza arriba o cabeza abajo por toda la superficie esférica? ¿Qué ocurriría con nuestro vaso de agua boca abajo, si, por propulsión, la cápsula sube a gran velocidad y, cesando la propulsión, sigue subiendo durante cierto tiempo, debido a la velocidad adquirida?


Problema VIII-26

Solución

La aceleración «hacia abajo» provoca una fuerza de inercia «hacia arriba» igual y de sentido contrario al peso de los cuerpos del interior de la bola. Para los habitantes del interior de la bola no existe «arriba» ni «abajo», por no sentirse atraídos por la tierra.
Aunque el cuerpo esté subiendo —sin propulsión— la aceleración de la gravedad hacia abajo provoca una fuerza de inercia hacia arriba y de sentido contrario al peso, por lo que el agua no cae.

Problema 27. Sabiendo que los cuerpos caen sobre la tierra con movimiento uniformemente acelerado (considerando pequeñas variaciones de altura), determinar la indicación de una balanza de resorte (graduada en la superficie de la tierra) que dejamos caer desde un globo, llevando pendiente un cuerpo de 10 kg.



Problema VIII-27

Solución

La indicación del dinámometro vendrá dada, según el principio de D'Alambert, por la expresión:

$$\left.\begin{array}{r} Mg - Ma = 0 \\ a = g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\text{Marcará en el cero de la escala}}$$

Aplicando el segundo principio de Newton, podríamos razonar de la siguiente manera: supongamos que el cuerpo baja con una aceleración a; sobre él actuará su peso y la fuerza que el resorte hace sobre él (ésta es precisamente la que indica el aparato); por tanto:

$$Mg - F = Ma \quad \Rightarrow \quad F = M(g - a)$$

siendo $g = a$, el dinamómetro marcará el cero de la escala.

Problema 28. Calcular el momento lineal de un proyectil que pesa 10 kg y se lanza con una velocidad de 100 m/s, formando un ángulo de 45° con la horizontal.
1. En el punto más elevado de su trayectoria.
2. En el punto en que alcanza de nuevo la horizontal.
3. A los 10 s del lanzamiento.

Solución

1) En el punto más elevado su velocidad es:

$$v_1 = v_0 \cos\varphi$$

luego:

$$p_1 = Mv_1 = Mv_0\cos\varphi = 10 \times 100 \ \frac{\sqrt{2}}{2} = 500\ \sqrt{2}\,\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

2) Cuando alcanza de nuevo la horizontal la velocidad que posee es la misma que en el origen; luego:

$$p_2 = Mv_0 = 10^3 \ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

3) En cualquier instante la velocidad se calculará:

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array}\right| \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt)^2}$$

luego a los 10 s será:

$$p_3 = Mv = M\sqrt{v_0^2\cos^2\varphi + (v_0\operatorname{sen}\varphi - gt)^2} = 10 \ \sqrt{(50\sqrt{2})^2 + (50\sqrt{2} - 9{,}8 \times 10)^2}$$

$$p_3 = 757{,}9 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

Las soluciones vectoriales responden a la fórmula:

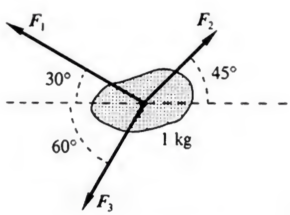
$$\boldsymbol{p} = Mv_{0\cos\varphi}\boldsymbol{i} + M(v_0\operatorname{sen}\varphi - gt)\boldsymbol{k}$$

dando en los tres casos:

$$\boxed{\boldsymbol{p}_1 = 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p}_2 = 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} - 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{p}_3 = 500\sqrt{2}\,\boldsymbol{i} - 272{,}9\boldsymbol{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$



Problema VIII-29

Problema 29. Sobre un cuerpo actúan las fuerzas indicadas en la figura. Si $F_1 = 2$ kp, $F_2 = 4$ kp y $F_3 = 6$ kp y la masa del cuerpo es 1 kg, calcular la aceleración del cuerpo.

Solución

$$\Sigma \boldsymbol{F}_i = M\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = M\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{M}$$

$$\varphi_1 = 45° \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1 \cos\varphi_1 = \sqrt{2} \text{ kp} \\ F_{1y} = F_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = \sqrt{2} \text{ kp} \end{array}\right.$$

$$\varphi_2 = 150° \left| \begin{array}{l} F_{2x} = F_2 \cos\varphi_2 = -2\sqrt{3} \text{ kp} \\ F_{2y} = F_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = 2 \text{ kp} \end{array}\right.$$

$$\varphi_3 = 240° \left| \begin{array}{l} F_{3x} = F_3 \cos\varphi_3 = -3 \text{ kp} \\ F_{3y} = F_3 \operatorname{sen}\varphi_3 = -3\sqrt{3} \text{ kp} \end{array}\right.$$

$$\boldsymbol{F} = (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 3)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{3})\boldsymbol{j} = -5{,}0\boldsymbol{i} - 1{,}8\boldsymbol{j} \text{ kp}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a} = -5 \times 9{,}8\boldsymbol{i} - 1{,}8 \times 9{,}8\boldsymbol{j} = -49{,}0\boldsymbol{i} - 17{,}6\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

Problema 30. Sobre una partícula de 1 kg de masa actúan simultáneamente las fuerzas: $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ N, $\boldsymbol{F}_2 = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ N y $\boldsymbol{F}_3 = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ N. Calcular:

1. La aceleración de la partícula.

2. La fuerza que hay que añadir para que la partícula esté en reposo.
3. La fuerza que hay que añadir para que la partícula se mueva con una aceleración $\boldsymbol{a}'' = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ m/s^2.

Solución

1)

$$\boldsymbol{F} = \Sigma \boldsymbol{F}_i = M\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ N} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{M} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \text{ N}}$$

3) Llamándola $\boldsymbol{F}_4$:

$$\boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4 = M\boldsymbol{a}'' \Rightarrow \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} + \boldsymbol{F}_4 = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{F}_4 = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \text{ N}}$$

Problema 31. El radio vector que nos define la posición de una partícula de 2 kg de masa viene expresado por: $\boldsymbol{r} = (3t^2 - 5)\boldsymbol{i} - (4t^3 + t)\boldsymbol{j} + (2t^2 - t + 1)\boldsymbol{k}$ (SI). Calcular:
1. El momento lineal de la partícula $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t)$.
2. La fuerza que actúa sobre la partícula $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$.

Solución

1)

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 6t\boldsymbol{i} - (12t^2 + 1)\boldsymbol{j} + (4t - 1)\boldsymbol{k} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = 12t\boldsymbol{i} - (24t^2 + 2)\boldsymbol{j} + (8t - 2)\boldsymbol{k} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

2)

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 12\boldsymbol{i} - 48t\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k} \text{ N}}$$

Problema 32. Sobre una masa puntual de 500 g que se mueve en el plano OXY actúan simultáneamente las fuerzas $\boldsymbol{F}_1 = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$ N y $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$ N. Si la masa se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas y su $\boldsymbol{v}_0 = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ m/s. Calcular:
1. Las ecuaciones horarias del movimiento.
2. El momento lineal a los 3 s de iniciado el movimiento.

Solución

1)

$$\Sigma \boldsymbol{F}_i = M\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = M\boldsymbol{a} \Rightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{M} \quad , \quad \boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \text{ N} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2}$$

$$\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a}\,dt \Rightarrow \boldsymbol{v} = (4t + C_1)\boldsymbol{i} + (4t + C_2)\boldsymbol{j}$$

siendo $C_1 = 3$ m/s y $C_2 = 4$ m/s:

$$\boxed{v = (4t + 3)i + (4t + 4)j \text{ m/s}}$$

$$r = \int v dt = (2t^2 + 3t + C'_1)i + (2t^2 + 4t + C'_2)j$$

siendo $C'_1 = 0$ y $C'_2 = 0$:

$$\boxed{r = (2t^2 + 3t)i + (2t^2 + 4t)j \text{ m}}$$

2)

$$p = Mv = (2t + 1{,}5)i + (2t + 2)j \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$t = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 7{,}5i + 8j \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

Problema 33. En un instante determinado tres partículas de 2, 3 y 1 kg poseen las velocidades $v_1 = 3i - 2j + 6k$ m/s, $v_2 = 3j - 2k$ m/s y $v_3 = i - j - 3k$ m/s, respectivamente. Calcular:

1. La velocidad del centro de masa en ese momento.
2. El momento lineal del sistema.
3. La velocidad de las partículas referidas a su CM como origen.

Solución

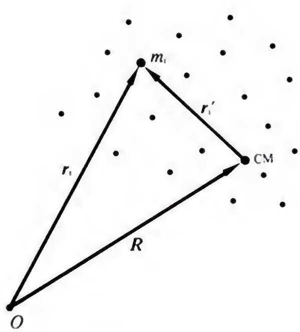
1)

$$\left.\begin{array}{l} R = \dfrac{\Sigma m_i r_i}{M} \\ \\ M = \Sigma m_i \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v = \dfrac{dR}{dt} = \dfrac{1}{M}\Sigma m_i v_i \\ \\ M = 6 \text{ kg} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1v_1 = 6i - 4j + 12k \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ m_2v_2 = \quad\;\; 9j - \;6k \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ m_3v_3 = \;\; i - \;\; j - \;3k \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \frac{7}{6}i + \frac{4}{6}j + \frac{3}{6}k = \frac{7}{6}i + \frac{2}{3}j + \frac{1}{2}k \text{ m/s}}$$

2)

$$\boxed{p = \Sigma m_i v_i = Mv = 7i + 4j + 3k \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$



Problema VIII-33

3) De la figura deducimos:

$$r'_i = r_i - R \quad \Rightarrow \quad \frac{dr'_i}{dt} = \frac{dr_i}{dt} - \frac{dR}{dt} \quad \Rightarrow \quad v'_i = v_i - v$$

luego:

$$\boxed{v'_1 = v_1 - v = \frac{11}{6}i - \frac{8}{3}j + \frac{11}{2}k \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v'_2 = v_2 - v = -\frac{7}{6}i + \frac{7}{3}j - \frac{5}{2}k \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v'_3 = v_3 - v = -\frac{1}{6}i - \frac{5}{3}j - \frac{7}{2}k \text{ m/s}}$$

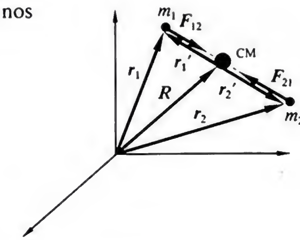
Problema 34. Sobre dos partículas de masas m_1 y m_2 no actúan fuerzas externas y únicamente se ejercen sobre ellas las fuerzas internas y newtonianas ($\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$) de interacción entre ambas; conocidas éstas:
1. Determinar la aceleración del movimiento relativo a ellas.
2. Si en un instante determinado las partículas tienen velocidades $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ referidas a un origen de un sistema inercial. Determinar la velocidad del CM referida al sistema inercial y la velocidad de las partículas referidas al CM como origen.
3. Verificar que al no actuar fuerzas externas la velocidad del CM permanece invariable, o lo que es lo mismo: el momento lineal total del sistema de las dos partículas es nulo en el sistema de referencia CM.

Solución

1) Aplicando a cada partícula la primera ecuación del movimiento, se obtiene:

$$\boldsymbol{F}_{12} = m_1 \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} = \frac{d\boldsymbol{v}_1}{dt} \qquad \boldsymbol{F}_{21} = m_2 \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} = \frac{d\boldsymbol{v}_2}{dt}$$

teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_{12}$ es la velocidad de m_1 relativa a m_2 (velocidad dada por un observador montado en m_2) y que $\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21}$; restando las dos ecuaciones anteriores, nos queda:



Problema VIII-34

$$\frac{d(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{dt} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{m_1} - \frac{\boldsymbol{F}_{21}}{m_2} \Leftrightarrow \frac{d\boldsymbol{v}_{12}}{dt} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\boldsymbol{F}_{12}$$

luego:

$$\boxed{\boldsymbol{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\boldsymbol{F}_{12}}$$

se llama masa reducida a la cantidad:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

con lo que el valor de la aceleración relativa en función de esta cantidad será:

$$\boldsymbol{a}_{12} = \frac{\boldsymbol{F}_{12}}{\mu} \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{F}_{12} = \mu \boldsymbol{a}_{12}}$$

expresión de la que deducimos el teorema siguiente: «El movimiento relativo de dos partículas sujetas a su interacción mutua es equivalente al movimiento, relativo a un observador inercial, de una partícula de masa igual a la masa reducida bajo una fuerza igual a la interacción.»

2)

$$\boldsymbol{R} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i}{M}$$

para las dos partículas de nuestro problema:

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2}}$$

además:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}_1' = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R} \\ \\ \boldsymbol{r}_2' = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{\boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = \dfrac{m_2(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2)}{m_1 + m_2}} \\ \boxed{\boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v} = \dfrac{m_1(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1)}{m_1 + m_2}} \end{array}\right.$$

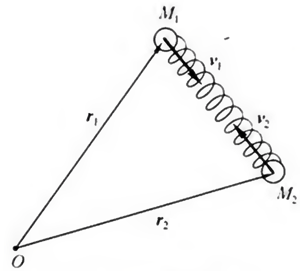
3) De las anteriores se obtiene:

$$v_1' = \frac{m_2 v_{12}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad p_1' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{12} = \mu v_{12}$$

$$v_2' = -\frac{m_1 v_{12}}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad p_2' = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{12} = -\mu v_{12}$$

con lo que:

$$\boxed{p_1' + p_2' = 0}$$



Problema VIII-35

Problema 35. Dos cuerpos de masas M_1 y M_2 están unidos por un resorte espiral y les suponemos situados en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia externa). Estiramos el resorte y a continuación lo soltamos. Determinar la relación que existe entre las velocidades de ambas masas en cualquier instante, después de que se han soltado.

Solución

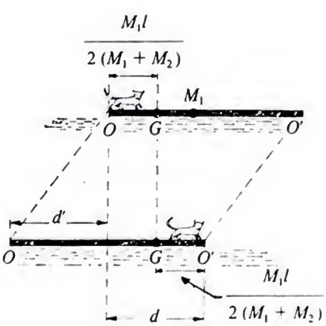
Al no actuar sobre el sistema ninguna fuerza externa, el movimiento del centro de masa permanecerá invariable, y como inicialmente está en reposo, permanecerá en él. Luego:

$$\boldsymbol{R} = \frac{M_1 \boldsymbol{r}_1 + M_2 \boldsymbol{r}_2}{M_1 + M_2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$M_1 \frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt} + M_2 \frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 \boldsymbol{v}_1 + M_2 \boldsymbol{v}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_1} = -\frac{M_1}{M_2}}$$

Problema 36. Sobre las aguas tranquilas de un estanque flota una tabla rectangular y homogénea de masa M_1 y longitud l; sobre uno de sus extremos descasa un gato de masa M_2; cuidadosamente el animal pasa de uno a otro extremo de la tabla. ¿Cuánto ha avanzado el gato con relación al agua? ¿Qué retroceso ha sufrido el extremo de la tabla? Se desprecia todo rozamiento y se considera al gato como una masa puntual.

Solución



Problema VIII-36

La abscisa del centro de masa del sistema con respecto a O es:

$$x_G = \frac{M_1 l}{2(M_1 + M_2)}$$

La posición del centro de masa no puede alterarse, y cuando el gato está en O' la tabla estará en la posición indicada en la figura inferior. El gato ha avanzado con relación al agua una distancia:

$$\boxed{d = \frac{M_1 l}{2(M_1 + M_2)} + \frac{M_1 l}{2(M_1 + M_2)} = \frac{M_1 l}{M_1 + M_2}}$$

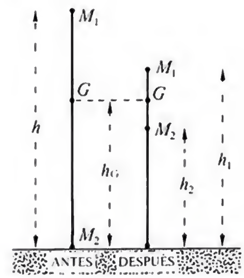
El extremo O de la tabla ha retrocedido:

$$\boxed{d' = l - d = l - \frac{M_1 l}{M_1 + M_2} = \frac{M_2 l}{M_1 + M_2}}$$

Problema 37. Un atleta de 100 kg de peso se cuelga de una cuerda que pende de un globo que con todos sus accesorios pesa 500 kg; en estas condiciones el centro de masa del globo se encuentra en reposo y a 30 m del centro de masa del atleta. El atleta trepa por la cuerda hasta llegar a la barquilla, situándose su centro de masa a 6 m por debajo del centro de masa del globo. Determinar:

1. La altura sobre el suelo que ha subido el atleta.

2. La velocidad con que se moverá el globo respecto al suelo en un instante en que el atleta asciende a 0,4 m/s.



Problema VIII-37

Solución

M_1: Masa del globo.
M_2: Masa del atleta.

1) Cuando asciende el atleta hacia el globo no actúan fuerzas exteriores y, por tanto, la posición del centro de masa del sistema globo-atleta permanecerá en reposo y en su posición inicial, que es:

$$h_G = \frac{M_1 h}{M_1 + M_2} = \frac{500 \times 30}{600} = 25 \text{ m}$$

luego cuando el hombre haya ascendido h_2 m sobre el suelo, el globo estará a una altura h_1, que verifican:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{M_1 h_1 + M_2 h_2}{M_1 + M_2} = 25 \text{ m} \\ h_1 - h_2 = 6 \text{ m} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{h_2 = 20 \text{ m}}$$

2) En un instante en que los centros de masa del globo y del atleta se encuentran a y_1 e y_2 del suelo, la posición del centro de masa del sistema será:

$$h_G = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2}$$

derivando respecto al tiempo y teniendo en cuenta que el centro de masa del sistema está en reposo, se obtiene:

$$\frac{dh_G}{dt} = 0 = \frac{1}{M_1 + M_2}\left(M_1 \frac{dy_1}{dt} + M_2 \frac{dy_2}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{v_1 = -\frac{M_2}{M_1} v_2 = -\frac{100}{500} 0{,}4 = -0{,}08 \text{ m/s}}$$

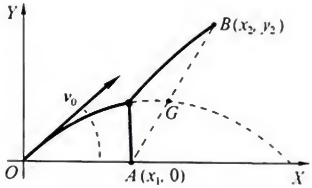
el signo menos nos indica que el globo se mueve hacia abajo.

Problema 38. Un proyectil de 30 kg de masa es lanzado por un cañón con una velocidad de 200 m/s y formando un ángulo con la horizontal de 30°; a los 10 s del disparo explota y se parte en dos trozos; uno de ellos, de 20 kg de masa, cae verticalmente, llegando al suelo 5 s después de la explosión. ¿Dónde se encuentra el segundo trozo respecto al punto de lanzamiento? (se desprecia la masa del explosivo).

Solución

Las fuerzas explosivas son internas en el sistema, con lo que no afectan al movimiento del centro de masa; por tanto, el centro de masa de los dos trozos de metralla estará, después de la

explosión, en la trayectoria que habría seguido el proyectil si no hubiese estallado; por tanto:



Problema VIII-38

$$t = 15\text{ s} \quad \left| \begin{array}{l} x_G = v_0 t \cos\varphi = 1\,500\sqrt{3}\text{ m} \\ y_G = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{1}{2} g t^2 = 1\,500 - 5 \times 15^2 = 375\text{ m} \end{array} \right.$$

$$t = 10\text{ s} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1\,000\sqrt{3}\text{ m}$$

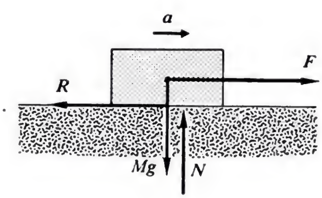
$$x_G = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M_1 + M_2} \quad \Rightarrow \quad 1\,500\sqrt{3} = \frac{20 \times 1\,000\sqrt{3} + 10 x_2}{30} \quad \Rightarrow \boxed{x_2 = 2\,500\sqrt{3}\text{ m}}$$

$$y_G = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M_1 + M_2} \quad \Rightarrow \quad 375 = \frac{20 \times 0 + 10 y_2}{30} \quad \Rightarrow \boxed{y_2 = 1\,125\text{ m}}$$

B) DINAMICA DE LOS SISTEMAS EN TRASLACION CON ROZAMIENTO

Problema 39. Un bloque de 100 kg de peso se arrastra por una superficie horizontal por la acción de una fuerza de 100 kp. Si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el bloque y la superficie es 0,25, calcular la aceleración que adquiere, su velocidad al cabo de 1 min y el espacio recorrido en tal tiempo.

Solución



Problema VIII-39

La ecuación del movimiento del cuerpo será:

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma \mathbf{F}_i = M\mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad F - R = Ma \\ \qquad\qquad\qquad\quad R = \mu N \\ \qquad\qquad\qquad\quad N = Mg \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F - \mu M g}{M}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \dfrac{100 \times 9{,}8 - 0{,}25 \times 100 \times 9{,}8}{100} = 7{,}35\text{ m/s}^2 \\ v = at = 7{,}35 \times 60 = 441\text{ m/s} \\ s = \dfrac{1}{2} a t^2 = \dfrac{1}{2} 7{,}35 \times 60^2 = 13\,230\text{ m} \end{array}}$$

Problema 40. Un coche parte del reposo y alcanza una velocidad de 144 km/h, suponiendo constante la fuerza que se opone al movimiento e igual a 1 kp por cada 100 kg. Calcular el tiempo que tarda en adquirir tal velocidad si la fuerza ejercida por el motor es de 0,08 veces el peso del coche.

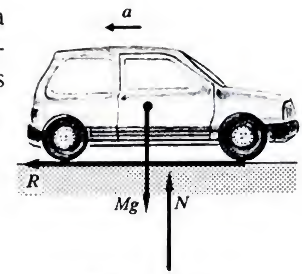
Solución

Trabajando en el SI y tomando $g = 10\text{ m/s}^2$:

$$F - R = Ma \quad \left| \begin{array}{l} F = 0{,}08\,Mg \\ R = \dfrac{1 \times 10}{100} M = 0{,}1\,M \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 0{,}08\,Mg - 0{,}1\,M = Ma \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}8 - 0{,}1 = 0{,}7\text{ m/s}^2$$

$$\boxed{t = \frac{v}{a} = \frac{40}{0{,}7} = 57\text{ s}}$$

Problema 41. Un automóvil que se mueve por una carretera horizontal a la velocidad de 72 km/h frena en un instante determinado, dejando las ruedas inmóviles. Si el coeficiente de rozamiento entre las ruedas del coche y la carretera es 0,4, determínese el espacio recorrido por el automóvil hasta que se detiene.



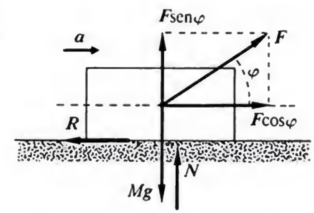
Problema VIII-41

Solución

$$\left.\begin{aligned} R &= Ma \\ R &= \mu N = \mu Mg \end{aligned}\right| \Rightarrow a = \mu g$$

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow \boxed{s = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2\mu g} = \frac{20^2}{2 \times 0{,}4 \times 9{,}8} = 51 \text{ m}}$$

Problema 42. Calcular la aceleración a de un bloque de masa M que se arrastra sobre una superficie horizontal por la acción de una fuerza F que forma un ángulo φ con la dirección del movimiento (con la horizontal), siendo μ el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie.



Problema VIII-42

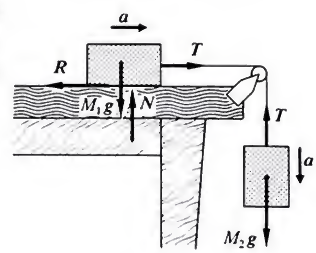
Solución

$$\Sigma F_x = Ma \Rightarrow F\cos\varphi - R = Ma$$

$$R = \mu N = \mu(Mg - F\text{sen}\varphi)$$

$$F\cos\varphi - \mu(Mg - F\text{sen}\varphi) = Ma \Rightarrow \boxed{a = \frac{F\cos\varphi - \mu(Mg - F\text{sen}\varphi)}{M}}$$

Problema 43. Un bloque de hierro de 7 kg de peso es arrastrado sobre una mesa horizontal de madera por la acción de un peso de 2 kg que cuelga verticalmente de una cuerda horizontal unida al bloque de hierro y que pasa por una polea ligera. El coeficiente de rozamiento entre el hierro y la mesa es 0,15. Hallar la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda.



Problema VIII-43

Solución

$$M_1 = 7 \text{ kg} \qquad M_2 = 2 \text{ kg} \qquad \mu = 0{,}15$$

Condición de deslizamiento:

$$M_2 g \geqslant \mu M_1 g \Rightarrow M_2 \geqslant \mu M_1$$

$$2 > 7 \times 0{,}15 \Rightarrow \text{Desliza con movimiento uniforme acelerado}$$

luego:

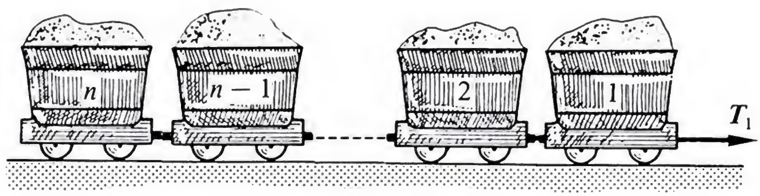
$$\left.\begin{aligned} M_2 g - T &= M_2 a \\ T - R &= M_1 a \\ R = \mu N &= \mu M_1 g \end{aligned}\right| \Rightarrow M_2 g - \mu M_1 g = (M_1 + M_2)a$$

$$\boxed{a = g\,\frac{M_2 - \mu M_1}{M_1 + M_2} = 9{,}8\,\frac{2 - 0{,}15 \times 7}{2 + 7} = 1{,}0 \text{ m/s}^2}$$

La tensión será:

$$\boxed{T = M_2(g - a) = M_1(\mu g + a) = gM_1M_2 \frac{1 + \mu}{M_1 + M_2} = 17.5 \text{ N}}$$

Problema 44. Un convoy minero está compuesto de n vagonetas cargadas con distinta carga y totalizando masas M_1, M_2, M_3 ... M_n. Las ruedas están agarrotadas, de modo que no pueden girar, y cuando el sistema se mueve deslizan a lo largo del carril; el coeficiente dinámico de rozamiento entre las ruedas y los carriles es μ.



Problema VIII-44

1. Determinar la fuerza capaz de mover el sistema con movimiento uniforme y hallar la expresión general de la tensión en los enganches para cualquier vagón.
2. Si tiramos con una fuerza dada, T_1, mayor que la anteriormente calculada, determinar la aceleración del sistema y la expresión general de la tensión en los enganches para cualquier vagón.

Solución

1) Al moverse el sistema con velocidad constante la suma de las fuerzas que actúan sobre cada una de las vagonetas tendrá que ser nula:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = T_2 + R_1 \\ T_2 = T_3 + R_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_{n-1} = T_n + R_{n-1} \\ T_n = R_n \end{array}\right| \Rightarrow \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

y como:

$$R_i = \mu M_i g \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} R_i = \mu g \sum_{i=1}^{n} M_i$$

sustituyendo, nos queda:

$$\boxed{T_1 = \mu g \sum_{i=1}^{n} M_i}$$

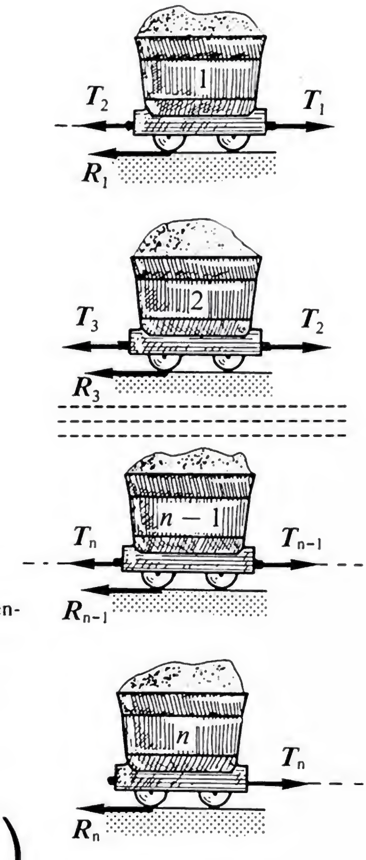
por otro lado:

$$T_2 = T_1 - R_1 = T_1 - \mu M_1 g = \mu g \sum_{i=2}^{n} M_i$$

$$T_3 = T_2 - R_2 = \mu g \sum_{i=3}^{n} M_i$$

en general, para el vagón j:

$$\boxed{T_j = \mu g \sum_{i=j}^{n} M_i}$$



Problema VIII-44-1.

2) Aplicando la ecuación del movimiento a cada vagón:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 - T_2 - R_1 = M_1 a \\ T_2 - T_3 - R_2 = M_2 a \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{n-1} - T_n - R_{n-1} = M_{n-1} a \\ T_n - R_n = M_n a \end{array}\right| \Rightarrow T_1 - \sum_{i=1}^{n} R_i = a \sum_{i=1}^{n} M_i$$

tomando para las fuerzas de rozamiento el mismo valor que en el apartado anterior, tendremos:

$$\boxed{a = \frac{T_1}{\sum_{i=1}^{n} M_i} - \mu g}$$

por otro lado:

$$T_2 = T_1 - R_1 - M_1 a = T_1 - \mu M_1 g - M_1 \left(\frac{T_1}{\sum_{i=1}^{n} M_i} - \mu g \right) = T_1 \left(1 - \frac{M_1}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \right)$$

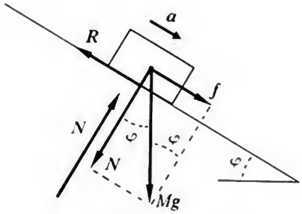
$$T_3 = T_2 - R_2 - M_2 a = T_1 \left(1 - \frac{M_1 + M_2}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \right)$$

en general, para el vagón j:

$$\boxed{T_j = T_1 \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{j-1} M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \right)}$$

Problema 45. Sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal se coloca un cuerpo de 100 g de masa cuyo coeficiente dinámico de rozamiento con el plano es 0,4. Calcular:

1. La fuerza que provoca el deslizamiento.
2. La aceleración del cuerpo.
3. La velocidad a los 5 s de iniciado el movimiento.
4. El espacio recorrido en tal tiempo.



Problema VIII-45-46

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} F = \Sigma F_i = f - R = Ma \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu N \\ N = \mu Mg\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow F = Mg(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) = Ma$$

$$\boxed{F = 0{,}1 \times 9{,}8\left(\frac{1}{2} - 0{,}4\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0{,}15 \text{ N}}$$

2)

$$\boxed{a = \frac{F}{M} = g(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) = 1{,}5 \text{ m/s}^2}$$

3)

$$\boxed{v = at = 1{,}5 \times 5 = 7{,}5 \text{ m/s}}$$

4)

$$\boxed{s = \frac{1}{2}\,at^2 = \frac{1}{2}\,0{,}15 \times 5^2 = 18{,}7 \text{ m}}$$

Problema 46. Tenemos un plano inclinado 40° sobre la horizontal cuya longitud es 1 m. En la parte más alta abandonamos un objeto prismático para que baje deslizándose.

1. Dibújense en un diagrama claramente todas las fuerzas que actúan sobre el bloque que se desliza.

2. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento es 0,5, indíquese si deslizará.

3. Supuesto el deslizamiento, calcúlese para el bloque la aceleración de bajada, el tiempo que invertirá en la misma y la velocidad con que llega al final del plano inclinado.

Solución

2) Al ser tag27° = μ, el cuerpo deslizaría con movimiento uniforme en un plano inclinado 27°. Formando el plano un ángulo de 40° con la horizontal, deslizará con movimiento uniformemente acelerado, cuya aceleración calcularemos por aplicación de la ecuación del movimiento.

3)

$$\left.\begin{array}{l} F = Ma \;\Rightarrow\; f - R = Ma \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu N \\ N = \mu Mg\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow a = g(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 9{,}8(\text{sen}\,40° - 0{,}5\cos 40°) = 2{,}55 \text{ m/s}^2 \\ s = \dfrac{1}{2}\,at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2s}{a}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 1}{2{,}55}} = 0{,}89 \text{ s} \\ v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 2{,}55 \times 1} = 2{,}26 \text{ m/s} \end{array}}$$

Problema 47. Colocamos una moneda sobre una regla y levantamos esta última gradualmente. Cuando el ángulo de inclinación es 25° la moneda comienza a deslizar, observando que recorre la regla (80 cm) en 1,4 s. Calcular los coeficientes estático y dinámico de rozamiento entre la moneda y la regla.

Solución

Cuando la moneda inicia el deslizamiento tendremos:

$$\left.\begin{aligned} F &= R_e \\ F &= Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R_e &= \mu_e N = \mu_e Mg\cos\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\mu_e = \operatorname{tag}\varphi = \operatorname{tag}25° = 0{,}47}$$

Una vez iniciado el deslizamiento, el movimiento es acelerado, verificándose:

$$\left.\begin{aligned} F - R_d &= Ma \\ F &= Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R_d &= \mu_d N = \mu_d Mg\cos\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad a = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu_d\cos\varphi)$$

$$\mu_d = \frac{g\operatorname{sen}\varphi - a}{g\cos\varphi}$$

y como:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 0{,}8}{1{,}4^2} = 0{,}82 \text{ m/s}^2$$

luego:

$$\boxed{\mu_d = \frac{9{,}8\operatorname{sen}25° - 0{,}82}{9{,}8\cos 25°} = 0{,}37}$$

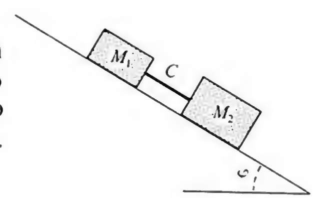
Problema 48. Un coche que pesa 1 500 kg desciende una pendiente del 5 % sin que funcione el motor. El conjunto de las resistencias pasivas que se oponen al movimiento viene dada por la fórmula $R = 0{,}6v^2$ en el SI, siendo v la velocidad. Demostrar que alcanza una velocidad límite y calcular su valor.

Solución

La velocidad del coche se va haciendo cada vez mayor a medida que transcurre el tiempo, aumentando con ella la resistencia. La velocidad límite la alcanzará en el momento en que la resistencia se hace igual a la componente del peso, según la dirección del plano inclinado:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi = 0{,}6v_l^2 \Rightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{Mg\operatorname{sen}\varphi}{0{,}6}} = \sqrt{\frac{1\,500 \times 9{,}8 \times 5}{100 \times 0{,}6}} = 35 \text{ m/s}}$$

Problema 49. En el sistema representado en la figura los cuerpos M_1 y M_2 están unidos por una cuerda C, y los coeficientes de rozamiento entre éstos y el plano inclinado son μ_1 y μ_2. Determinar la condición que tiene que cumplir el ángulo del plano inclinado para que los dos bajen con una aceleración a y calcular ésta.



Problema VIII-49

Solución

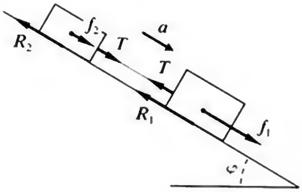
$$f_1 = M_1 g\operatorname{sen}\varphi \qquad R_1 = \mu_1 M_1 g\cos\varphi$$

$$f_2 = M_2 g\operatorname{sen}\varphi \qquad R_2 = \mu_2 M_2 g\cos\varphi$$

La condición será:

$$f_1 + f_2 > R_1 + R_2 \quad \Rightarrow \quad (M_1 + M_2)g\,\mathrm{sen}\varphi > (\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)g\cos\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{tag}\varphi > \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2}}$$



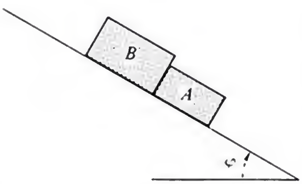
Problema VIII-49-1.ª

en tal caso:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi - \mu_1 M_1 g\cos\varphi - T = M_1 a \\ T + M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi - \mu_2 M_2 g\cos\varphi = M_2 a \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{a = g\,\frac{(M_1 + M_2)\mathrm{sen}\varphi - (\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2)\cos\varphi}{M_1 + M_2}}$$

Problema 50. Sobre un tablero de madera horizontal se colocan dos cuerpos A y B de masas M_1 y M_2 y cuyos coeficientes de rozamiento con la madera son μ_1 y μ_2. Vamos levantando el tablero poco a poco, de forma que φ crece como se indica en la figura. Si consideramos iguales los coeficientes de rozamiento estático y dinámico, determinar:

1. La condición necesaria para que el cuerpo A se mueva antes que el B.
2. La condición necesaria para que los dos cuerpos deslicen, a la vez, juntos.
3. Si se cumple la segunda condición, ¿qué valor debe tener φ para que el sistema AB deslice con movimiento uniforme?
4. ¿Cuál será el valor de la aceleración del movimiento cuando se incline el plano con un ángulo φ', mayor que el φ del apartado anterior?



Problema VIII-50

Solución

1) Deberá verificarse que:

$$\boxed{\mu_1 < \mu_2}$$

2) Pueden deslizar juntos bien por ser idénticos los rozamientos o bien porque siendo el rozamiento de A mayor que el de B, este último «empuje» al cuerpo A. Es decir:

$$\boxed{\mu_1 \geqslant \mu_2}$$

3) Para que el sistema se deslice con movimiento uniforme tendrá que verificarse que la suma de las componentes del peso paralelas al plano sea igual a la suma de las resistencias debidas al rozamiento; es decir:

$$f_1 + f_2 = R_1 + R_2$$

para un ángulo φ:

$$M_1 g\,\mathrm{sen}\varphi + M_2 g\,\mathrm{sen}\varphi = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = \mu_1 M_1 g\cos\varphi + \mu_2 M_2 g\cos\varphi$$

$$\mathrm{sen}\varphi(M_1 + M_2) = \cos\varphi(\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2) \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{tag}\varphi = \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2}}$$

4) Para un ángulo φ' la fuerza que produce movimiento uniformemente acelerado es:

$$F = (f_1 + f_2) - (R_1 + R_2) = \mathrm{sen}\varphi' g(M_1 + M_2) - \cos\varphi' g(M_1\mu_1 + M_2\mu_2)$$

Como:

$$F = (M_1 + M_2)a$$

tendremos:

$$\boxed{a = \frac{g[\text{sen}\varphi'(M_1 + M_2) - \cos\varphi'(M_1\mu_1 + M_2\mu_2)]}{M_1 + M_2} = g\left[\text{sen}\varphi' - \cos\varphi' \frac{M_1\mu_1 + M_2\mu_2}{M_1 + M_2}\right]}$$

Problema 51. En el extremo superior de un plano inclinado 30° sobre la horizontal hay una polea (que supondremos de masa y rozamiento despreciables), por cuya garganta pasa un cordón. Uno de los ramales del cordón sostiene un peso de 10 kg, el otro se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado en su extremo un cuerpo que pesa 10 kg; el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,5. Calcular:

1. La aceleración del sistema.

2. La tensión de la cuerda.

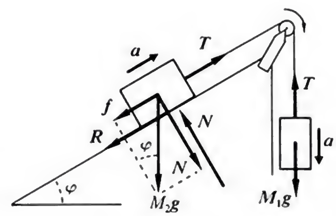
Solución

1) La condición de movimiento en el sentido indicado en la figura es:

$$M_1 g \geqslant M_2 g\,\text{sen}\varphi + \mu M_2 g\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad M_1 \geqslant M_2\,\text{sen}\varphi + \mu M_2\cos\varphi$$

$$M_1 = 10 \text{ kg}$$

$$M_2\,\text{sen}\varphi + \mu M_2\cos\varphi = 10\,\frac{1}{2} + 0{,}5 \times 10\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 9{,}33 \text{ kg}$$



Problema VIII-51

con lo que el sistema se moverá en este sentido con una aceleración constante. Su cálculo será:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 g - T = M_1 a \\ T - f - R = M_2 a \\ f = M_2 g\,\text{sen}\varphi \\ R = \mu N \\ N = M_2 g\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_1 g - M_2 g\,\text{sen}\varphi - \mu M_2 g\cos\varphi = (M_1 + M_2)a \\ \boxed{a = g\,\dfrac{M_1 - M_2\,\text{sen}\varphi - \mu M_2\cos\varphi}{M_1 + M_2} = 9{,}8\,\dfrac{10 - 9{,}33}{20} = 0{,}33 \text{ m/s}^2} \end{array}\right.$$

2) La tensión de la cuerda la calcularemos:

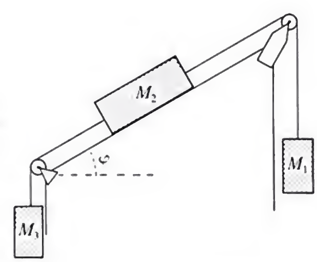
$$T = M_1 g - M_1 a = M_2 g\,\text{sen}\varphi + \mu M_2 g\cos\varphi + M_2 a$$

$$\boxed{T = \frac{10}{9{,}8}(9{,}8 - 0{,}33) = 9{,}66 \text{ kp}}$$

Problema 52. En el sistema representado en la figura las masas de cables y poleas son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie inclinada y el cuerpo M_2 es μ.

1. Determinar las condiciones de movimiento en uno u otro sentido.

2. En el caso en que el sistema se mueva con aceleración, calcular ésta.



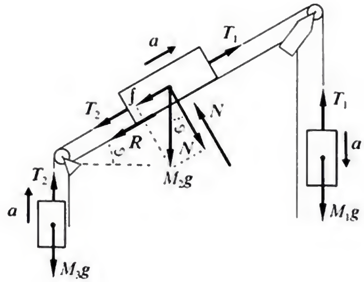
Problema VIII-52

Solución

En las figuras deducimos:

$$f = M_2 g\,\text{sen}\varphi$$

$$R = \mu N = \mu M_2 g\cos\varphi$$



Problema VIII-52-1.ª

1) Puede ocurrir:

a)

$$M_1 g \geqslant f + R + M_3 g \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_1 \geqslant M_2 \operatorname{sen}\varphi + \mu M_2 \cos\varphi + M_3}$$

Si es >, el sistema se mueve hacia la derecha con movimiento acelerado.

Si es =, el sistema está en reposo o se mueve con velocidad constante hacia la derecha.

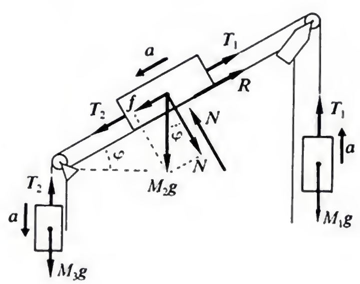
b)

$$M_3 g + f \geqslant R + M_3 g \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_3 + M_2 \operatorname{sen}\varphi \geqslant \mu M_2 \cos\varphi + M_1}$$

Si es >, el sistema se mueve hacia la izquierda con movimiento acelerado.

Si es =, el sistema está en reposo o se mueve con velocidad constante hacia la izquierda.

c) En caso de no verificarse ninguna de las dos condiciones anteriores, el sistema se encuentra en reposo.



Problema VIII-52-2.ª

2) En el caso en que se verifique la condición a) y el movimiento sea acelerado, entonces:

$$M_1 g - T_1 = M_1 a$$

$$T_1 - T_2 - M_2 g \operatorname{sen}\varphi - \mu M_2 g \cos\varphi = M_2 a$$

$$T_2 - M_3 g = M_3 a$$

sumando queda:

$$M_1 g - M_2 g \operatorname{sen}\varphi + \mu M_2 g \cos\varphi - M_3 g = (M_1 + M_2 + M_3) a$$

$$\boxed{a = g\,\frac{M_1 - M_3 - M_2(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{M_1 + M_2 + M_3}}$$

En el caso en que se verifique la condición b) y el movimiento sea acelerado, entonces:

$$M_3 g - T_2 = M_3 a$$

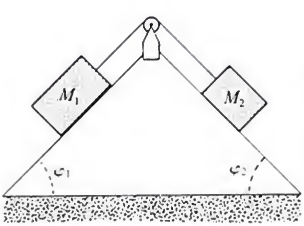
$$T_2 - T_1 + M_2 g \operatorname{sen}\varphi - \mu M_2 g \cos\varphi = M_2 a$$

$$T_1 - M_1 g = M_1 a$$

sumando, queda:

$$M_3 g + M_2 g \operatorname{sen}\varphi - \mu M_2 g \cos\varphi - M_1 g = (M_1 + M_2 + M_3) a$$

$$\boxed{a = g\,\frac{M_3 - M_1 + M_2(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{M_1 + M_2 + M_3}}$$



Problema VIII-53

Problema 53. Sobre un plano inclinado cuyo ángulo es 30° se tiene un peso de 500 g que está unido por una cuerda que pasa por una polea (sin inercia ni rozamientos) con otro cuerpo de 200 g en un plano de 60°. El coeficiente de rozamiento en ambos planos es de 0,2. Calcular:

1. Aceleración del conjunto.

2. Tensión de la cuerda.

3. Espacio recorrido por cada peso en 1 s y velocidad adquirida.

Solución

Condición para que exista movimiento hacia el lado del cuerpo de 0,5 kg (M_1):

$$M_1 g \operatorname{sen}\varphi_1 \geqslant \mu M_1 g \cos\varphi_1 + \mu M_2 g \cos\varphi_2 + M_2 g \operatorname{sen}\varphi_2$$

$$M_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25 \text{ kg}$$

$$\mu(M_1\cos\varphi_1 + M_2\cos\varphi_2) + M_2\operatorname{sen}\varphi_2 = 0{,}2\left(0{,}5\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}2 \times 0{,}5\right) + 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}28 \text{ kg}$$

El cuerpo no se mueve en el sentido indicado.
Condición para movimiento hacia el lado del cuerpo de 0,2 kg (M_2):

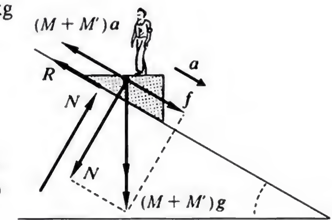
$$M_2 g \operatorname{sen}\varphi_2 \geqslant \mu M_2 g \cos\varphi_2 + \mu M_1 g \cos\varphi_1 + M_1 g \operatorname{sen}\varphi_1$$

$$M_2 \operatorname{sen}\varphi_2 = 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}17$$

$$\mu(M_2\cos\varphi_2 + M_1\cos\varphi_1) + M_1\operatorname{sen}\varphi_1 = 0{,}2\left(0{,}2 \times 0{,}5 + 0{,}5\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}36 \text{ kg}$$

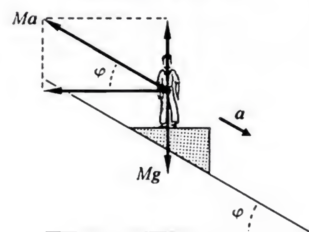
El cuerpo no se mueve, tampoco, en este sentido.

$$\boxed{\text{El sistema está en equilibrio.}}$$



Problema VIII-54-1.ª

Problema 54. Un hombre que pesa 70 kg se lanza encima de una báscula por un plano inclinado un ángulo de 60°. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre la báscula y el plano es 0,3, calcular:
1. La aceleración de bajada.
2. Lo que marca la báscula.



Problema VIII-54-2.ª

Solución

1) Aplicando el principio de D'Alambert y llamando M' a la masa de la báscula:

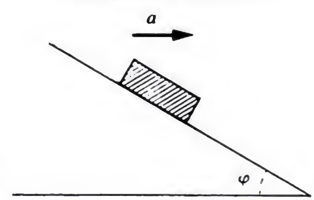
$$f - R - (M + M')a = 0$$

$$(M + M')g\operatorname{sen}\varphi - \mu(M + M')g\cos\varphi - (M + M')a = 0$$

$$\boxed{a = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) = 9{,}8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}3\,\frac{1}{2}\right) = 7 \text{ m/s}^2}$$

2) Considerando la fuerza de inercia sobre el hombre:

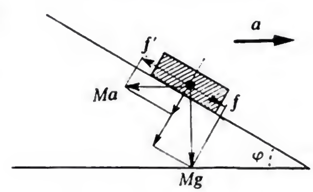
$$\boxed{P = Mg - Ma\operatorname{sen}\varphi = 70 - \frac{70}{9{,}8}\,7\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 27 \text{ kp}}$$



Problema VIII-55

Problema 55. Sobre un plano inclinado, que se mueve con una aceleración $a > 0$, como indica la figura, se encuentra un objeto prismático. Hallar:
1. A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no sube por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento.
2. A partir de qué valor del ángulo del plano el cuerpo no baja por la línea de máxima pendiente si no existe rozamiento.
3. Cómo se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento es μ.

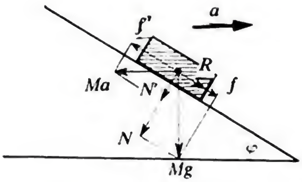
Solución



Problema VIII-55-1.ª

1)

$$f \geqslant f' \quad\Rightarrow\quad Mg\operatorname{sen}\varphi \geqslant Ma\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \boxed{\operatorname{tag}\varphi \geqslant \frac{a}{g}}$$



Problema VIII-55-2.ª

2)

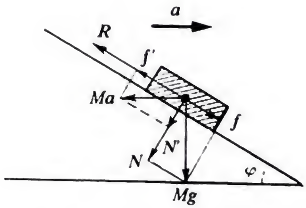
$$f \leq f' \quad \Rightarrow \quad Mg\,\text{sen}\varphi \leq Ma\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{tag}\varphi \leq \frac{a}{g}}$$

3) El cuerpo no sube nunca (Fig. 2.ª):

$$R + f \geq f' \quad \left| \begin{array}{l} R = \mu(Mg\cos\varphi + Ma\,\text{sen}\varphi) \\ f = Mg\,\text{sen}\varphi \\ f' = Ma\cos\varphi \end{array} \right.$$

$$\mu(Mg\cos\varphi + Ma\,\text{sen}\varphi) + Mg\,\text{sen}\varphi \geq Ma\cos\varphi$$

$$\mu g + \mu a\,\text{tag}\varphi + g\,\text{tag}\varphi \geq a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{tag}\varphi \geq \frac{a - \mu g}{g + \mu a}}$$

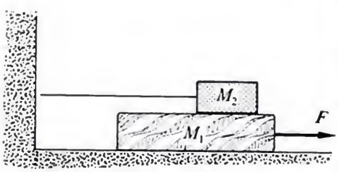


Problema VIII-55-3.ª

El cuerpo no baja nunca (Fig. 3.ª):

$$R + f' \geq f \quad \Rightarrow \left| \; \mu(Mg\cos\varphi + Ma\,\text{sen}\varphi) + Ma\cos\varphi \geq Mg\,\text{sen}\varphi \right.$$

$$\mu g + \mu a\,\text{tag}\varphi + a \geq g\,\text{tag}\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{tag}\varphi \leq \frac{\mu g + a}{g - \mu a}}$$



Problema VIII-56

Problema 56. En el sistema representado en la figura el cable C es de masa despreciable. El coeficiente de rozamiento entre M_1 y el plano es μ_1 y entre M_1 y M_2 es μ_2. (Considérense iguales los coeficientes estático y dinámico.)

1. Determinar la fuerza mínima que aplicada a M_1 lo saca del equilibrio.

2. Si con una fuerza dada F producimos a M_1 una aceleración a, calcular ésta.

3. Calcular la tensión de la cuerda.

Solución

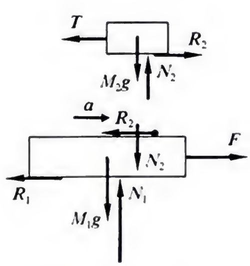
1) Damos a R_1 y R_2 sus valores máximos:

$$R_1 = \mu_1(M_1 + M_2)g$$

$$R_2 = \mu_2 M_2 g$$

luego, como mínimo, F tendrá que valer:

$$\boxed{F = R_1 + R_2 = [\mu_1(M_1 + M_2) + \mu_2 M_2]g}$$



Problema VIII-56-1.ª

2) En la figura indicamos todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos. El equilibrio en la dirección horizontal nos conduce a:

$$N_2 = M_2 g$$

$$N_1 = M_1 g + N_2 = (M_1 + M_2)g$$

aplicando la ecuación del movimiento al cuerpo M_1:

$$\left. \begin{array}{l} F - R_1 - R_2 = M_1 a \\ F - [\mu_1(M_1 + M_2) + \mu_2 M_2]g = M_1 a \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g\,\frac{F - [\mu_1(M_1 + M_2) + \mu_2 M_2]}{M_1}}$$

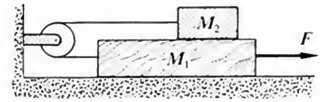
3) La tensión valdrá:

$$\boxed{T = R_2 = \mu_2 M_2 g}$$

Problema 57. En el sistema representado en la figura las masas del cable y de la polea son despreciables. Si el coeficiente de rozamiento entre el plano y el cuerpo M_1 es μ_1, y entre M_1 y M_2 es μ_2 (consideramos iguales el coeficiente estático y dinámico):

1. Determinar la F mínima aplicada a M_1 capaz de sacar al sistema del equilibrio.

2. Calcular la aceleración del sistema para una fuerza mayor que la mínima.



Problema VIII-57

Solución

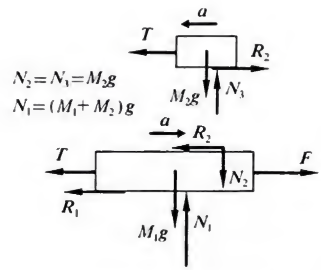
1)

$$F = R_1 + 2R_2 \quad \left| \begin{array}{l} R_1 = \mu_1(M_1 + M_2)g \\ R_2 = \mu_2 M_2 g \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{F = \mu_1(M_1 + M_2)g + 2\mu_2 M_2 g}$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} F - R_1 - R_2 - T = M_1 a \\ T - R_2 = M_2 a \end{array} \right| \Rightarrow F - R_1 - 2R_2 = (M_1 + M_2)a$$

$$\boxed{a = \frac{F - \mu_1(M_1 + M_2)g - 2\mu_2 M_2 g}{M_1 + M_2}}$$



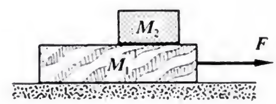
Problema VIII-57-1.ª

Problema 58. Sobre un cuerpo de masa M_1 se encuentra otro de masa M_2, como se indica en la figura, si sobre M_1 actuamos con una fuerza $\boldsymbol{F}$ y el coeficiente de rozamiento entre las superficies es μ. Calcular:

1. La condición que tiene que cumplir $\boldsymbol{F}$ para que no exista movimiento.

2. La condición para que el cuerpo de masa M_2 no deslice por el de masa M_1 y todo el sistema se mueva con movimiento uniformemente acelerado, calculando esta aceleración.

3. La condición para que el cuerpo de masa M_2 deslice sobre el de masa M_1, calculando las aceleraciones de ambos.



Problema VIII-58

Solución

1) No habrá movimiento para valores de F tales que:

$$\boxed{F < \mu(M_1 + M_2)g}$$

2) En este caso las dos fuerzas de rozamiento (entre M_2 y M_1 y entre M_1 y el suelo) verifican las ecuaciones:

$$R_2 < \mu M_2 g$$

$$R_1 = \mu(M_1 + M_2)g$$

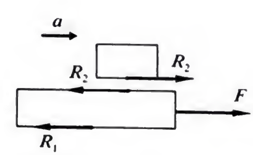
las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos y en la dirección del movimiento son las de la figura 1.ª La aplicación de la ecuación del movimiento a cada uno de los cuerpos nos da:

$$F - R_2 - R_1 = M_1 a$$

$$R_2 = M_2 a$$

ecuaciones, que, junto con las anteriores, se obtiene:

$$F - M_2 a - \mu(M_1 + M_2)g = M_1 a \quad \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{M_1 + M_2} - \mu g}$$



Problema VIII-58-1.ª

y como:

$$R_2 = M_2 a = \frac{M_2 F}{M_1 + M_2} - \mu M_2 g < \mu M_2 g$$

nos queda:

$$F < 2\mu(M_1 + M_2)\, g$$

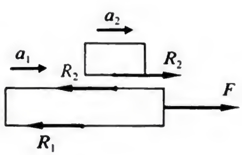
teniendo en cuenta el apartado 1), nos queda para la condición pedida:

$$\boxed{\mu(M_1 + M_2)g < F < 2\mu(M_1 + M_2)g}$$

3) La condición pedida será:

$$\boxed{F > 2\mu(M_1 + M_2)g}$$

En este caso las dos fuerzas de rozamiento toman los valores:



Problema VIII-58-2.ª

$$R_2 = \mu M_2 g$$

$$R_1 = \mu(M_1 + M_2)g$$

La aplicación de la ecuación del movimiento a cada uno de los cuerpos nos da:

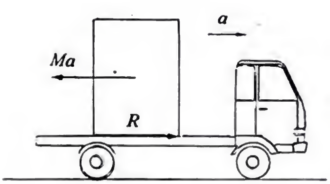
$$F - R_2 - R_1 = M_1 a_1$$

$$R_2 = M_2 a_2$$

de las que deducimos, teniendo en cuenta los valores de R_1 y R_2:

$$F - \mu M_2 g - \mu(M_1 + M_2)g = M_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = \frac{F}{M_1} - \mu \frac{2M_2 + M_1}{M_1} g}$$

$$\mu M_2 g = M_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_2 = \mu g}$$



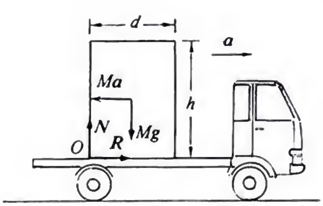
Problema VIII-59-1.ª

Problema 59. Un camión transporta un bloque rectangular de 2 m de altura y 1 m de anchura. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo de la caja del camión es 0,6. Calcular:
1. La máxima aceleración que puede darse al camión para que el bloque no deslice sobre la caja.
2. Supuesta la fuerza de rozamiento lo suficientemente grande para que el bloque no deslice. ¿Qué valor máximo puede tomar la aceleración del camión para que el bloque no vuelque?

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} R &= Ma \\ R &= \mu M g \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{a = \mu g = 6 \text{ m/s}^2}$$



Problema VIII-59-2.ª

2) Si está a punto de volcar, el punto de aplicación de la normal estará en O. Tomando momentos respecto de O e igualando a cero:

$$Ma\frac{h}{2} - Mg\frac{d}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{d}{h} g = 5 \text{ m/s}^2}$$

Problema 60. Sobre un cuerpo de masa M que se mueve en sentido vertical con velocidad v en el seno de un fluido viscoso, la fuerza de resistencia que se opone al movimiento viene dada por la expresión: $R = KMv$. Determinar la velocidad del cuerpo en función del tiempo y en función de la distancia h recorrida, suponiendo que el móvil parte del reposo.

Solución

$$Mg - R - Ma = 0 \;\Rightarrow\; Mg - KMv - M\frac{dv}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = g - Kv \;\Rightarrow\; \frac{dv}{g - Kv} = dt$$

Integrando, teniendo en cuenta que para $t = 0$, $v = 0$, obtenemos:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - Kv} = \int_0^t dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{K}\ln\frac{g}{g - Kv} = t$$

[1] $$e^{Kt} = \frac{g}{g - Kv} \;\Rightarrow\; \boxed{v = \frac{g}{K}[1 - e^{-Kt}]}$$ [2]

la expresión [1] podemos escribirla de la forma:

$$g - Kv = ge^{-Kt}$$

multiplicando por dt, nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} gdt - Kvdt = ge^{-Kt}dt \\ dh = vdt \end{array}\right| \Rightarrow\; gdt - Kdh = ge^{-Kt}dt$$

integrando, teniendo en cuenta que para $t = 0$, $h = 0$, nos quedará:

$$\int_0^t gdt - \int_0^h Kdh = \int_0^t ge^{-Kt}dt \;\Rightarrow\; gt - Kh = \frac{g}{K}[1 - e^{-Kt}] = v \;\Rightarrow\; t = \frac{v + Kh}{g}$$

expresión que, sustituida en [2], nos queda:

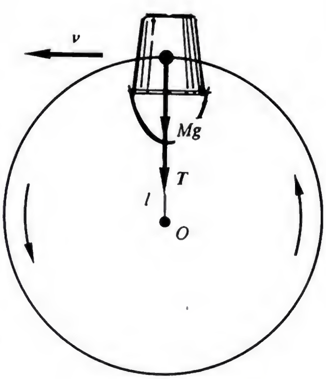
$$\boxed{v = \frac{g}{K}\left[1 - e^{-\frac{K}{g}(v+Kh)}\right]}$$

C) FUERZA CENTRIPETA Y CENTRIFUGA

FORMULARIO

$$F_e = Ma_n = M\frac{v^2}{r} = M\omega^2 r = M\frac{4\pi^2}{T^2}r = M4\pi^2\nu^2 r$$

Problema 61. En un plano vertical damos vueltas a una cuerda de 1 m de longitud en cuyo extremo tenemos atado un cubo con agua. ¿Qué mínima velocidad tiene que tener el cubo para que el agua no se vierta cuando está el cubo con la boca hacia el suelo?



Problema VIII-61-1.

Solución

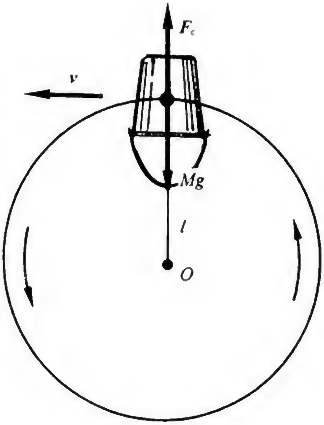
1.^{er} MÉTODO:

Aplicando el segundo principio de Newton y tomando como sistema inercial al observador que da vueltas al cubo, obtendremos:

$$\Sigma F_i = Ma \;\Rightarrow\; Mg + T = Ma$$

para el caso extremo (mínimo) $T = 0$ y, además, la única aceleración existente es la normal que tiene la dirección de las fuerzas y el mismo sentido que ellas; por tanto:

$$Mg = Ma_n \;\Leftrightarrow\; Mg = M\frac{v^2}{l} \;\Rightarrow\; \boxed{v = \sqrt{lg} = 3{,}1 \text{ m/s}}$$



Problema VIII-61-2.ª

2.º MÉTODO:

Desde el sistema no inercial (cubo) podemos describir la fuerza centrífuga $\boldsymbol{F}_c$ y diremos: Para que el agua no caiga debe verificarse que la $\boldsymbol{F}_c$ originada en la rotación sea, como mínimo, igual al peso del agua:

$$Mg = F_c \quad \Leftrightarrow \quad Mg = M\frac{v^2}{l} \quad \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{lg} = 3{,}1 \text{ m/s}}$$

Problema 62. Supuesta la Tierra esférica y sin ningún relieve, calcular la velocidad de un proyectil disparado horizontalmente en las proximidades de la superficie terrestre, para que se «coloque en órbita», es decir, dé vueltas en torno a la Tierra. (Se supone nula resistencia del aire y $R_0 = 6\,370$ km.)

Solución

Desde el sistema proyectil (no inercial), habrán de igualarse el peso del cuerpo y la fuerza centrífuga:

$$Mg = M\frac{v^2}{R_0} \quad \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{R_0 g} = \sqrt{6\,370 \times 10^3 \times 9{,}8} = 7\,900 \text{ m/s}}$$

Problema 63. De un hilo de longitud 50 cm vamos suspendiendo pesos cada vez mayores, observando que el hilo se rompe al colgar un peso de 1 kp. Atamos al extremo del hilo un peso de 50 g, sujetando por el otro extremo, hacemos girar al sistema en un plano vertical. Calcular el mínimo número de vueltas por segundo necesarias para que se rompa el hilo y determinar en la posición en que se romperá.

Solución

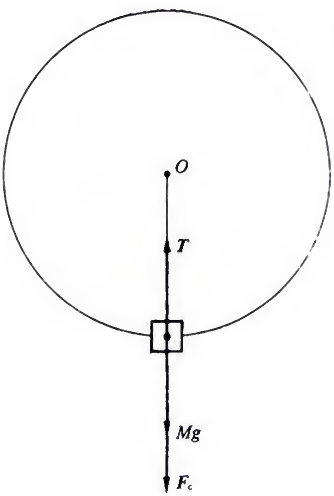
El hilo tendrá que romperse cuando el cuerpo esté en su posición más baja, pues en ese momento a la fuerza centrífuga se suma el peso del cuerpo. Por lo tanto, la ecuación que resuelve el problema es:

$$\left.\begin{aligned} T &= F_c + Mg \\ F_c &= M4\pi^2\nu^2 r \end{aligned}\right| \quad T = M4\pi^2\nu^2 r + Mg$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{T - Mg}{Mr}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8 - 0{,}05 \times 9{,}8}{0{,}05 \times 0{,}5}} \simeq 3 \text{ Hz}}$$

Desde un punto de vista inercial la ecuación es la misma:

$$T - Mg = Ma_n$$



Problema VIII-63

Problema 64. El piloto de un avión se lanza en picado a la velocidad de 400 km/h y termina su descenso describiendo, a aquella velocidad, un arco de circunferencia situado en el plano vertical. ¿Cuál será el mínimo radio de esa circunferencia para que la aceleración en el punto más bajo no exceda de 7 g? ¿Cuál será entonces el peso aparente del aviador en el punto más bajo de la trayectoria?

Solución

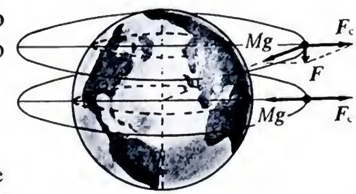
La única aceleración existente es la aceleración normal, luego:

$$a_0 = 7g = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{v^2}{7g} = \frac{400\,000^2}{3\,600^2 \times 7 \times 9{,}8} \simeq 180 \text{ m}}$$

El peso del aviador en el punto más bajo de su trayectoria será ocho veces mayor, ya que a Mg hay que añadir la fuerza centrífuga; luego:

$$\boxed{P = Mg + Ma_n = Mg + 7Mg = 8Mg}$$

Problema 65. «Se dice que una órbita de un satélite artificial es estable cuando ésta corta a la esfera terrestre en un círculo máximo.» ¿Por qué no lo es en caso contrario?



Problema VIII-65

Solución

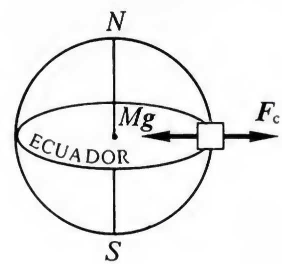
Cuando el satélite se encuentra en órbita estable la fuerza centrífuga (considerando fuerzas de inercia) y el peso están compensados, razón por la que en el interior de los satélites existe «ingravidez», es decir:

$$F_c = Mg$$

El peso Mg del satélite va dirigido hacia el centro de la Tierra, y la fuerza centrífuga tiene la dirección del radio de la órbita; luego si la órbita no contiene al centro de la Tierra las dos fuerzas no estarán compensadas, y sobre el satélite actuará una fuerza F (ver figura) que hace que no se encuentre en órbita estable.

Problema 66. Conocida la masa de la Tierra y el radio ecuatorial, la fórmula GM_0/R_0^2 nos daría para valor de la intensidad de la gravedad el valor de 981,4 dyn/g. Realizada la medida por procedimientos experimentales (péndulo), se obtiene un valor de 978,049 dyn/g. ¿Por qué?

Solución



Problema VIII-66

En la primera medida se considera la Tierra como un sistema inercial. Las medidas realizadas en el ecuador por procedimientos experimentales están hechas en un sistema no inercial, puesto que la Tierra, al girar alrededor de su eje, hace que en dicho lugar exista aceleración normal. Razonando desde el punto de vista de D'Alambert (empleando fuerzas de inercia), diremos: a la fuerza con que la Tierra atrae a 1 g masa se opone la fuerza centrífuga debida a la rotación terrestre:

$$F_c = M\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,R_0$$

Donde $M = 1$ g; $T = 1$ día $= 86\,400$ s, y R_0 = radio ecuatorial; luego calcularíamos para valor de la fuerza centrífuga sobre 1 g de masa:

$$F_c = 981{,}4 - 978{,}049 = 3{,}351 \text{ dyn}$$

Problema 67. El globo terráqueo, cansado de tanta experiencia atómica que le agujerea las entrañas, gira cada vez más deprisa para desembarazarse de sus molestos perforadores... Al fin, los hombres, mujeres, perros, gatos... que habitan en el ecuador son lanzados por la tangente a tal paralelo. ¿Cuántas vueltas en

24 h da la inquieta Tierra? Emplear como únicos datos del problema los valores de 981,4 dyn/g para la intensidad de la gravedad en el ecuador si no existiese la fuerza centrífuga y 978,049 dyn/g valor real del peso de 1 g en tal lugar.

Solución

La fuerza centrífuga sobre 1 g de masa en el ecuador terrestre es:

$$F = 981{,}4 - 978{,}049 = 3{,}351 \text{ dyn}$$

En el caso de anular la atracción terrestre, la fuerza centrífuga sería:

$$F' = 981{,}4 \text{ dyn}$$

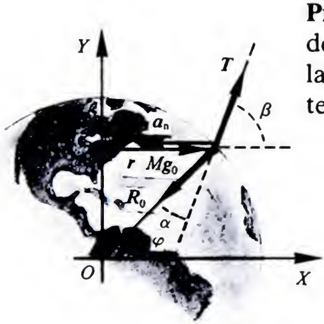
El valor de la fuerza centrífuga en uno y en otro caso es:

$$\left.\begin{array}{l} F = M4\pi^2\nu^2R_0 \\ F' = M4\pi^2\nu'^2R_0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{F}{F'} = \frac{\nu^2}{\nu'^2}$$

«A igualdad de masa y radio en un movimiento circular, la fuerza centrífuga es proporcional al cuadrado de la frecuencia.»

$$\frac{3{,}351}{981{,}4} = \frac{1^2}{\nu'^2} \Rightarrow \boxed{\nu' = \sqrt{\frac{981{,}4}{3{,}351}} = 17{,}1 \text{ vueltas cada } 24^{\text{h}}}$$

Problema 68. Calcular el ángulo que se desvía la plomada respecto de la dirección del radio terrestre del lugar, debido a la rotación de la Tierra, en un punto en que la latitud es φ. DATOS: G: constante de gravitación. M_0: masa de la Tierra. R_0: radio terrestre del lugar. ν: frecuencia angular de la Tierra (una vuelta por día).



Problema VIII-68-1.ª

Solución

Vamos a resolver el problema de dos formas: por el segundo principio de Newton y considerando la fuerza centrífuga.

1.^{er} MÉTODO:

$$\boldsymbol{R}_0 = R_0\cos\varphi\boldsymbol{i} + R_0\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{g}_0 = -G\frac{M_0}{R_0^3}\boldsymbol{R}_0 = -G\frac{M_0}{R_0^2}(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j})$$

$$\boldsymbol{r} = R_0\cos\varphi\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{a}_n = -4\pi^2\nu^2\boldsymbol{r} = -4\pi^2\nu^2R_0\cos\varphi\boldsymbol{i}$$

$$\Sigma\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} \Rightarrow M\boldsymbol{g}_0 + \boldsymbol{T} = M\boldsymbol{a}_n \Rightarrow \boldsymbol{T} = M\boldsymbol{a}_n - M\boldsymbol{g}_0 \Rightarrow \boldsymbol{T} = M\cos\varphi\left(G\frac{M_0}{R_0^2} - 4\pi^2\nu^2R_0\right)\boldsymbol{i} + G\frac{MM_0}{R_0^2}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{tag}\beta = \frac{T_y}{T_x} = \frac{G\dfrac{MM_0}{R_0^2}\operatorname{sen}\varphi}{M\cos\varphi\left(G\dfrac{M_0}{R_0^2} - 4\pi^2\nu^2R_0\right)} \Rightarrow \beta = \operatorname{artag}\frac{GM_0\operatorname{tag}\varphi}{GM_0 - 4\pi^2\nu^2R_0^3} = \varphi + \alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha = -\varphi + \operatorname{artag}\frac{GM_0\operatorname{tag}\varphi}{GM_0 - 4\pi^2\nu^2R_0^3}}$$

2.º MÉTODO:

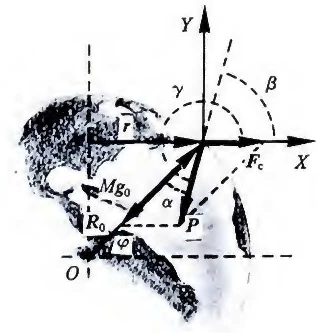
$$F_c = M4\pi^2\nu^2 \boldsymbol{r} = M4\pi^2\nu^2 R_0 \cos\varphi \boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}_c + M\boldsymbol{g}_0$$

$$\boldsymbol{P} = M\cos\varphi \left(4\pi^2\nu^2 R_0 - G\,\frac{M_0}{R_0^2}\right)\boldsymbol{i} - G\,\frac{MM_0}{R_0^2}\,\mathrm{sen}\varphi \boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{tag}\gamma = \frac{P_y}{P_x} = -\frac{G\,\dfrac{MM_0}{R_0^2}\,\mathrm{sen}\varphi}{M\cos\varphi\left(4\pi^2\nu^2 R_0 - G\,\dfrac{M_0}{R_0^2}\right)} = \mathrm{tag}\beta \Rightarrow$$

$$\beta = \varphi + \alpha = \mathrm{artag}\,\frac{GM_0 \mathrm{tag}\varphi}{GM_0 - 4\pi^2\nu^2 R_0^3} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\varphi + \mathrm{artag}\,\frac{GM_0 \mathrm{tag}\varphi}{GM_0 - 4\pi^2\nu^2 R_0^3}}$$



Problema VIII-68-2.ª

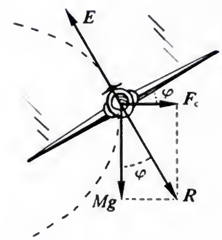
Problema 69. Calcúlese el ángulo de inclinación con la horizontal que tiene que darle el piloto de un avión para virar horizontalmente con un radio de 1 km a una velocidad de 360 km/h.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

Al sumar la fuerza centrífuga ($\boldsymbol{F}_c$) y el peso ($M\boldsymbol{g}$) se obtiene como resultante ($\boldsymbol{R}$) que tendrá que anular al empuje ($\boldsymbol{E}$) y, por tanto, tendrá que ir en la misma dirección, pero en sentido contrario; de la VIII-69-1.ª se obtiene:

$$\mathrm{tag}\varphi = \frac{F_c}{Mg} = \frac{Mv^2}{rMg} = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \mathrm{tag}\varphi = \frac{10^4}{10^3 \times 9{,}8} \simeq 1 \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$$



Problema VIII-69-1.ª

El sistema referencial que hemos tomado en este método no es inercial, puesto que hemos resuelto el problema desde el punto de vista del piloto del avión; pese a esto, es correcta la solución, como ya hemos indicado en la nota del formulario, al principio de este tema.

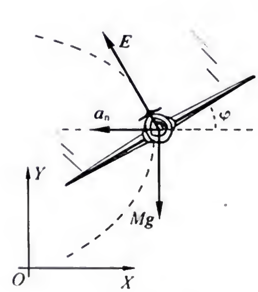
2.º MÉTODO:

Si como sistema de referencia tomamos un punto de la superficie terrestre (consideraremos a este sistema como inercial), en el que se encuentra un observador, razonará de la siguiente manera (ver fig. VIII-69-2.ª):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_n &= -\frac{Mv^2}{r}\boldsymbol{i} \\ M\boldsymbol{g} &= -Mg\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{E} &= -E\mathrm{sen}\varphi\boldsymbol{i} + E\cos\varphi\boldsymbol{j} \\ \Sigma\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} &\Rightarrow \boldsymbol{E} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a}_n \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

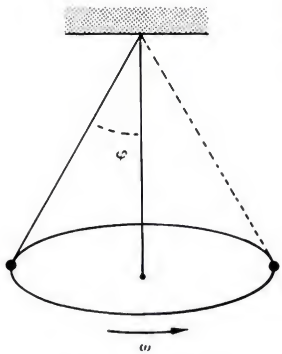
$$-E\mathrm{sen}\varphi\boldsymbol{i} + (E\cos\varphi - Mg)\boldsymbol{j} = -\frac{Mv^2}{r}\boldsymbol{i} \Rightarrow \left|\begin{aligned} E\mathrm{sen}\varphi &= \frac{Mv^2}{r} \\ E\cos\varphi - Mg &= 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\mathrm{tag}\varphi = \frac{Mv^2}{rMg} \Rightarrow \boxed{\varphi = 45^\circ}$$



Problema VIII-69-2.ª

Problema 70. Una partícula atada a una cuerda de 50 cm de longitud gira como un «péndulo cónico» como muestra la figura. Calcular el número de vueltas por segundo que tiene que dar para que $\varphi = 60°$.



Problema VIII-70

Solución

1.^{er} MÉTODO:

La aplicación de la segunda ley de Newton nos conduce a:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a}_n$$

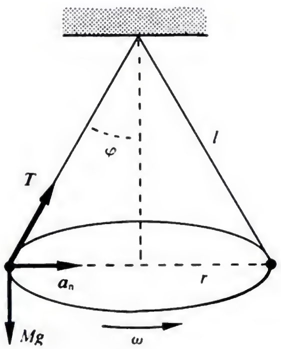
y como:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{T} = T\text{sen}\varphi \boldsymbol{i} + T\cos\varphi \boldsymbol{j} \\ M\boldsymbol{g} = -Mg\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a}_n = 4\pi^2\nu^2 r\boldsymbol{i} \\ r = l\,\text{sen}\varphi \end{array}\right| \Rightarrow T\text{sen}\varphi\boldsymbol{i} + (T\cos\varphi - Mg)\boldsymbol{j} = M4\pi^2\nu^2 l\,\text{sen}\varphi\boldsymbol{i}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} T = M4\pi^2\nu^2 l \\ T\cos\varphi - Mg = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{4\pi^2\nu^2 l}{g} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}5 \times 0{,}5}} = 1 \text{ Hz}}$$

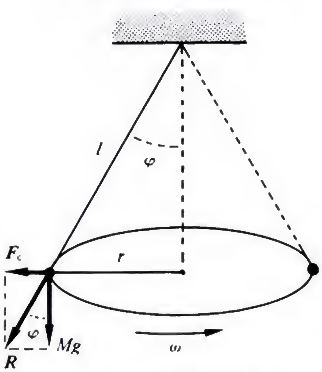


Problema VIII-70-1.ª

2.° MÉTODO:

Considerando la fuerza centrífuga $\boldsymbol{F}_c$, la suma de ella y el peso $M\boldsymbol{g}$ será $\boldsymbol{R}$, que tendrá que ir en la dirección de la cuerda para que φ tome un valor constante (en nuestro caso, 60°); con lo que de la figura se deduce:

$$\text{tag}\varphi = \frac{F_c}{Mg} = \frac{M4\pi^2\nu^2 r}{Mg} = \frac{4\pi^2\nu^2 l\,\text{sen}\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi}} = 1 \text{ Hz}}$$



Problema VIII-70-2.ª

Problema 71. Enganchamos una partícula de 1 kg a un resorte espiral de masa despreciable, cuya longitud natural es de 48 cm y de constante recuperadora 1 kp/cm. Lo hacemos girar como un péndulo cónico con una velocidad angular constante de 60 rpm. Calcular:

1. El alargamiento del resorte.

2. El ángulo que forma la altura del cono con su generatriz.

Solución

Los datos en el SI son:

$$K = 0{,}1 \text{ kp/cm} = 980 \text{ N/m}$$

$$\nu = 1 \text{ Hz}$$

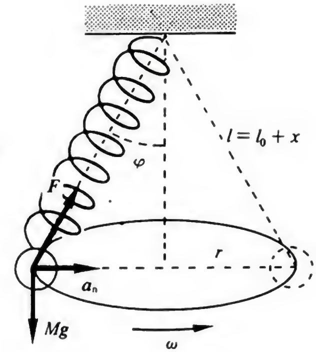
$$l_0 = 0{,}48 \text{ m}$$

1.^{er} MÉTODO:

$$\Sigma \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a}_n$$

y como:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= F\text{sen}\varphi \boldsymbol{i} + F\cos\varphi \boldsymbol{j} \\ F &= Kx \\ M\boldsymbol{g} &= -Mg\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{a}_n &= 4\pi^2\nu^2 r\boldsymbol{i} \\ r &= l\,\text{sen}\varphi \\ l &= l_0 + x \end{aligned}\right| \Rightarrow Kx\,\text{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + (Kx\cos\varphi - Mg)\boldsymbol{j} = M4\pi^2\nu^2(l_0 + x)\,\text{sen}\varphi\,\boldsymbol{i}$$



Problema VIII-71-1.ª

de esta ecuación se deduce:

1)

$$Kx\,\text{sen}\varphi = M4\pi^2\nu^2(l_0 + x)\,\text{sen}\varphi \Rightarrow Kx = (l_0 + x)M4\pi^2\nu^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{x = l_0 \frac{M4\pi^2\nu^2}{K - M4\pi^2\nu^2} = 0{,}48\,\frac{4\pi^2}{980 - 4\pi^2} = 0{,}02 \text{ m} = 2 \text{ cm}}$$

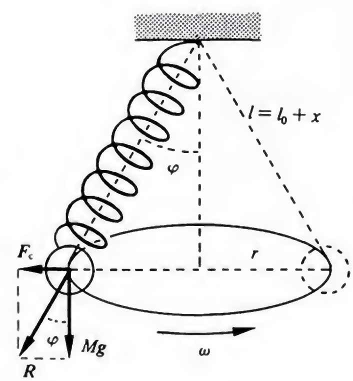
2)

$$Kx\cos\varphi - Mg = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{Mg}{Kx} = \frac{9{,}8}{980 \times 0{,}02} = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\varphi = 60°}$$

2.º MÉTODO:

1)

$$\left.\begin{aligned} \text{sen}\varphi &= \frac{r}{l} = \frac{F_c}{R} \\ F_c &= M4\pi^2\nu^2 r \\ l &= l_0 + x \\ R &= Kx \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{r}{l_0 + x} = \frac{M4\pi^2\nu^2 r}{Kx} \Rightarrow 4\pi^2\nu^2(l_0 + x) = \frac{Kx}{M} \Rightarrow$$



Problema VIII-71-2.ª

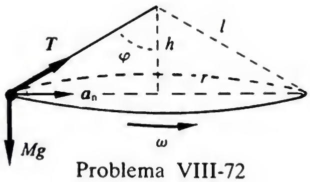
$$\boxed{x = l_0 \frac{M4\pi^2\nu^2}{K - M4\pi^2\nu^2} = 0{,}02 \text{ m} = 2 \text{ cm}}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} \text{tag}\varphi &= \frac{F_c}{Mg} \\ r &= (l_0 + x)\,\text{sen}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \text{tag}\varphi = \frac{M4\pi^2\nu^2(l_0 + x)\,\text{sen}\varphi}{Mg} \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{g}{4\pi^2\nu^2(l_0 + x)} = \frac{Mg}{Kx} = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\varphi = 60°}$$

Problema 72. Hacemos girar a un cuerpo de 5 kg de masa atado a una cuerda de 1 m de longitud con una velocidad angular de 1 Hz. Calcular la distancia desde el punto fijo al plano horizontal en el que se mueve el cuerpo con movimiento circular y la tensión T de la cuerda.



Problema VIII-72

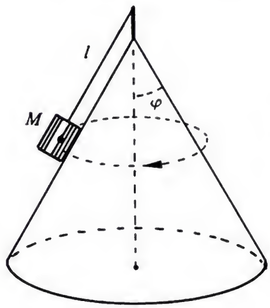
Solución

$$T + Mg = Ma_n \;\Rightarrow\; T\operatorname{sen}\varphi\, i + (T\cos\varphi - Mg)j = M4\pi^2\nu^2 l\operatorname{sen}\varphi\, i \;\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} T &= M4\pi^2\nu^2 l \\ T\cos\varphi - Mg &= 0 \end{aligned}\right| \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \frac{g}{4\pi^2\nu^2 l} = \frac{h}{l} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{gl}{4\pi^2\nu^2} = \frac{9{,}8}{4\pi^2} \simeq \frac{1}{4}\ \text{m} = 25\ \text{cm}}$$

$$\boxed{T = M4\pi^2\nu^2 l = 5 \times 4\pi^2\ \text{N} \simeq 20\ \text{kp}}$$



Problema VIII-73

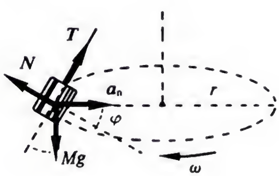
Problema 73. Un cuerpo de 116 g de masa gira alrededor del eje de un cono de ángulo $\varphi = 30°$, con una velocidad angular de 6 rpm, como se indica en la figura, en la que $l = 1$ m. Si no existe rozamiento, calcular:

1. Tensión de la cuerda.
2. La velocidad angular necesaria para que la reacción del plano sea nula.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

Tomando un sistema de referencia inercial en el que el eje OX tenga la dirección y sentido contrario de N y el eje OY en la dirección y sentido de $\boldsymbol{T}$, obtendremos:



Problema VIII-73-1.ª

$$\boldsymbol{T} = Tj$$

$$\boldsymbol{N} = -Ni$$

$$M\boldsymbol{g} = Mg\operatorname{sen}\varphi\, i - Mg\cos\varphi\, j$$

$$M\boldsymbol{a}_n = M4\pi^2\nu^2 r(\cos\varphi\, i + \operatorname{sen}\varphi\, j)$$

$$\boldsymbol{r} = l\operatorname{sen}\varphi$$

aplicando el segundo principio de Newton nos queda:

$$\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N} + M\boldsymbol{g} = M\boldsymbol{a}_n \;\Rightarrow\; \left|\begin{aligned} -N + Mg\operatorname{sen}\varphi &= M4\pi^2\nu^2 l\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \\ T - Mg\cos\varphi &= M4\pi^2\nu^2 l\operatorname{sen}^2\varphi \end{aligned}\right.$$

de las que se obtiene:

1)

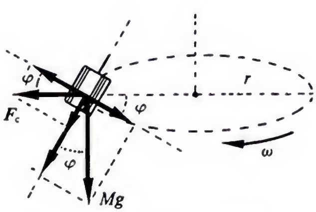
$$\boxed{T = M(4\pi^2\nu^2 l\operatorname{sen}^2\varphi + g\cos\varphi) = 0{,}116\left(\frac{4\pi^2}{100 \times 4} + 9{,}8\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1\ \text{N}}$$

2) Si $N = 0$, entonces:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi = M4\pi^2\nu'^2 l\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \;\Rightarrow\; \boxed{\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi}} \simeq 32\ \text{rpm}}$$

2.º MÉTODO:

Razonando, utilizando la fuerza centrífuga, se tendrá:



Problema VIII-73-2.ª

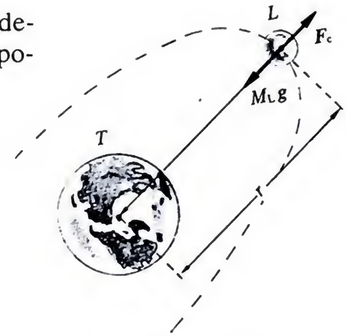
1)

$$\left.\begin{aligned} T &= F_c\operatorname{sen}\varphi + Mg\cos\varphi = M4\pi^2\nu^2 r\operatorname{sen}\varphi + Mg\cos\varphi \\ r &= l\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right| \;\Rightarrow\; \boxed{T = M(4\pi^2\nu^2 l\operatorname{sen}^2\varphi + g\cos\varphi) = 1\ \text{N}}$$

2) Para que la reacción normal del plano sea nula se tendrá que verificar:

$$F_c\cos\varphi = Mg\,\text{sen}\,\varphi \quad\Rightarrow\quad M4\pi^2\nu'^2 l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi = Mg\,\text{sen}\,\varphi \quad\Rightarrow\quad \boxed{\nu' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi}} = 32 \text{ rpm}}$$

Problema 74. Sabiendo que en un año la Luna recorre 18 veces su órbita alrededor de la Tierra, determinar la distancia entre la Tierra y nuestro satélite, suponiendo la órbita circular. Radio de la Tierra: 6 370 km, $g_0 = 9{,}8$ m/s^2.



Problema VIII-74

Solución

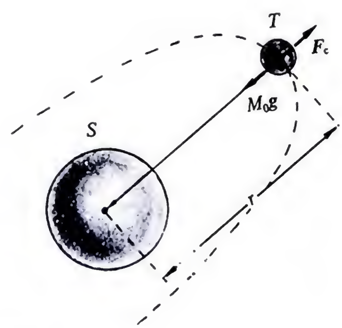
$$\left.\begin{array}{l} M_L g = M_L \dfrac{4\pi^2}{T^2}\, r \\ g = G\dfrac{M_0}{r^2} \end{array}\right| \quad \frac{GM_0}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad\Rightarrow\quad r = \sqrt[3]{\frac{GM_0T^2}{4\pi^2}}\,.$$

$$g_0 = G\frac{M_0}{R_0^2} \quad\Rightarrow\quad GM_0 = g_0R_0^2$$

luego:

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{g_0R_0^2T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9{,}8\times 6\,370^2\times 10^6}{4\pi^2}\left[\frac{365{,}25\times 86\,400}{18}\right]^2} \simeq 314\times 10^6 \text{ m} = 314\,000 \text{ km}}$$

Problema 75. Calcular la masa del Sol, suponiendo que la Tierra describe una órbita circular alrededor de él, siendo la distancia entre el Sol y la Tierra $1\,495\times 10^5$ km; $G = 6{,}67\times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2.



Problema VIII-75

Solución

$$\left.\begin{array}{l} M_0 g = F_c \quad\Rightarrow\quad M_0 g = M_0\dfrac{4\pi^2}{T^2}\, r \\ g = G\dfrac{M_S}{r^2} \end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad G\frac{M_S}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}\, r\,.$$

$$\boxed{M_S = \frac{4\pi^2r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(1\,495\times 10^8)^3}{6{,}67\times 10^{-11}\,(365{,}25\times 86\,400)^2} = 1{,}98\times 10^{30} \text{ kg}}$$

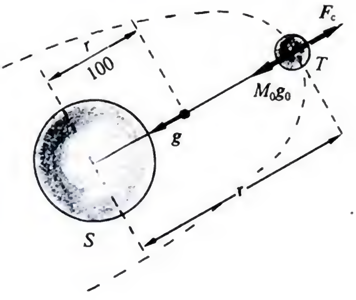
Problema 76. Suponiendo que la órbita terrestre es circular de $1{,}495\times 10^8$ km de radio y que la Tierra invierte 365,25 días en su revolución completa, determinar la intensidad del campo gravitatorio solar en un punto que diste del centro del Sol la centésima parte de nuestro planeta.

Solución

g_0 = intensidad del campo gravitatorio solar en el centro de la Tierra. r = distancia entre los centros de masa del Sol y la Tierra.

El valor de g a una distancia $R = r/100$ será:

$$g = G\frac{M_S}{R^2} = 10^4\,\frac{GM_S}{r^2}$$



Problema VIII-76

pero:

$$g_0 = \frac{GM_S}{r^2}$$

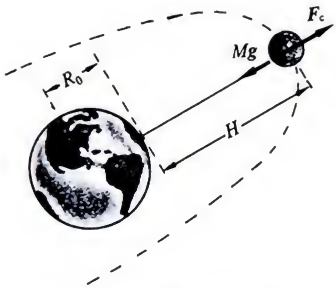
y como la fuerza de atracción solar sobre la unidad de masa en la tierra ha de ser igual a la fuerza centrífuga que actúa sobre ella, tendremos:

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

luego:

$$\boxed{g = 10^4 g_0 = 10^4\,\frac{4\pi^2 r}{T^2} = 10^4\,\frac{4\pi^2 1{,}495 \times 10^{11}}{365{,}25^2 \times 86\,400^2} = 59{,}26 \text{ m/s}^2}$$

Problema 77. Calcular a qué velocidad hay que colocar en su órbita estable a un satélite artificial a una altura de 30 000 m sobre la superficie terrestre ($R_0 = 6\,370$ km).



Problema VIII-77

Solución

$$F_C = Mg \;\Rightarrow\; M\,\frac{v^2}{R_0 + H} = Mg \;\Rightarrow\; v = \sqrt{g(R_0 + H)}$$

$$\left.\begin{array}{l} g = G\,\dfrac{M_0}{(R_0 + H)^2} \\[2ex] g_0 = G\,\dfrac{M_0}{R^2} \end{array}\right| \;\Rightarrow\; g = \frac{g_0 R_0^2}{(R_0 + H)^2}$$

$$\boxed{v = R_0 \sqrt{\frac{g_0}{R_0 + H}} = 6\,370 \times 10^3 \sqrt{\frac{9{,}8}{6\,400 \times 10^3}} = 7\,882{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 78. Calcular el período de un satélite artificial que está girando a 10^4 km de altura ($R_0 = 6\,370$ km, $g_0 = 9{,}8$ m/s^2).

Solución

$$Mg = F_c \;\Rightarrow\; MG_0\,\frac{M_0}{(R_0 + h)^2} = M\,\frac{4\pi^2}{T^2}(R_0 + h)$$

y como:

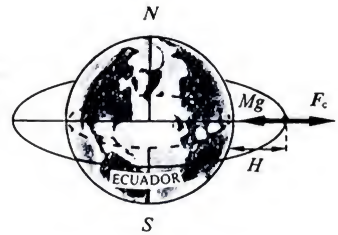
$$g_0 = G\,\frac{M_0}{R_0^2} \;\Rightarrow\; GM_0 = g_0 R_0^2$$

luego:

$$\frac{g_0 R_0^2}{(R_0 + h)^2} = \frac{4\pi^2}{T^2}(R_0 + h) \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi(R_0 + h)}{R_0}\sqrt{\frac{R_0 + h}{g_0}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi 16{,}37 \times 10^6}{6{,}37 \times 10^6}\sqrt{\frac{16{,}37 \times 10^6}{9{,}8}} = 20\,869 \text{ s} = 5^{\text{h}}\,48^{\text{min}}}$$

Problema 79. Queremos colocar un satélite artificial en órbita alrededor de la Tierra, de tal forma que éste se encuentre siempre en la vertical del lugar (cenit). ¿En qué lugares puede hacerse? ¿A qué altura sobre la Tierra hay que ponerlo en órbita? (Radio de la Tierra: 6 370 km.)



Problema VIII-79

Solución

Para que un satélite artificial se encuentre constantemente en el cenit de un lugar tiene que girar con la misma velocidad angular que la Tierra, en módulo, dirección y sentido, con lo que es evidente que el lugar $\boxed{\text{tiene que estar sobre el ecuador terrestre}}$. Tendremos:

$$F_c = Mg \quad \Rightarrow \quad M \frac{v^2}{R_0 + H} = Mg \quad \Rightarrow \quad v^2 = g(R_0 + H)$$

$$\left.\begin{array}{l} g = G \dfrac{M_0}{(R_0 + H)^2} \\[2ex] g_0 = G \dfrac{M_0}{R_0^2} \end{array}\right| \quad g = \frac{g_0 R_0^2}{(R_0 + H)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = \omega(R_0 + H) \\[2ex] \omega = \dfrac{2\pi}{T} \end{array}\right| \quad v = \frac{2\pi}{T}(R_0 + H)$$

siendo $T = 1$ día; sustituyendo, obtenemos:

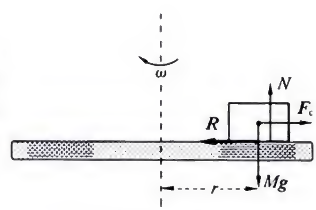
$$\frac{4\pi^2}{T^2}(R_0 + H)^2 = \frac{g_0 R_0^2}{(R_0 + H)^2}(R + H) \quad \Rightarrow \quad (R_0 + H)^3 = \frac{g_0 R_0^2 T^2}{4\pi^2}$$

luego:

$$H = \sqrt[3]{\frac{g_0 R_0^2 T^2}{4\pi^2}} - R_0$$

$$\boxed{H = \sqrt[3]{\frac{9{,}8 \times 6\,370^2 \times 10^6 \times 86\,400^2}{4\pi^2}} - 6\,370 \times 10^3 = 35{,}8 \times 10^6 \text{ m}}$$

Problema 80. Una plataforma gira alrededor de un eje a razón de una vuelta por segundo. Colocamos sobre ella un objeto prismático, siendo el coeficiente estático de rozamiento entre la plataforma y el cuerpo 0,8. Calcular la distancia máxima al eje de giro, para la cual el cuerpo gira con la plataforma y no es lanzado al exterior.

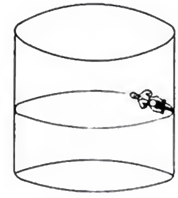


Problema VIII-80

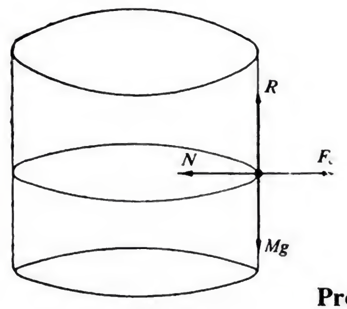
Solución

$$\left.\begin{array}{l} F_c = R \\[2ex] R = \mu Mg \end{array}\right| \quad M 4\pi^2 \nu^2 r = \mu Mg \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\mu g}{4\pi^2 \nu^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{0{,}8 \times 9{,}8}{4\pi^2} = 0{,}2 \text{ m}}$$

Problema 81. Calcular la velocidad mínima que tiene que tener el motorista que trabaja en el «tubo de la muerte» (aparato de atracción de feria que representamos en la figura) para que no se caiga. Diámetro del tubo: 10 m. Coeficiente estático de rozamiento entre las ruedas de la motocicleta y la pared: 0,5.



Problema VIII-81



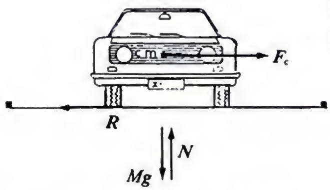
Problema VIII-81-1.ª

Solución

$$\left.\begin{array}{l} Mg = R \\ N = F_c \end{array}\right| \Rightarrow R = \mu N = \mu M \frac{v^2}{r}$$

$$Mg = \mu M \frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{rg}{\mu}} = 10 \text{ m/s}}$$

Problema 82. ¿Cuál es la velocidad a que puede ir un automóvil por una curva sin peralte, de radio $R = 40$ m, sin derrapar, suponiendo que el coeficiente de rozamiento entre las ruedas y el suelo vale $\mu = 0{,}5$? Suponiendo que μ fuera suficientemente grande para que el coche no derrapara, ¿cuál sería la velocidad máxima que podría alcanzar en la curva sin volcar, siendo la altura del centro de gravedad sobre el suelo $h = 75$ cm y la distancia entre las ruedas $d = 1{,}5$ m?

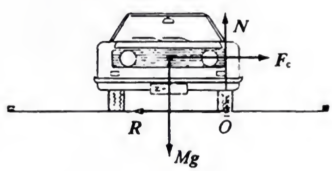


Problema VIII-82-1.ª

Solución

1)

$$F_c = R \Rightarrow M\frac{v^2}{R} = \mu Mg \Rightarrow v = \sqrt{\mu g R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{0{,}5 \times 9{,}8 \times 40} = 14 \text{ m/s}}$$



Problema VIII-82-2.ª

2) El par formado por la F_c y la de $R < \mu N$ (no derrapa) tiene que ser igual y de sentido contrario al par formado por el peso Mg y la fuerza normal N, que en el caso extremo está aplicada en la rueda derecha. (No existe componente normal en la rueda izquierda, ya que aunque no vuelca, está a punto de hacerlo.) O lo que es lo mismo, tomando momentos de las fuerzas que actúan sobre el coche con respecto al punto de contacto de la rueda derecha con el suelo, se ha de verificar:

$$Mg\frac{d}{2} - \frac{Mv^2}{R}h = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{Rgd}{2h}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{40 \times 9{,}8 \times 1{,}5}{2 \times 0{,}75}} \simeq 20 \text{ m/s}}$$

Problema 83. **1.** Deducir la ecuación que nos dé el valor mínimo del radio que puede tener una curva de la carretera para que un automóvil que la recorre a la velocidad v km/h no se deslice hacia el exterior, suponiendo que el coeficiente de rozamiento sea $\mu = 0{,}5$.
2. Deducir la ecuación anterior en el supuesto de que la curva tenga un peralte de α grados.
3. En el primer caso, es decir, si la curva no tiene peralte, suponiendo que el coche no se deslice hacia el exterior, deducir la fórmula que nos dé el valor mínimo del radio para que el coche que va a velocidad v km/h no vuelque, sabiendo que el centro de gravedad está h m sobre el suelo y que la distancia entre ruedas es de d metros.

Solución

1)

$$F_c = R \Rightarrow M\frac{v^2}{r} = Mg \Rightarrow \boxed{r = \frac{v^2}{\mu g}}$$

La velocidad debe expresarse en m/s si $g = 9{,}8$ m/s^2, como v nos indica km/h, obtenemos:

$$r = \frac{10^6 v^2}{3\,600^2 \times 0{,}5 \times 9{,}8} = 0{,}016 v^2 \text{ m}$$

2)

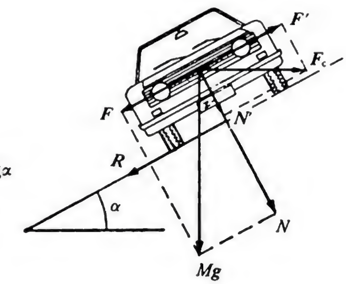
$$F' = F + R \quad \left| \begin{array}{l} F' = M \dfrac{v^2}{r} \cos\alpha \\ F = Mg\,\text{sen}\alpha \\ R = \mu(N + N') = \mu \left[Mg\cos\alpha + M \dfrac{v^2}{r} \text{sen}\alpha \right] \end{array} \right.$$

$$M \frac{v^2}{r} \cos\alpha = Mg\,\text{sen}\alpha + \mu \left[Mg\cos\alpha + M \frac{v^2}{r} \text{sen}\alpha \right] \Rightarrow \frac{v^2}{r} = g\,\text{tag}\alpha + \mu g + \mu \frac{v^2}{r} \text{tag}\alpha$$

$$\frac{v^2}{r}(1 - \mu\,\text{tag}\alpha) = g(\mu + \text{tag}\alpha) \quad \Rightarrow \boxed{r = \frac{v^2}{g} \frac{1 - \mu\,\text{tag}\alpha}{\mu + \text{tag}\alpha}}$$

como v la hemos de expresar en m/s, obtenemos:

$$r = \frac{10^6 v^2}{3\,600^2 \times 9{,}8} \frac{1 - 0{,}5\,\text{tag}\alpha}{0{,}5 + \text{tag}\alpha} \text{ m}$$



Problema VIII-83

3) Tomando momentos respecto del punto de contacto de la rueda derecha de la figura del problema anterior con el suelo, se ha de verificar:

$$Mg \frac{d}{2} - F_c h = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{Mgd}{2} = \frac{Mv^2}{r} h \quad \Rightarrow \boxed{r = \frac{2v^2 h}{gd}}$$

luego:

$$r = \frac{2h}{9{,}8d} \frac{10^6 v^2}{3\,600^2} \text{ m}$$

Problema 84. Un automóvil de 1 000 kg de masa marcha a 108 km/h. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre los neumáticos y la carretera es 0,3, calcular:

1. Fuerza máxima de frenado eficaz (evitar que las ruedas giren).

2. Aceleración correspondiente y distancia que recorrerá durante el frenado hasta pararse.

3. Radio mínimo de la curva que pudiera tomar sin peraltar y sin derrapar.

4. Peralte necesario para que no derrape en una curva de 100 m de radio.

Solución

$$v = 30 \text{ m/s}$$

1) La fuerza máxima de rozamiento, que es:

$$\boxed{R = \mu Mg = 0{,}3 \times 1\,000 = 3\,000 \text{ kp}}$$

2) El movimiento es decelerado y su deceleración es:

$$\boxed{a = \frac{R}{M} = \mu g = 0{,}3 \times 9{,}8 = 2{,}94 \text{ m/s}^2}$$

$$v = \sqrt{2|a|s} \quad \Rightarrow \boxed{s = \frac{v^2}{2|a|} = \frac{30^2}{2 \times 2{,}94} = 153 \text{ m}}$$

3)

$$F_c = R \;\Rightarrow\; \frac{Mv^2}{r} = \mu Mg \;\Rightarrow\; \boxed{r = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{30^2}{0{,}3 \times 9{,}8} = 306 \text{ m}}$$

4)

$$F' = F + R \;\left|\; \begin{array}{l} F' = M \dfrac{v^2}{r}\cos\alpha \\ F = Mg\,\text{sen}\alpha \\ R = \mu(N + N') = \mu\left(Mg\cos\alpha + M\dfrac{v^2}{r}\,\text{sen}\alpha\right) \end{array}\right.$$

$$M\frac{v^2}{r}\cos\alpha = Mg\,\text{sen}\alpha + \mu\left(Mg\cos\alpha + M\frac{v^2}{r}\,\text{sen}\alpha\right) \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{r} = g\,\text{tag}\alpha + \mu g + \mu\frac{v^2}{r}\,\text{tag}\alpha$$

$$\text{tag}\alpha = \frac{\dfrac{v^2}{r} - \mu g}{\mu\dfrac{v^2}{r} + g} = \frac{v^2 - \mu g r}{\mu v^2 + gr} = \frac{30^2 - 0{,}3 \times 9{,}8 \times 100}{0{,}3 \times 30^2 + 9{,}8 \times 100} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha \simeq 26°}$$

D) SISTEMAS DE MASA VARIABLE. COHETES

FORMULARIO

ECUACIÓN DE LOS SISTEMAS DE MASA VARIABLE:

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \Sigma\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\frac{dm}{dt}$$

M: masa del cuerpo en el instante t.
$\boldsymbol{v}$: velocidad del cuerpo en el instante t.
$\boldsymbol{v}_{\text{rel}}$: velocidad relativa del chorro de materia respecto del cuerpo.
dm: elemento de masa que adquiere el cuerpo en el tiempo dt.

ECUACIÓN DE LOS PROPULSORES:

a) *Autónomos:*

$$M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \Sigma\boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{v}_{\text{rel}}\frac{dM}{dt} = \Sigma\boldsymbol{F}_{\text{ext}} - \boldsymbol{F}_{\text{p}}$$

$\boldsymbol{F}_{\text{p}}$: fuerza propulsora.

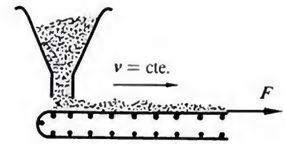
El signo menos no procede de los sentidos de la velocidad, sino de dM, que hay que considerarla negativa, debido a la variación de masa del cohete.

b) *No autónomos:*

$$\boldsymbol{F}_{\text{p}} = \frac{dm + dm'}{dt}\boldsymbol{v}_{\text{rel}} - \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt}$$

dm: masa de aire captada en dt.
dm': masa de combustible gastada.

Problema 85. Sobre una cinta transportadora cae trigo a razón de 600 kg/min desde una tolva en reposo. La cinta se mueve con una velocidad de 0,5 m/s. Calcular la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre la cinta que hace que la velocidad del sistema permanezca constante.

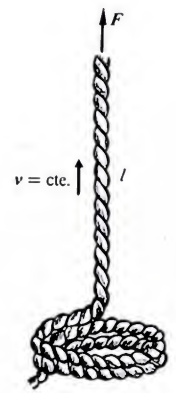


Problema VIII-85

Solución

$$M \frac{dv}{dt} = \Sigma \boldsymbol{F}_{ext} + v_{rel} \frac{dm}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = 0 \\ \Sigma \boldsymbol{F}_{ext} = \boldsymbol{F} \\ v_{rel} = -v \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = v \frac{dm}{dt} = 0{,}5 \times 10 = 5 \text{ N}}$$

Problema 86. Al extremo de una cuerda flexible, homogénea y de sección constante, que se encuentra apilada en el suelo, le aplicamos una fuerza variable capaz de elevarla con velocidad constante v, como se indica en la figura. Calcular dicha fuerza en función de la altura del extremo de la cuerda sobre el suelo.



Problema VIII-86

Solución

En el instante en que se encuentra en movimiento una longitud l de la cuerda su momento lineal será:

$$p = Mv = \lambda l v$$

M: masa de la longitud l.
λ: masa de la unidad de longitud que hemos supuesto constante.

La primera ecuación del movimiento aplicada al sistema, teniendo en cuenta que $v = dl/dt$, nos queda:

$$F - Mg = \frac{d}{dt}(\lambda l v) \quad \Rightarrow \quad F - \lambda l g = \lambda v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \lambda(lg + v^2)}$$

Llegamos al mismo resultado aplicando la ecuación del movimiento de los sistemas de masa variable:

$$M \frac{dv}{dt} = \Sigma F_{ext} + v_{rel} \frac{dm}{dt}$$

en la que:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \Sigma F_{ext} = F - \lambda l g$$

$$v_{rel} = -v \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{d(\lambda l)}{dt} = \lambda \frac{dl}{dt} = \lambda v$$

luego:

$$0 = F - \lambda l g - \lambda v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \lambda(lg + v^2)}$$

Problema 87. La masa inicial de un cohete incluido su combustible es de 15 t; una vez disparado y cuando se ha consumido todo el combustible, su masa se ha reducido a 5 t. Los gases son emitidos con velocidad constante de 1 500 m/s respecto del cohete, y con un gasto de 80 kg/s, que también supondremos constante, mientras el combustible se quema. Calcular:

1. La fuerza propulsora.
2. La velocidad del cohete cuando se ha agotado todo el combustible, suponiendo que el lanzamiento se efectúa en el espacio intergaláctico (en el vacío y fuera de toda influencia de cuerpos celestes).

Solución

1)

$$F_p = v_{rel}\frac{dM}{dt} \Rightarrow \boxed{F_p = 1\,500 \times 80 = 120\,000 \text{ N}}$$

2)

$$\Sigma F_{ex} = 0 \Rightarrow M\frac{dv}{dt} = -v_{rel}\frac{dM}{dt} \Rightarrow dv = -v_{rel}\frac{dM}{M}$$

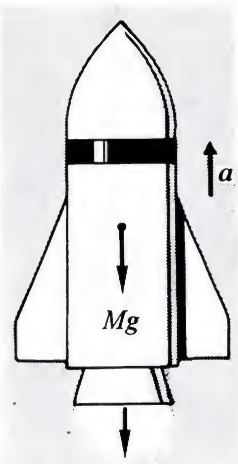
integrando:

$$v = -v_{rel}\ln\frac{M}{M_0} = v_{rel}\ln\frac{M_0}{M}$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{v = 1\,500\ln\frac{15}{5} = 1\,648 \text{ m/s}}$$

Problema 88. Queremos lanzar un cohete de 8 t de masa verticalmente hacia arriba. Si la velocidad de expulsión de los gases de combustión es de 2 000 m/s y queremos que la aceleración inicial sea de 8 m/s^2, calcular la masa de gas expulsada por segundo que impulsa al cohete.



Problema VIII-88

Solución

En el instante inicial y tomando magnitudes positivas hacia arriba:

$$M\frac{dv}{dt} = \Sigma F_{ext} - v_{rel}\frac{dM}{dt} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} = a \\ \Sigma F_{ex} = -Mg \\ v_{rel} = -v \end{array} \right.$$

luego:

$$Ma = -Mg + v\frac{dM}{dt} \Rightarrow \frac{dM}{dt} = \frac{M(g+a)}{v}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\frac{dM}{dt} = \frac{8\,000(9{,}8+8)}{2\,000} = 71{,}2 \text{ kg/s}}$$

Problema 89. Un avión a reacción tiene una velocidad de 900 km/h en vuelo horizontal. El motor hace entrar cada segundo 80 kg de aire, que quema 1 kg de combustible cada segundo. Los gases son expulsados por la tobera a la velocidad relativa de 700 m/s. Calcular la fuerza propulsora que vence la resistencia al avance del avión.

Solución

$$F_p = \frac{dm + dm'}{dt}v_{rel} - v\frac{dm}{dt}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{F_p = (80+1)700 - \frac{9 \times 10^5}{3\,600}80 = 36\,700 \text{ N}}$$

Capítulo IX

DINAMICA DE ROTACION

A) DINAMICA DE LA PARTICULA Y DE LOS SISTEMAS DE PARTICULAS

FORMULARIO

MOMENTO ANGULAR:

$$\boldsymbol{J} = \Sigma \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} \qquad M = \Sigma m_i$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \wedge M\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{S} = \Sigma \boldsymbol{r}'_i \wedge m_i \boldsymbol{v}'_i$$

SEGUNDA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$\boldsymbol{N} = \Sigma \boldsymbol{N}_{ex} = \frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$$

Problema 1. El vector de posición de una partícula de 0,5 kg de masa es: $\boldsymbol{r} = 2t^3\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j} - (2t + 1)\boldsymbol{k}$ m. Calcúlese:

1. Fuerza que actúa sobre la partícula.
2. Momento de esta fuerza respecto al origen del sistema de referencia.
3. Momento lineal y angular de la partícula respecto al origen.

Solución

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 6t^2\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 12t\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2$$

1)

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = 6t\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} \text{ N}}$$

2)

$$\boxed{\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2t^3 & 2t^2 & -(2t+1) \\ 6t & 2 & 0 \end{vmatrix} = (4t + 2)\boldsymbol{i} + (-12t^2 - 6t)\boldsymbol{j} - 8t^3\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m}}$$

3)

$$\boxed{p = mv = 3t^2 i + 2tj - k \text{ N} \cdot \text{s}}$$

$$J = r \wedge mv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2t^3 & 2t^2 & -(2t+1) \\ 3t^2 & 2t & -1 \end{vmatrix} = (2t^2 + 2t)i + (-4t^3 - 3t^2)j - 2t^4 k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

COMPROBACIÓN:

$$\frac{dp}{dt} = 6ti + 2j = F$$

$$\frac{dJ}{dt} = (4t + 2)i + (-12t^2 - 6t)j - 8k = N$$

Problema 2. Se dispara un proyectil de 5 kg de masa con una velocidad de 400 m/s, formando un ángulo de 45° con la horizontal y tomándose el punto de lanzamiento como origen de un sistema referencial. Calcúlese:

1. Fuerza que actúa sobre el proyectil.
3. Momento de esta fuerza respecto al origen a los 2 s de su lanzamiento.
3. Momento lineal y angular respecto al origen a los 2 s del lanzamiento.

Solución

Las ecuaciones horarias del movimiento serán:

$$\left.\begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array}\right| \quad a = -gi = -10j \text{ m/s}^2$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt \end{array}\right| \quad v = 200\sqrt{2}\, i + (200\sqrt{2} - 10t)j$$

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \cos\varphi \\ y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \frac{1}{2} g t^2 \end{array}\right| \quad r = 200\sqrt{2}\, ti + (200\sqrt{2}\, t - 5t^2)j$$

1)

$$\boxed{F = Ma = -50j \text{ N}}$$

2)

$$N = r \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 200\sqrt{2}\, t & 200\sqrt{2}\, t - 5t^2 & 0 \\ 0 & -50 & 0 \end{vmatrix} = -10^4 \sqrt{2}\, tk$$

$$t = 2 \text{ s} \quad \Rightarrow \left| N = -10^4\, 2\sqrt{2}\, k \text{ N} \cdot \text{m} \right.$$

3)

$$p = Mv = 10^3\sqrt{2}\,i + (10^3\sqrt{2} - 50t)j \quad t = 2\,\text{s} \;\Rightarrow\; \boxed{p = 10^3\sqrt{2}\,i + (10^3\sqrt{2} - 10^2)j\ \text{N}\cdot\text{s}}$$

$$J = r \wedge mv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 200\sqrt{2}\,t & 200\sqrt{2}\,t - 5t^2 & 0 \\ 10^3\sqrt{2} & 10^3\sqrt{2} - 50t & 0 \end{vmatrix} = -5\times 10^3\sqrt{2}\,t^2 k\,, \quad t = 2\,\text{s} \;\Rightarrow\; \boxed{J = -10^4\, 2\sqrt{2}\,k\ \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}$$

(Compruebe el alumno los resultados de 1) y 2) mediante las dos ecuaciones del movimiento y el 3) apartado.)

Problema 3. Sobre una partícula de 2 kg de masa que se encuentra inicialmente en el punto A (2, −3, 1) m, actúa una fuerza constante $F = 2i + j - 4k$ N durante 2 s. Calcular:

1. Impulso de tal fuerza en ese tiempo.
2. Momento lineal al cabo de los 2 s, si para $t = 0$, $p_0 = 2i + 12k$ N · s.
3. Posición de la partícula al cabo de 2 s.
4. Momento angular, respecto al origen, al cabo de los 2 s.

Solución

1)

$$\boxed{I = Ft = 4i + 2j - 8k\ \text{N}\cdot\text{s}}$$

2)

$$F = \frac{dp}{dt} \;\Rightarrow\; dp = F\,dt \;\Rightarrow\; p - p_0 = \int_0^t F\,dt = F\int_0^t dt = Ft$$

$$p = Ft + p_0 = (2t + 2)i + tj + (12 - 4t)k\,, \quad t = 2\,\text{s} \;\Rightarrow\; \boxed{p = 6i + 2j + 4k\ \text{N}\cdot\text{s}}$$

3)

$$p = Mv \;\Rightarrow\; v = \frac{p}{M} = (t + 1)i + \frac{1}{2}tj + (6 - 2t)k$$

$$r = \int v\,dt = \left(\frac{t^2}{2} + t + C_1\right)i + \left(\frac{1}{4}t^2 + C_2\right)j + (6t - t^2 + C_3)k$$

$$r_0 = 2i - 3j + k\ \text{m} \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} C_1 = 2\ \text{m} \\ C_2 = -3\ \text{m} \\ C_3 = 1\ \text{m} \end{array}\right.$$

$$r = \left(\frac{t^2}{2} + t + 2\right)i + \left(\frac{1}{4}t^2 - 3\right)j + (1 + 6t - t^2)k\,, \quad t = 2\,\text{s} \;\Rightarrow\; \boxed{r = 6i - 2j + 9k\ \text{m}}$$

se encuentra en el punto B (6, −2, 9) m.

4)

$$\boxed{J = r \wedge p = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -2 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -26i + 30j + 24k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}$$

Problema 4. A una partícula de 1 kg de masa que se encuentra inicialmente en el punto A (1, 2, 1) m (respecto a un sistema referencial $OXYZ$) y que posee una velocidad $v_0 = 3i - 2j + k$ m/s se le aplica una fuerza tal que su momento respecto al origen permanece constante y de valor $N = 3i - 4j + 2k$ N · m. Calcular el momento angular de la partícula al cabo de 3 s.

Solución

El vector de posición inicial ($t = 0$) será:

$$r_0 = i + 2j + k \text{ m}$$

como:

$$N = \frac{dJ}{dt} \quad \Rightarrow \quad Ndt = dJ$$

integrando, teniendo en cuenta la constancia de N, nos queda:

$$\left. \begin{array}{r} Nt = J - J_0 \quad \Rightarrow \quad J = Nt + J_0 \\ Nt = 9i - 12j + 6k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \\ J_0 = r_0 \wedge mv_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4i + 2j - 8k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{J = 13i - 10J - 2k \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}$$

Problema 5. Tres partículas de 5, 2 y 3 kg de masa se mueven con velocidades $v_1 = i + j$ m/s, $v_2 = j + 2k$ m/s y $v_3 = i - 2j + 4k$ m/s; encontrándose en ese instante en los puntos A (1, 0, 1), B (−2, 1, 1) y C (0, 1, 1), expresadas estas coordenadas en metros. Determinar el orbital y el spin del sistema en dicho instante.

Solución

$$J = L + S \left| \begin{array}{ll} L = R \wedge Mv & (M = \Sigma m_i = 10 \text{ kg}) \\ S = \Sigma r_i' \wedge m_i v_i' & \end{array} \right.$$

Cálculo del vector de posición del CM:

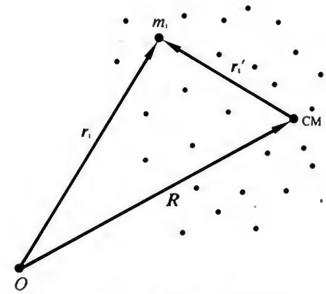
$$\left. \begin{array}{l} m_1 r_1 = 5i + 5k \text{ kg} \cdot \text{m} \\ m_2 r_2 = -4i + 2j + 2k \text{ kg} \cdot \text{m} \\ m_3 r_3 = 3j + 3k \text{ kg} \cdot \text{m} \end{array} \right| \Rightarrow R = \frac{\Sigma m_i r_i}{M} = 0{,}1i + 0{,}5j + k \text{ m}$$

Cálculo de la velocidad del CM:

$$\left.\begin{array}{l} m_1\boldsymbol{v}_1 = 5\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} \quad \text{kg} \cdot \text{m/s} \\ m_2\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \\ m_3\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i}{M} = 0{,}8\boldsymbol{i} + 0{,}1\boldsymbol{j} + 1{,}6\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

El orbital será:

$$\boxed{\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \wedge M\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 1 \\ 8 & 1 & 16 \end{vmatrix} = 7\boldsymbol{i} + 6{,}4\boldsymbol{j} - 3{,}9\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}$$



Problema IX-5

Los vectores de posición referidos al CM como origen serán:

$$\boldsymbol{r}'_1 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{R} = 0{,}9\boldsymbol{i} - 0{,}5\boldsymbol{j} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{r}'_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{R} = -2{,}1\boldsymbol{i} + 0{,}5\boldsymbol{j} \text{ m}$$

$$\boldsymbol{r}'_3 = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{R} = -0{,}1\boldsymbol{i} + 0{,}5\boldsymbol{j} \text{ m}$$

las velocidades referidas al CM como origen serán:

$$\boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = 0{,}2\boldsymbol{i} + 0{,}9\boldsymbol{j} - 1{,}6\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v} = -0{,}8\boldsymbol{i} + 0{,}9\boldsymbol{j} + 0{,}4\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{v}'_3 = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v} = 0{,}2\boldsymbol{i} - 2{,}1\boldsymbol{j} + 2{,}4\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

de las que se obtiene:

$$\boldsymbol{r}'_1 \wedge m_1\boldsymbol{v}'_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0{,}9 & -0{,}5 & 0 \\ 1 & 4{,}5 & -8 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} + 7{,}2\boldsymbol{j} + 4{,}55\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$\boldsymbol{r}'_2 \wedge m_2\boldsymbol{v}'_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ -1{,}6 & 1{,}8 & 0{,}8 \end{vmatrix} = 0{,}4\boldsymbol{i} + 1{,}68\boldsymbol{j} - 2{,}98\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

$$\boldsymbol{r}'_3 \wedge m_3\boldsymbol{v}'_3 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -0{,}1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & -6{,}3 & 7{,}2 \end{vmatrix} = 3{,}6\boldsymbol{i} + 0{,}72\boldsymbol{j} + 0{,}33\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

El spin será:

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \Sigma \boldsymbol{r}'_i \wedge m_i\boldsymbol{v}'_i = 8\boldsymbol{i} + 9{,}6\boldsymbol{j} + 1{,}9\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}}$$

El momento angular del sistema valdrá:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S} = 15\boldsymbol{i} + 16\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

El alumno comprobará este ejercicio aplicando:

$$\boldsymbol{J} = \Sigma \boldsymbol{r}_i \wedge m_i\boldsymbol{v}_i$$

B) MOMENTOS DE INERCIA

FORMULARIO

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO DE UN EJE:

$$I = \Sigma m_i r_i^2$$

siendo r_1 la distancia de cada partícula del sólido al eje. Si es el eje OX, se le designa por I_{xx}, y su valor, en función de las coordenadas de las partículas que forman el sólido es:

$$I_{xx} = \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

análogamente se definen I_{yy} e I_{zz}.

RADIO DE GIRO:

$$K_0 = \sqrt{\frac{\Sigma m_i r_i^2}{\Sigma m_i}} = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

TEOREMA DE STEINER:

$$I = I_G + d^2 \Sigma m_i = I_G + Md^2$$

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN PUNTO:

$$I_0 = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \Sigma m_i r_i^2$$

siendo r_i la distancia de cada partícula al punto.

MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN PLANO:

$$I_{xz} = \Sigma m_i y_i^2 \qquad I_{xy} = \Sigma m_i z_i^2 \qquad I_{yz} = \Sigma m_i x_i^2$$

TEOREMAS:

1.°

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})$$

2.°

$$I_0 = I_{xx} + I_{yz} = I_{yy} + I_{xz} = I_{zz} + I_{xy}$$

EXPRESIÓN INTEGRAL Y DIFERENCIAL DEL MOMENTO DE INERCIA RESPECTO DE UN EJE:

$$I = \int r^2 dM \qquad dI = r^2 dM$$

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS CUERPOS HOMOGŃEOS CON RESPECTO A SU EJE GEOMÉTRICO:

Cilindro hueco:

$$I = Mr^2$$

Cilindro macizo:	$I = \frac{1}{2} Mr^2$
Esfera hueca:	$I = \frac{1}{2} Mr^2$
Esfera maciza:	$I = \frac{2}{5} Mr^2$
Cono recto macizo:	$I = \frac{3}{10} Mr^2$
Cubo macizo:	$I = \frac{1}{6} Ml^2$

Problema 6. En los vértices sucesivos A, B, C y D de un cuadrado de 10 cm de lado hay localizadas masas de 1, 2, 3 y 4 g, respectivamente. Determinar el momento de inercia del sistema y su radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano que lo contiene y que pasa:

1. Por A.
2. Por el centro del cuadrado.
3. Por el centro de masa del sistema.
4. Comprobar 1 y 2 aplicando el teorema de Steiner.

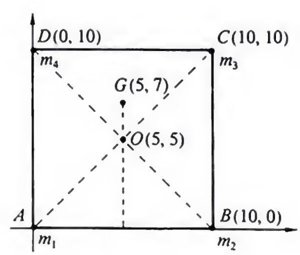
Solución

$$I = \Sigma m_i r_i^2 \qquad K_0 = \sqrt{\frac{I}{\Sigma m_i}} \qquad I = I_G + d^2 \Sigma m_i$$

1)

$$\boxed{I_A = m_2 AB^2 + m_3 AC^2 + m_4 AD^2 = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^2 \times 2 + 4 \times 10^2 = 1\,200 \text{ g} \cdot \text{cm}^2}$$

$$\boxed{K_0 = \sqrt{\frac{1\,200}{10}} = 2\sqrt{30} \text{ cm}}$$



Problema IX-6

2)

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = m_1 OA^2 + m_2 OB^2 + m_3 OC^2 + m_4 OD^2 \\ OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = 50 \text{ cm}^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_0 = 500 \text{ g} \cdot \text{cm}^2}$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{500}{10}} = 5\sqrt{2} \text{ cm}$$

3)

$$x_G = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_2 AB + m_3 DC}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{2 \times 10 + 3 \times 10}{10} = 5 \text{ cm}$$

$$y_G = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_3 BC + m_4 AD}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \frac{3 \times 10 + 4 \times 10}{10} = 7 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \quad G\,(5,\,7) \text{ cm}$$

$$AG^2 = BG^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \text{ cm}^2$$

$$CG^2 = DG^2 = 5^2 + 3^2 = 34 \text{ cm}^2$$

$$\boxed{I_G = m_1 AG^2 + m^2 BG^2 + m_3 CG^2 + m_4 DG^2 = 74 + 2 \times 74 + 3 \times 34 + 4 \times 34 = 460 \text{ g} \cdot \text{cm}^2}$$

$$\boxed{K_0 = \sqrt{\frac{460}{10}} = \sqrt{46} \text{ cm}}$$

4)

$$\left. \begin{aligned} I_A &= I_G + AG^2 \Sigma m_i \\ AG^2 &= 74 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad I_A = 460 + 10 \times 74 = 1\,200 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= I_G + OG^2 \Sigma m_i \\ OG^2 &= 4 \text{ cm}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad I_0 = 460 + 4 \times 10 = 500 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$$

Problema 7. Tres masas puntuales de 2, 3 y 4 kg se encuentran en A (1, 2, 1), B (−2, 1, 0) y C (3, 2, 4) referidas a un sistema de ejes cartesianos y medidas éstas en metros. Calcular el momento de inercia del sistema con respecto a:

1. El origen de referencia.
2. A los ejes del sistema de referencia.
3. A los planos XOY, YOZ y XOZ.
4. Verificar los dos teoremas referentes a los coeficientes de inercia (ver formulario).

Solución

1)

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \Sigma m_i r_i^2 \\ r_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ r_1^2 &= OA^2 = 6 \text{ m}^2 \\ r_2^2 &= OB^2 = 5 \text{ m}^2 \\ r_3^2 &= OC^2 = 29 \text{ m}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad \boxed{I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 = 143 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

2)

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \Sigma m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ y_1^2 + z_1^2 &= 5 \text{ m}^2 \\ y_2^2 + z_2^2 &= 1 \text{ m}^2 \\ y_3^2 + z_3^2 &= 20 \text{ m}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow \quad \boxed{I_{xx} = 2 \times 5 + 3 \times 1 + 4 \times 20 = 93 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{yy} = \Sigma m_i(x_i^2 + z_i^2) \\ x_1^2 + z_1^2 = 2\ \text{m}^2 \\ x_2^2 + z_2^2 = 4\ \text{m}^2 \\ x_3^2 + z_3^2 = 25\ \text{m}^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_{yy} = 2 \times 2 + 3 \times 4 + 4 \times 25 = 116\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} I_{zz} = \Sigma m_i(x_i^2 + y_i^2) \\ x_1^2 + y_1^2 = 5\ \text{m}^2 \\ x_2^2 + y_2^2 = 5\ \text{m}^2 \\ x_3^2 + y_3^2 = 13\ \text{m}^2 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_{zz} = 2 \times 5 + 3 \times 5 + 4 \times 13 = 77\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

3)

$$\boxed{\begin{array}{l} I_{xy} = \Sigma m_i z_i^2 = 2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 16 = 66\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_{yz} = \Sigma m_i x_i^2 = 2 \times 1 + 3 \times 4 + 4 \times \ \ 9 = 50\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \\ I_{xz} = \Sigma m_i y_i^2 = 2 \times 4 + 3 \times 1 + 4 \times \ \ 4 = 27\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \end{array}}$$

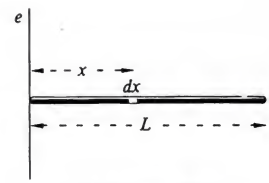
4)

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{1}{2}(93 + 116 + 77) = 143\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = I_{xx} + I_{yz} = \ \ 93 + 50 = 143\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = I_{yy} + I_{xz} = 116 + 27 = 143\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_0 = I_{zz} + I_{xy} = \ \ 77 + 66 = 143\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$$



Problema IX-8

Problema 8. Calcular el momento de inercia de una varilla delgada homogénea respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos.

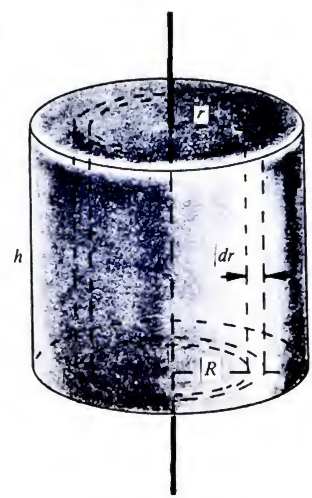
Solución

Llamemos λ a la densidad lineal (masa de cada unidad de longitud). La masa de la longitud dx es:

$$dM = \lambda dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \frac{L^3}{3}$$

y como la masa total de la varilla es:

$$M = \lambda L \quad \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{3} ML^2}$$



Problema IX-9

Problema 9. Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a su eje geométrico.

Solución

Consideremos el volumen limitado entre dos cilindros de radios r y $r + dr$; su masa es:

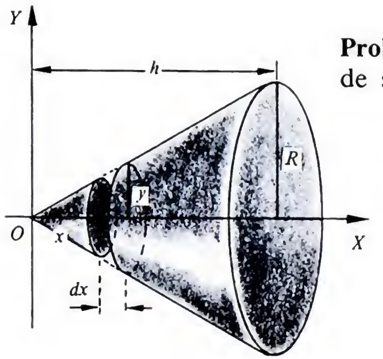
$$dM = 2\pi r h \rho dr$$

ρ es la masa específica (masa de la unidad de volumen).

$$I = \int_0^R r^2 dM = \int_0^R 2\pi h\rho r^3 dr = 2\pi h\rho \frac{R^4}{4}$$

y como la masa total del cilindro es:

$$M = \pi R^2 h\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{2} MR^2}$$



Problema IX-10

Problema 10. Calcular el momento de inercia de un cono recto respecto a su eje de simetría.

Solución

El momento de inercia del cilindro elemental de altura dx que representamos en la figura es:

$$dI = \frac{1}{2} y^2 dm$$

llamando ρ a la masa de la unidad de volumen, tendremos:

$$dm = \rho\pi y^2 dx$$

y como:

$$\frac{y}{x} = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{R}{h} x$$

nos queda:

$$dI = \frac{1}{2} \rho\pi \frac{R^4}{h^4} x^4 dx \quad \Rightarrow \quad I = \int_0^h \frac{1}{2} \rho\pi \frac{R^4}{h^4} x^4 dx = \frac{1}{2} \rho\pi \frac{R^4 h}{5}$$

que junto con que masa total es:

$$M = \frac{\pi}{3} R^2 h\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{3}{10} MR^2}$$

Problema 11. Calcular el momento de inercia de una esfera maciza y homogénea con respecto a un eje que pasa por su centro.

Solución

Sea una esfera homogénea de radio R. Consideremos el volumen limitado por dos esferas de radios r y $r + dr$. Su masa es:

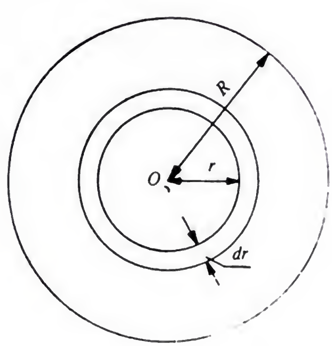
$$dM = 4\pi r^2 \rho dr$$

ρ es su masa específica. El momento de inercia respecto al centro de la esfera será:

$$I_0 = \int_0^R r^2 dM = \int_0^R 4\pi r^2 \rho r^2 dr = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2$$

ya que la masa de la esfera es:

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$



Problema IX-11

Aplicando el primer teorema (ver formulario), obtenemos:

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = \frac{3}{2} I_{xx} = \frac{3}{5} MR^2$$

ya que por simetría:

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = I_{xx} = \frac{2}{5} MR^2}$$

Problema 12. Calcular el momento de inercia de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a un eje perpendicular a su eje geométrico y que pasa por el centro de su altura (H).

Solución

Consideremos el volumen comprendido entre dos planos que distan del plano XY, h y $h + dh$. La masa de tal «rebanada» es:

$$dM = A\rho dh$$

(A = sección; ρ = masa específica). El momento de inercia respecto al plano XY es:

$$I_{xy} = \int_0^{H/2} h^2 dM = 2\int_0^{H/2} A\rho h^2 dh = 2A\rho \frac{1}{3}\frac{H^3}{8} = \frac{1}{12} A\rho H^3$$

y como la masa del cilindro es:

$$M = AH\rho \quad \Rightarrow \quad I_{xy} = \frac{1}{12} MH^2$$

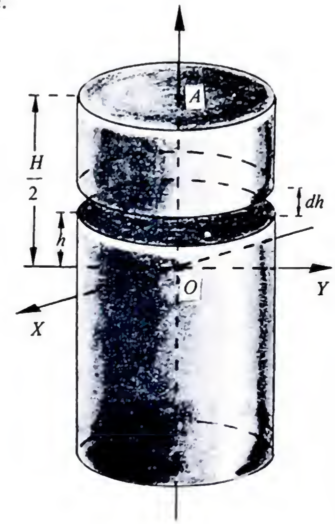
Aplicando los teoremas del formulario, tendremos:

$$I_0 = I_{zz} + I_{xy} = \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) = I_{yy} + \frac{1}{2} I_{zz}$$

puesto que por simetría obtenemos:

$$I_{yy} = I_{xx} \quad \Rightarrow \quad I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz} + I_{xy} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{12} MH^2$$

$$\boxed{I_{yy} = \frac{M}{4}\left[R^2 + \frac{H^2}{3}\right]}$$



Problema IX-12

Problema 13. **1.** Calcular el radio de giro de un cilindro macizo y homogéneo con respecto a su eje geométrico.
2. Calcular el radio de giro de una esfera maciza y homogénea con respecto a un eje que pasa por su centro.
3. Calcular el radio de giro de una varilla delgada y homogénea con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro.

Solución

1) $$\frac{1}{2} MR^2 = MK_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_0 = \frac{R}{\sqrt{2}}}$$

2) $$\frac{2}{5} \overline{MR^2} = MK_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_0 = \sqrt{\frac{2}{5}} R}$$

3) $$\frac{1}{12} Ml^2 = MK_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_0 = \frac{l}{\sqrt{12}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}}$$

Problema 14. Conocido el momento de inercia de una varilla delgada homogénea con respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos, determinar el correspondiente a un eje paralelo al anterior y que pasa por el centro.

Solución

$$\frac{1}{3} Ml^2 = I_G + M \frac{l^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_G = Ml^2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{12} Ml^2}$$

Problema 15. Conocido el momento de inercia de una varilla delgada y homogénea con respecto a un eje (e) perpendicular a ella y que pasa por uno de sus extremos, determinar el correspondiente a un eje paralelo al primero (e') y que dista de él 1/4 de la longitud de la varilla.

Solución

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3} Ml^2 &= I_G + M \frac{l^2}{4} \\ I'_e &= I_G + M \frac{l^2}{16} \end{aligned}\right| \quad I'_e - \frac{1}{3} Ml^2 = Ml^2 \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right] \Rightarrow \boxed{I'_e = Ml^2 \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right] = \frac{7}{48} Ml^2}$$

C) DINAMICA DEL SOLIDO RIGIDO GIRANDO ALREDEDOR DE UN EJE

FORMULARIO

MOMENTO ANGULAR:

$$\boldsymbol{J} = \Sigma \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i = I \boldsymbol{\omega}$$

ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO:

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{J}}{dt} = I \boldsymbol{\alpha}$$

Problema 16. Una rueda de fuegos artificiales de 1 m de radio lleva sujetos, en los extremos de un diámetro dos cartuchos que al arder ejercen dos fuerzas iguales, constantes, tangenciales y de sentidos contrarios.

1. ¿Qué clase de movimiento será el de la rueda? (Se desprecia la resistencia del aire y la pérdida de masa de los cartuchos, mientras se queman.)

2. Cada cartucho produce una fuerza de 0,25 kp. Calcular el momento del par de fuerzas que hace girar a la rueda, expresándolo en kp · m y en unidades GIORGI y cuál es la dirección y sentido del vector momento, si vemos girar la rueda en el sentido de las agujas de un reloj.

3. Si en los 10 primeros segundos ha dado la rueda cinco vueltas, ¿cuántos radianes ha girado?
4. Calcular la aceleración angular y su velocidad angular al cabo de los 10 s.

Solución

1) El movimiento será de rotación con aceleración angular constante por estar producido por un par de momento constante.

2) $$N = r \wedge F \quad \Rightarrow \quad N = 2RF = 0{,}5 \text{ kp} \cdot \text{m} = 0{,}5 \times 9{,}8 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La dirección es perpendicular al plano de la rueda y el sentido, el de avance de un sacacorchos que gira en el sentido de la rueda.

3)
$$\varphi = 2\pi 5 = 10\pi \text{rad}$$

4)
$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \times 10\pi}{100} = 0{,}2\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega t \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\varphi}{t} = \frac{2 \times 10\pi}{10} = 2\pi \text{ rad/s}$$

Problema 17. Un cilindro macizo gira alrededor de su eje con una velocidad angular de 600 rpm. Su masa es de 1 kg y su radio de 5 cm. Tangencialmente se aplica una fuerza constante de frenado de 0,1 kp. Determinar:
1. Aceleración angular de frenado.
2. Tiempo que tarda en pararse.
3. Número de vueltas que da hasta que se para.

Solución

1)
$$N = \frac{dJ}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \quad \Rightarrow \quad N = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} N &= RF \\ I &= \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned}\right| \quad RF = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\alpha| = \frac{2F}{MR} = \frac{2 \times 0{,}1 \times 9{,}8}{0{,}05} \simeq 40 \text{ rad/s}}$$

2)
$$\omega = |\alpha| t = 2\pi\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2\pi\nu}{|\alpha|} = \frac{2\pi 600}{60 \times 40} = \frac{\pi}{2} \text{ s}}$$

3)
$$\varphi = \frac{1}{2}|\alpha| t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{|\alpha| t^2}{4\pi} = \frac{40\pi^2}{4 \times 4\pi} = 2{,}5\pi \text{ vueltas}}$$

Problema 18. Una rueda tiene un momento de inercia de 10 kg · m^2 y gira a razón de 40 rpm. Se le aplica una fuerza tangencial, constante y se para en 30 s. Determinar:

1. El valor del momento de la fuerza aplicada.
2. Aceleración angular del frenado.
3. Número de vueltas que da la rueda desde que se aplica la fuerza hasta que se para.

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} N &= I\alpha \\ \omega &= \alpha t = 2\pi\nu \end{aligned}\right| \quad \boxed{N = \frac{I 2\pi\nu}{t} = \frac{10 \times 2\pi 40}{60 \times 30} = \frac{4}{9}\pi \text{ N} \cdot \text{m}}$$

2)

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\nu}{t} = \frac{2\pi 40}{60 \times 30} = \frac{2\pi}{45} \text{ rad/s}^2}$$

3)

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{n^{\text{o}} = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\,\omega t}{2\pi} = \frac{\nu t}{2} = \frac{40 \times 30}{60 \times 2} = 10 \text{ vueltas}}$$

Problema 19. El equipo móvil de un motorcito eléctrico tiene una masa de 20 g y un radio de giro de 3 cm. El par de fuerzas responsable del movimiento vale 2 g · cm. ¿Qué tiempo precisa el motorcito para alcanzar una velocidad de 100 rpm?

Solución

$$\left.\begin{aligned} N &= I\alpha \\ I &= MK_0^2 \\ \alpha &= \frac{2\pi\nu}{t} \end{aligned}\right| \quad N = MK_0^2\,\frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{MK_0^2 2\pi\nu}{N} = \frac{20 \times 9 \times 2\pi 100}{60 \times 2 \times 980} \simeq 1 \text{ s}}$$

Problema 20. Si una rueda de 80 cm de radio y de momento de inercia 10 kg · m^2 gira impulsada por un cohete fijo en su periferia, como en los fuegos artificiales, de manera que los gases los expulsa tangencialmente y de una manera constante, se desea calcular:

1. La fuerza constante de reacción de los gases, sabiendo que al cabo de 6 s la rueda, que partió del reposo, alcanza la velocidad de 1 Hz.
2. El valor de las aceleraciones tangencial y normal de un punto de su periferia, al cabo de esos 6 s. Dibuja también el vector que representa la aceleración total.
3. ¿Cuánto tiempo tardaría la rueda en alcanzar la misma velocidad angular, si el aro periférico aumentara su masa en 5 kg?

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} N &= I\alpha \\ N &= RF \\ \alpha &= \frac{2\pi\nu}{t} \end{aligned}\right| \quad RF = I\,\frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{I 2\pi\nu}{Rt} = \frac{10 \times 2\pi \times 1}{0{,}8 \times 6} = 4{,}17\pi \text{ N}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{a_\tau = \alpha r = \dfrac{2\pi\nu r}{t} = \dfrac{2\pi 0{,}8}{6} = 0{,}27\pi \text{ m/s}^2} \\ \boxed{a_n = \omega^2 r = 4\pi^2\nu^2 R = 4\pi^2 0{,}8 = 3{,}2\pi^2 \text{ m/s}^2}\end{array}\right| \Rightarrow a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

formando un ángulo con el radio cuya tangente es:

$$\text{tag}\beta = \frac{a_\tau}{a_n}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} N = I'\alpha \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t'} \\ N = RF \end{array}\right| \quad RF = (I + MR^2)\frac{2\pi\nu}{t'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t' = \frac{(I + MR^2)2\pi\nu}{RF} = \frac{(10 + 5 \times 0{,}8^2)2\pi}{0{,}8 \times 4{,}16\pi} \simeq 8 \text{ s}}$$

Problema 21. Una rueda maciza de 32 cm de diámetro que pesa 17,3 kg se desea que gire a 385 rpm, aplicándole, para ello, dos fuerzas de 2,6 kp en sentidos opuestos sobre su periferia. ¿Cuánto tiempo tardaría en lograrse, si no existiese ninguna clase de rozamiento? ¿Y cuánto se tardará realmente si los rozamientos equivalen a un par de rodadura de 150 g · m? Si una vez lograda dicha velocidad se dejara a la rueda girar libremente, ¿cuánto tiempo seguiría todavía según se considere o no la presencia del par de rodadura?

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ N = 2FR \\ I = \dfrac{1}{2}MR^2 \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 2FR = \dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \\ \boxed{t = \dfrac{MR\pi\nu}{2F} = \dfrac{17{,}3 \times 0{,}16\pi 385}{60 \times 2 \times 2{,}6 \times 9{,}8} = 1{,}09 \text{ s}} \end{array}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} N - N' = I\alpha \\ N = 2FR \\ I = \dfrac{1}{2}MR^2 \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t'} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} 2FR - N' = \dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{2\pi\nu}{t'} \quad \Rightarrow \\ \boxed{t' = \dfrac{MR^2\pi\nu}{2FR - N'} = \dfrac{17{,}3 \times 0{,}16^2\pi 385}{60[2 \times 2{,}6 \times 9{,}8 \times 0{,}16 - 0{,}15 \times 9{,}8]} = 1{,}33 \text{ s}} \end{array}$$

3) Sin actuar el par de rodadura seguiría girando indefinidamente. Actuando el par, el tiempo lo calculamos igual que en los apartados anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} N' = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t''} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} N' = \dfrac{1}{2}MR^2\dfrac{2\pi\nu}{t''} \quad \Rightarrow \\ \boxed{t'' = \dfrac{MR^2\pi\nu}{N'} = \dfrac{17{,}3 \times 0{,}16^2 \times \pi^2 385}{60 \times 0{,}15 \times 9{,}8} = 19{,}08 \text{ s}} \end{array}$$

Problema 22. Supongamos un cilindro de radio R, capaz de girar en torno a su eje geométrico y cuyo momento de inercia con respecto a éste es I; arrollada al cilindro tenemos una cuerda de masa despreciable y pendiente de ella un cuerpo de peso P y masa M. Tal peso origina una rotación del cilindro y el cuerpo desciende con una aceleración a, constante. Calcular:
1. El momento del par que origina la rotación del cilindro.
2. La aceleración a y la aceleración angular α de la polea.

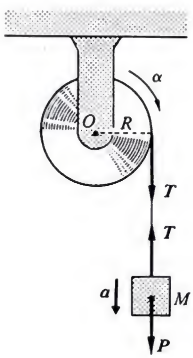
Solución

1) El momento del par que origina la rotación del cilindro es debido a la fuerza T (tensión de la cuerda), que calcularemos aplicando la primera ecuación del movimiento al cuerpo (segundo principio de Newton):

$$\Sigma F_{cx} = Ma \quad \Rightarrow \quad P - T = Ma \quad \Rightarrow \quad T = P - Ma$$

luego:

$$\boxed{N = (P - Ma)R = M(g - a)R}$$



Problema IX-22

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{dJ}{dt} = I\alpha \\ M(g-a)R &= I\alpha \\ a &= \alpha R \end{aligned}\right| \Rightarrow M(g-a)R = I\,\frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g\,\frac{MR^2}{MR^2 + I}}$$

y, por tanto:

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{R} = g\,\frac{MR}{MR^2 + I}}$$

Problema 23. Se hace girar un cilindro macizo de 20 cm de radio y 5 kg de masa alrededor de su eje, colocado éste horizontalmente, arrollando sobre dicho cilindro una cuerda de peso despreciable sujeta por un extremo al mismo y de la que pende por el otro extremo un peso de 50 g. Se desea saber:
1. ¿Cuál es el momento de inercia del cilindro?
2. ¿Cuál es el momento del par que lo hace girar?
3. ¿Cuál es la aceleración angular con que se mueve el cilindro?
4. ¿Cuál es la aceleración de caída del cuerpo de 50 g?
5. ¿A qué tensión está sometida la cuerda mientras cae el peso? Se desprecian los rozamientos.

Solución

1)

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\,MR^2 = \frac{1}{2}\,5 \times 0{,}2^2 = 0{,}1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

2) y 4)

$$\left.\begin{array}{l} N = TR = I\alpha \\ M'g - T = M'a \\ a = \alpha R \end{array}\right| \Rightarrow N = (M'g - M'a)R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow \boxed{a = g\frac{2M'}{M + 2M'} \simeq 0{,}2 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{N = \frac{MRa}{2} = \frac{5 \times 0{,}2 \times 0{,}2}{2} = 0{,}1 \text{ N} \cdot \text{m}}$$

3)

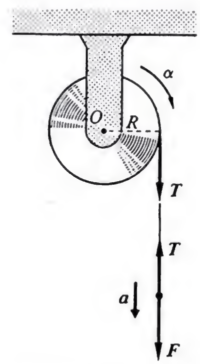
$$\boxed{\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}2}{0{,}2} = 1 \text{ rad/s}^2}$$

5)

$$\boxed{T = M'(g - a) = 0{,}05(9{,}8 - 0{,}2) = 0{,}48 \text{ N}}$$

Problema 24. Un cilindro macizo y homogéneo de 5 cm de radio y de masa 20 kg, cuyo eje es horizontal y puede girar en torno a él, sin rozamiento, lleva arrollada una cuerda supuesta sin peso, de la que se tira con una fuerza constante de 10 kp. Determinar:

1. La aceleración de un punto de la cuerda.
2. Espacio recorrido por tal punto de la cuerda en los tres primeros segundos.
3. Tiempo necesario para que el volante dé 20 vueltas.
4. Si en vez de actuar una fuerza de 10 kp atamos a la cuerda un cuerpo de 10 kp de peso, resolver las tres cuestiones anteriores.



Problema IX-24-1.ª

Solución

1) El momento del par que origina la rotación del cilindro es debido a la fuerza T, cuyo valor en este caso es:

$$T = F$$

y como:

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ N = TR \\ I = \frac{1}{2}MR^2 \end{array}\right| \Rightarrow FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{2F}{MR}$$

siendo:

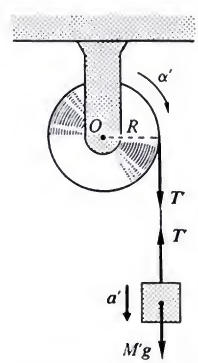
$$a = \alpha R \Rightarrow \boxed{a = \frac{2F}{M} = \frac{2 \times 10 \times 9{,}8}{20} = 9{,}8 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}9{,}8 \times 9 = 44{,}1 \text{ m}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \varphi = 40\pi \text{ rad} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2\varphi}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\varphi R}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 40\pi 0{,}05}{9{,}8}} = 1{,}1 \text{ s}}$$



Problema IX-24-2.ª

4) En este caso:

$$\Sigma F = M'a' \Rightarrow M'g - T' = M'a' \Rightarrow T' = M'(g - a')$$

y como:

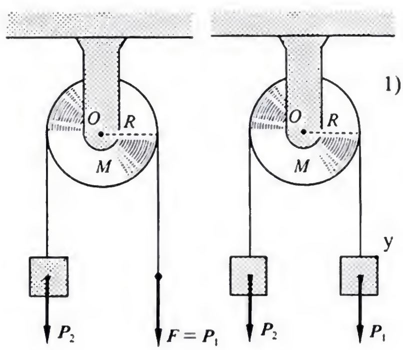
$$\left.\begin{aligned} N' &= I\alpha' \\ N &= TR \\ I &= \frac{1}{2} MR^2 \\ a' &= \alpha' R \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad M'(g - a')R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a'}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a' = g \frac{2M'}{M + 2M'} = 9{,}8 \frac{2 \times 10}{20 + 2 \times 10} = 4{,}9 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{s' = \frac{1}{2} a't'^2 = \frac{1}{2} 4{,}9 \times 9 = 22{,}05 \text{ m}}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \alpha' t'^2 \\ \varphi &= 40\pi \text{ rad} \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad \boxed{t' = \sqrt{\frac{2\varphi}{\alpha'}} = \sqrt{\frac{2\varphi R}{a'}} = \sqrt{\frac{2 \times 40\pi 0{,}05}{4{,}9}} = 1{,}6 \text{ s}}$$

Problema 25. En los sistemas representados en la figura el peso de los cables es despreciable. La polea es un cilindro macizo de 5 kg de masa. $P_1 = F = 20$ kp y $P_2 = 16$ kp. Determinar las aceleraciones de ambos sistemas y las tensiones de cada uno de los ramales del cable.



Problema IX-25

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} P_1 - T_1 = M_1 a \quad &\Rightarrow \quad T_1 = M_1 g - M_1 a \\ T_2 - P_2 = M_2 a \quad &\Rightarrow \quad T_2 = M_2 g + M_2 a \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = (M_1 - M_2)g - (M_1 + M_2)a$$

y como:

$$\left.\begin{aligned} N &= (T_1 - T_2)R = I\alpha \\ I &= \frac{1}{2} MR^2 \\ a &= \alpha R \end{aligned}\right| \quad [(M_1 - M_2)g - (M_1 + M_2)a]R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow$$

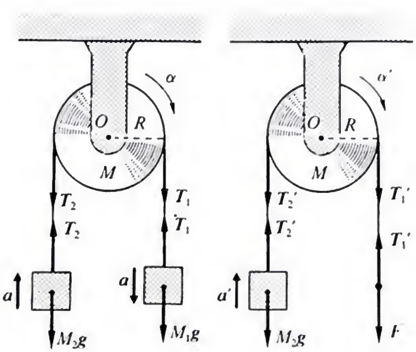
$$\boxed{a = g \frac{2(M_1 - M_2)}{M + 2(M_1 + M_2)} = 9{,}8 \frac{2 \times 4}{3 + 2 \times 36} \simeq 1 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{T_1 = M_1(g - a) = 20(9{,}8 - 1) = 176 \text{ N}}$$

$$\boxed{T_2 = M_2(g + a) = 16(9{,}8 + 1) = 172{,}8 \text{ N}}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} T'_1 &= F \\ T'_2 - P_2 &= M_2 a' \quad \Rightarrow \quad T_2 = M_2 g + M_2 a' \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad T'_1 - T'_2 = F - M_2 g - M_2 a'$$



Problema IX-25-1.

y como:

$$\left.\begin{aligned} N' &= (T'_1 - T'_2)R = I\alpha' \\ I &= \frac{1}{2} MR^2 \\ a' &= \alpha' R \end{aligned}\right| \Rightarrow \quad (F - M_2 g - M_2 a')R = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a'}{R} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a' = \frac{2(F - M_2 g)}{M + 2M_2} = \frac{2 \times 9{,}8(20 - 16)}{3 + 2 \times 16} = 2{,}24 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{T'_1 = F = 20 \text{ kp} = 196 \text{ N}}$$

$$\boxed{T'_2 = M_2(g + a) = 16(9{,}8 + 2{,}24) = 192{,}6 \text{ N}}$$

Problema 26. Dos poleas cuyos radios son 1 m y 0,3 m están acopladas, es decir, pegadas la una a la otra, formando un bloque que gira alrededor de su eje central horizontal. De la garganta de la polea grande pende un peso de 20 kg, y de la garganta de la polea pequeña pende otro de 100 kg que tiende a hacer girar a las poleas en sentido contrario al anterior. El momento de inercia del sistema formado por las dos poleas acopladas es de 10 kg · m^2. Al dejar al sistema en libertad se pone espontáneamente en movimiento. Se pide:

1. ¿En qué sentido se mueven las poleas?
2. Valor de la aceleración con que se mueve cada peso.
3. Valor de la aceleración angular de las poleas.
4. Tensión de la cuerda que sostiene el peso de 100 kg cuando el sistema está en movimiento.

Solución

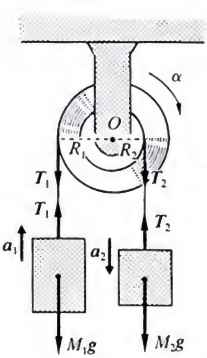
1) Los momentos de los pares que actúan en el instante de dejar al sistema en libertad son:

$$R_1 M_1 g = 20 \text{ kp} \cdot \text{m} \qquad R_2 M_2 g = 0{,}3 \times 100 = 30 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

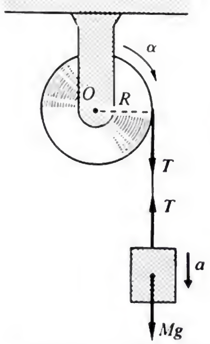
La polea se mueve en el sentido de giro que corresponde a este último.

2), 3) y 4)

$$\left.\begin{aligned} M_2 g - T_2 = M_2 a_2 \quad &\Rightarrow \quad T_2 = M_2 g - M_2 a_2 \\ T_1 - M_1 g = M_1 a_1 \quad &\Rightarrow \quad T_1 = M_1 g + M_1 a_1 \\ N = N_2 - N_1 &= T_2 R_2 - T_1 R_1 = I\alpha \\ a_1 &= \alpha R_1 \\ a_2 &= \alpha R_2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left| \begin{gathered} M_2 g R_2 - M_2 \alpha R_2^2 - M_1 g R_1 - M_1 \alpha R_1^2 = I\alpha \\ \boxed{\alpha = g \frac{M_2 R_2 - M_1 R_1}{I + M_1 R_1^2 + M_2 R_2^2} = 2{,}5 \text{ rad/s}^2} \\ \boxed{a_1 = \alpha R_1 = 0{,}75 \text{ m/s}^2} \\ \boxed{a_2 = \alpha R_2 = 2{,}5 \text{ m/s}^2} \\ \boxed{T_2 = M_2(g - a_2) = \frac{100}{9{,}8}(9{,}8 - 2{,}5) = 74{,}5 \text{ kp}} \end{gathered}\right.$$



Problema IX-26



Problema IX-27-1.ª

Problema 27. Un volante de 50 cm de radio gira por la acción de un peso de 4 kg que cuelga verticalmente del extremo de una cuerda arrollada a su eje. El momento de inercia del volante es de 9 kg · m^2. Al dejar el sistema en libertad se pone espontáneamente en movimiento. Determinar:

1. La velocidad adquirida por el sistema al cabo de 2 s de empezar a moverse.

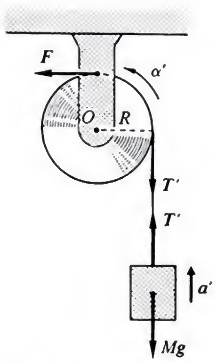
2. La fuerza que tendrá que desarrollar un freno aplicada a la periferia del volante para parar el sistema en 1 s, empezando a actuar dicho freno al transcurrir el tiempo citado en el apartado anterior.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} Mg - T = Ma \\ N = I\alpha = TR \\ a = \alpha R \end{array}\right| \Rightarrow (Mg - Ma)R = I\frac{a}{R} \Rightarrow a = g\frac{MR^2}{I + MR^2} = 10\frac{4 \times 0{,}5^2}{9 + 4 \times 0{,}5^2} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{v = at = 2 \text{ m/s}}$$



Problema IX-27-2.ª

2) En la figura:

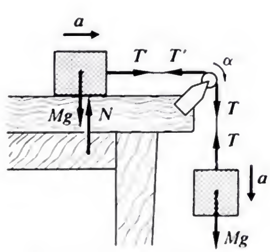
$$\left.\begin{array}{l} T' - Mg = Ma' \\ N = I\alpha' \\ N = (F - T')R \\ a' = \dfrac{v}{t'} = 2 \text{ m/s}^2 \\ a' = \alpha' R \end{array}\right| \quad (F - Mg - Ma')R = I\frac{a'}{R} \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{Iv}{R^2 t'} + \frac{Mv}{t'} + Mg = \frac{9 \times 2}{0{,}5^2\ 1} + \frac{4 \times 2}{1} + 4 \times 10 = 120 \text{ N}}$$

Problema 28. Sobre una mesa horizontal descansa un cuerpo de 1 kg. Una cuerda sujeta a él pasa por la garganta de una polea, y se cuelga de su otro extremo otra masa de 1 kg. El primer cuerpo desliza sobre la mesa sin rozamiento y el segundo cae verticalmente. Realizando medidas de espacios y tiempos, deducimos que la aceleración del sistema es de 3,9 m/s^2. Calcular la masa de la polea. Supuesto cilindro macizo de 10 cm de diámetro, determinar su momento de inercia y su radio de giro. ¿Cómo se modifican estos resultados si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y la mesa es 0,1?

Solución

1)



Problema IX-2ꝯ-1.ª

$$N = (T - T')R = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2}M_pR^2$$

$$a = \alpha R$$

Aplicando la primera ecuación del movimiento a los dos cuerpos del sistema:

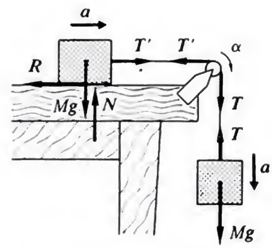
$$\left.\begin{array}{l} Mg - T = Ma \Rightarrow T = M(g - a) \\ T' = Ma \end{array}\right| \; T - T' = M(g - 2a)$$

luego:

$$M(g-2a)R = \frac{1}{2} M_p R^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_p = M\frac{2(g-2a)}{a} = \frac{2(9{,}8 - 2 \times 3{,}9)}{3{,}9} \simeq 1 \text{ kg}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} M_p R^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}10}{2}\right)^2 = 1{,}25 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$I = M_P K_0^2 \Rightarrow \boxed{K_0 = \sqrt{\frac{I}{M_P}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \text{ cm}}$$



Problema IX-28-2.ª

2) Teniendo en cuenta que el valor de la fuerza de rozamiento es:

$$\mu N = \mu Mg$$

la primera ecuación del movimiento nos da:

$$\left.\begin{array}{l} Mg - T = Ma \quad \Rightarrow \quad T = M(g-a) \\ T' - \mu Mg = Ma \quad \Rightarrow \quad T' = M(\mu g + a) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad T - T' = M[g(1-\mu) - 2a]$$

y tendremos:

$$M[g(1-\mu) - 2a]R = \frac{1}{2} M_p R^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow$$

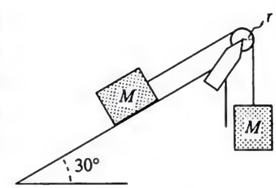
$$\boxed{M_p = M\frac{2[g(1-\mu) - 2a]}{a} = \frac{2[9{,}8(1-0{,}1) - 2 \times 3{,}9]}{3{,}9} = 0{,}5 \text{ kg}}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} 0{,}5 \left(\frac{0{,}1}{2}\right)^2 = 6{,}5 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

el radio de giro sigue siendo el mismo.

Problema 29. En el extremo superior de un plano inclinado 30° hay una polea de 2 kg de masa formada por un cilindro macizo, por cuya garganta pasa un cordón inextensible y sin peso apreciable. Uno de los ramales del cordón sostiene un peso de 10 kg, el otro se mantiene paralelo al plano inclinado y tiene atado en su extremo un cuerpo que pesa 10 kg. Si no existe rozamiento entre el cuerpo y el plano, calcular:

1. La aceleración del sistema.
2. Las tensiones de los dos ramales del cordón.
3. ¿Cómo se modifican los anteriores resultados si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,3?



Problema IX-29

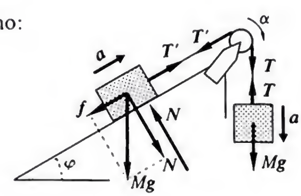
Solución

1) Si no existe rozamiento, como los momentos de los pares que actúan en el momento de dejar el sistema en libertad verifican:

$$Mgr > fr \quad \Leftrightarrow \quad Mg > Mg\,\text{sen}\,\varphi \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \text{sen}\,\varphi$$

condición que nos da como sentido del movimiento el indicado en la figura; y como:

$$Mg - T = Ma \quad \Rightarrow \quad T = Mg - Ma$$
$$T' - f = Ma \quad \Rightarrow \quad T' = Mg\,\text{sen}\,\varphi + Ma$$
$$N = (T - T')r = I\alpha$$
$$a = \alpha r$$
$$I = \frac{1}{2} mr^2$$



Problema IX-29-1.ª

sustituyendo:

$$[Mg(1 - \text{sen}\varphi) - 2Ma]r = \frac{1}{2} mr^2 \frac{a}{r} \quad \Rightarrow$$

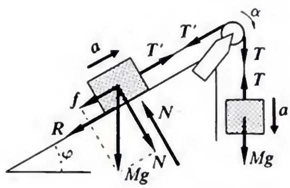
$$\boxed{a = g\,\frac{2M(1 - \text{sen}\varphi)}{m + 4M} = 9{,}8\,\frac{2 \times 10(1 - \text{sen}\,30)}{2 + 4 \times 10} \simeq 2{,}33 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{T = M(g - a) = 10(9{,}8 - 2{,}33) = 74{,}7 \text{ N}}$$

$$\boxed{T' = M(g\text{sen}\varphi + a) = 10(9{,}8 \times 0{,}5 + 2{,}33) = 72{,}3 \text{ N}}$$

3) En este caso, como los momentos de los pares que actúan en el momento de dejar el sistema en libertad verifican:



Problema IX-29-2.ª

$$Mgr > (f + R)r \quad \Leftrightarrow \quad Mgr > Mg(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)r \quad \Leftrightarrow \quad 1 > \text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi$$

puesto que:

$$1 > 0{,}5 + 0{,}3\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

condición que nos da como sentido del movimiento el indicado en la figura; y como:

$$Mg - T = Ma \quad \Rightarrow \quad T = Mg - Ma$$

$$T' - f - R = Ma \quad \Rightarrow \quad T' = Mg(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi) + Ma$$

$$N = (T - T')r = I\alpha$$

$$a = \alpha r$$

$$I = \frac{1}{2} mr^2$$

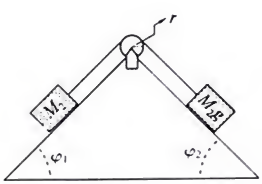
sustituyendo:

$$[Mg(1 - \text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) - 2Ma]r = \frac{1}{2}.mr^2 \frac{a}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a = g\,\frac{2M(1 - \text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{m + 4M} = 9{,}8\,\frac{2 \times 10\left(1 - 0{,}5 - 0{,}3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 + 4 \times 10} = 1{,}12 \text{ m/s}^2}$$

$$\boxed{T = M(g - a) = 10(9{,}8 - 1{,}12) = 87 \text{ N}}$$

$$\boxed{T' = M[g(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi) + a] = 10\left[9{,}8\left(0{,}5 + 0{,}3\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1{,}12\right] = 84 \text{ N}}$$



Problema IX-30

Problema 30. Sobre un plano inclinado φ_1 se tiene un cuerpo de masa M_1 que está unido por una cuerda (que supondremos inextensible y sin peso apreciable) que pasa por una polea de masa M con otro cuerpo de masa M_2, que se apoya en un plano inclinado φ_2. Si el coeficiente de rozamiento entre M_1 y el plano en que está apoyado es μ_1 y el de M_2 respecto al suyo es μ_2:

1. Determinar las condiciones del movimiento en uno u otro sentido.

2. En el caso en que el sistema se mueva con aceleración, calcular ésta.

Solución

En las figuras deducimos:

$$f_1 = M_1 g\text{sen}\varphi_1 \qquad R_1 = \mu_1 M_1 g\cos\varphi_1$$

$$f_2 = M_2 g\text{sen}\varphi_2 \qquad R_2 = \mu_2 M_2 g\cos\varphi_2$$

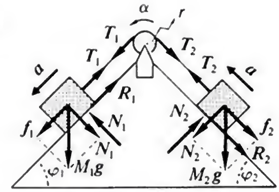
1) Puede ocurrir (fig. 1.ª):

a) Si los momentos de los pares que actúan en el instante de dejar el sistema en libertad verifican:

$$T_1 r \geqslant T_2 r \quad \Rightarrow \quad (f_1 - R_1) r \geqslant (f_2 + R_2) r \quad \Rightarrow$$

$$M_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - \mu_1 M_1 \cos\varphi_1 \geqslant M_2 \operatorname{sen}\varphi_2 + \mu_2 M_2 \cos\varphi_2$$

Cuando es >, el sistema se mueve hacia la derecha con movimiento acelerado. Cuando es =, el sistema está en equilibrio.



Problema IX-30-1.ª

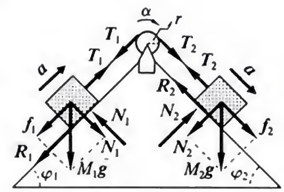
b) Si (fig. 2.ª):

$$T_2 r \geqslant T_1 r \quad \Rightarrow \quad (f_2 - R_2) r \geqslant (f_1 + R_1) r \quad \Rightarrow$$

$$M_2 \operatorname{sen}\varphi_2 - \mu_2 M_2 \cos\varphi_2 \geqslant M_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \mu_1 M_1 \cos\varphi_1$$

Cuando es >, el sistema se mueve hacia la derecha con movimiento acelerado. Cuando es =, el sistema está en equilibrio.

c) En caso de no verificarse ninguna de las dos condiciones anteriores, el sistema se encuentra en reposo.



Problema IX-30-2.ª

2) En el caso en que se verifique la condición a) y el movimiento sea acelerado, entonces:

$$f_1 - R_1 - T_1 = M_1 a \quad \Rightarrow \quad T_1 = M_1 g(\operatorname{sen}\varphi_1 - \mu_1 \cos\varphi_1) - M_1 a$$

$$T_2 - f_2 - R_2 = M_2 a \quad \Rightarrow \quad T_2 = M_2 g(\operatorname{sen}\varphi_2 + \mu_2 \cos\varphi_2) + M_2 a$$

y como:

$$N = (T_1 - T_2) r = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2} M r^2$$

$$a = \alpha r$$

sustituyendo:

$$[M_1 g(\operatorname{sen}\varphi_1 - \mu_1 \cos\varphi_1) - M_2 g(\operatorname{sen}\varphi_2 + \mu_2 \cos\varphi_2) - (M_1 + M_2) a] r = \frac{1}{2} M r^2 \frac{a}{r}$$

$$\boxed{a = 2g \, \frac{M_1(\operatorname{sen}\varphi_1 - \mu_1 \cos\varphi_1) - M_2(\operatorname{sen}\varphi_2 + \mu_2 \cos\varphi_2)}{M + 2(M_1 + M_2)}}$$

En el caso en que se verifique la condición b) y el movimiento sea acelerado, entonces:

$$f_2 - R_2 - T_2 = M_2 a \quad \Rightarrow \quad T_2 = M_2 g(\operatorname{sen}\varphi_2 - \mu_2 \cos\varphi_2) - M_2 a$$

$$T_1 - f_1 - R_1 = M_1 a \quad \Rightarrow \quad T_1 = M_1 g(\operatorname{sen}\varphi_1 + \mu_1 \cos\varphi_1) + M_1 a$$

y como:

$$N = (T_2 - T_1) r = I\alpha$$

$$I = \frac{1}{2} M r^2$$

$$a = \alpha r$$

sustituyendo:

$$[M_2 g(\operatorname{sen}\varphi_2 - \mu_2 \cos\varphi_2) - M_1 g(\operatorname{sen}\varphi_1 + \mu_1 \cos\varphi_1) - (M_1 + M_2) a] r = \frac{1}{2} M r^2 \frac{a}{r}$$

$$\boxed{a = 2g \, \frac{M_2(\operatorname{sen}\varphi_2 - \mu_2 \cos\varphi_2) - M_1(\operatorname{sen}\varphi_1 + \mu_1 \cos\varphi_1)}{M + 2(M_1 + M_2)}}$$

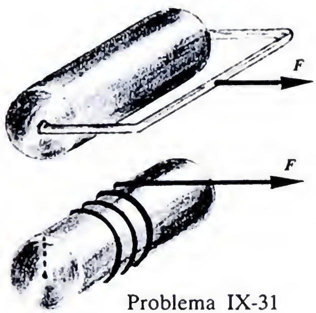
D) DINAMICA DE ROTACION Y TRASLACION DEL SOLIDO RIGIDO

FORMULARIO

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$$



Problema IX-31

Problema 31. Al rodillo de jardín de masa M indicado en la figura se le aplica una fuerza F, de forma que rueda sin deslizar, produciéndole a su centro de masa un movimiento uniformemente acelerado; la fuerza de rozamiento que existe en la superficie de contacto entre el rodillo y el suelo está dirigida en sentido contrario a F. En el caso en que el rodillo es arrastrado mediante una cuerda enrollada alrededor de él, rodando sin deslizamiento, entonces la fuerza de rozamiento está dirigida en el mismo sentido que F.

1. Probar estas afirmaciones y calcular la aceleración del centro de masa en los dos casos.

2. ¿A qué distancia del centro del rodillo habría que aplicar la fuerza horizontal para que al rodar sin deslizar la fuerza de rozamiento fuera nula?

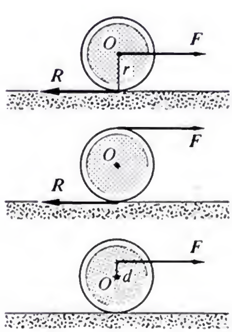
Solución

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{N} = \frac{d\boldsymbol{J}}{dt}$$

1) En el dibujo tomamos la fuerza R en sentido contrario a F; si esto no es así, nos tendrá que salir con signo negativo al resolver las ecuaciones que deben cumplirse en la rodadura sin deslizamiento; en este caso:

$$\begin{array}{l|l}
F - R = Ma & Rr = I\alpha = \dfrac{1}{2} Mr^2 \dfrac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{1}{2} Ma \\
Rr = I\alpha & F = R + Ma = \dfrac{3}{2} Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \dfrac{2}{3} \dfrac{F}{M}} \\
a = \alpha r & \\
0 < R \leqslant R_{\text{máximo}} & R = \dfrac{1}{3} F
\end{array}$$



Problema IX-31-1.ª

esta última ecuación nos demuestra que R está bien dibujada y va dirigida en sentido contrario a F.

Hemos dibujado R en sentido contrario a F; si es verdad la afirmación del enunciado, ésta nos tendrá que dar negativa al resolver las ecuaciones que deben de cumplirse en la rodadura sin delizamiento, que en este caso son:

$$\left.\begin{array}{l} F - R = Ma \\ Fr + Rr = I\alpha \\ a = \alpha r \\ 0 \leqslant R \leqslant R_{\text{máximo}} \end{array}\right| \quad Fr + Rr = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} F + R = \frac{1}{2} Ma \\ F - R = Ma \end{array}\right| \begin{array}{l} 2F = \frac{3}{2} Ma \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{4} Ma \\ \boxed{a = \frac{4}{3} \frac{F}{M}} \end{array}$$

$$2R = \frac{1}{2} Ma - Ma = -\frac{1}{2} Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = -\frac{1}{4} Ma = -\frac{1}{3} F}$$

esta última ecuación nos demuestra que R está mal en el dibujo y tiene que ir en el mismo sentido que F.

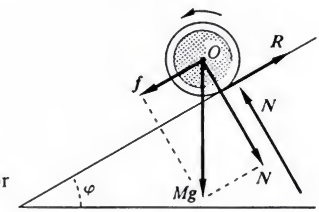
2) Si no existe rozamiento, las ecuaciones que se tienen que cumplir son:

$$\left.\begin{array}{l} F = Ma \\ Fd = I\alpha \\ a = \alpha r \end{array}\right| \quad Mad = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{1}{2} r}$$

Al aplicar por debajo de este punto la fuerza F, la fuerza de rozamiento correspondiente tiene dirección contraria a F. Si la aplicación de F es por encima de este punto, la correspondiente fuerza de rozamiento irá en el mismo sentido que F.

Problema 32. Establecer las ecuaciones que deben de cumplirse para el caso de un cuerpo que rueda sin deslizar a lo largo de un plano inclinado un ángulo φ.

Solución



Problema IX-32

Las ecuaciones que determinan el movimiento del cuerpo son:

$$f - R = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma}$$

(a = aceleración del centro de gravedad.)

El par productor de la rotación es el que corresponde a la fuerza R (el valor de R no tiene por qué ser el máximo, μN); por tanto:

$$N = I\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{Rr = I\alpha}$$

y, por último:

$$\boxed{a = \alpha r}$$

En el caso de existencia de par de resistencia a la rodadura, la ecuación sería:

$$\boxed{Rr - \rho Mg\cos\varphi = I\alpha}$$

siendo ρ el coeficiente de resistencia a la rodadura.

Problema 33. Estudiar las características del movimiento de un cilindro macizo y homogéneo que rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo φ.

Solución

Las ecuaciones que determinan el movimiento (problema anterior) son:

$$\boxed{\begin{array}{l} Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \\ Rr = I\alpha \\ a = \alpha r \end{array}}$$

con lo que, sustituyendo en la segunda el valor de I y de α dado en la tercera, obtenemos:

$$Rr = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{2} Ma$$

que, sustituida en la primera, da:

$$Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{1}{2} Ma = Ma \quad \Rightarrow \quad g\,\mathrm{sen}\,\varphi = \frac{3}{2} a \quad \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3} g\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

El valor de R (insistimos que no tiene por qué ser el máximo, μN) es:

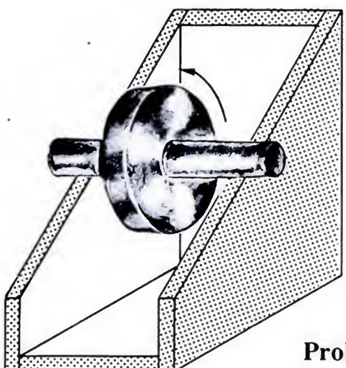
$$R = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{3} Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

La aceleración angular es:

$$\boxed{\alpha = \frac{a}{r} = \frac{2}{3} \frac{g\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r}}$$

quedando determinadas las características del movimiento.

Problema 34. ¿Qué condición debe cumplir el ángulo de inclinación de un plano para que un cilindro macizo y homogéneo ruede por él sin deslizar?



Problema IX-35

Solución

Como:

$$R \leqslant \mu N$$

sustituyendo los valores de R (problema anterior) y de $N = Mg\cos\varphi$, obtenemos:

$$\frac{1}{3} Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \leqslant \mu Mg\cos\varphi \quad \Rightarrow \boxed{\mathrm{tag}\,\varphi \leqslant 3\mu}$$

expresión que nos determina la condición pedida.

Problema 35. Un volante de la forma indicada en la figura rueda sin deslizar sobre unos carriles paralelos. La masa del volante (incluido su eje) es 200 kg y el diámetro del eje 1 cm; la pendiente de las guías es el 10 % (100 m de recorrido para cada 10 m de descenso). Partiendo del reposo, se observa que recorre el primer metro en 3 s. Calcular:

1. El valor del rozamiento en el descenso.
2. Su momento de inercia.
3. Su radio de giro.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} f - R = Ma \\[2ex] f = Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi \\[2ex] l = \dfrac{1}{2} at^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} Mg\,\mathrm{sen}\,\varphi - R = M \dfrac{2l}{t^2} \\[2ex] \boxed{R = M\left[g\,\mathrm{sen}\,\varphi - \dfrac{2l}{t^2}\right] = 200\left[10\,\dfrac{10}{100} - \dfrac{2}{9}\right] = \dfrac{1\,400}{9}\ \mathrm{N}} \end{array}$$

2)

$$Rr = I\alpha \qquad a = \alpha r \qquad l = \frac{1}{2}at^2$$

$$Rr = I\frac{a}{r} = I\frac{2l}{t^2 r}$$

$$\boxed{I = \frac{Rrt^2}{2l} = \frac{1\,400 \times 25 \times 10^{-6} \times 9}{9 \times 2} = 175 \times 10^{-4}\ \mathrm{kg \cdot m^2}}$$

3)

$$I = MK_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_0 = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{175 \times 10^{-4}}{200}} = 9{,}35 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}$$

Problema 36. **1.** ¿Cuál es la condición que debe cumplir el ángulo de un plano inclinado para que un aro homogéneo ruede sin deslizar?
2. Realizar el mismo estudio para una esfera maciza y homogénea.
3. Calcular la aceleración del centro de gravedad para los anteriores casos.
4. El aro o la esfera ruedan y deslizan por un plano de ángulo de inclinación φ, con respecto a la horizontal. Determinar la aceleración del centro de masa y la aceleración angular de giro.

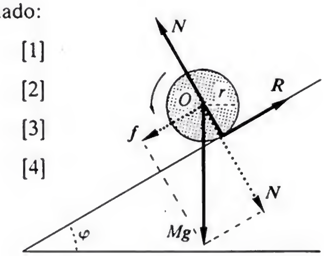
Solución

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\mathbf{a}$$

$$\mathbf{N} = \Sigma \mathbf{N}_i = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

1) Las ecuaciones que se cumplen para rodar sin deslizar a lo largo de un plano inclinado:



Problema IX-36

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \qquad [1]$$

$$Rr = I\alpha \qquad [2]$$

$$a = \alpha r \qquad [3]$$

$$0 < R \leqslant R_{\text{máx}} \qquad [4]$$

a) Estas ecuaciones referidas a un aro nos quedan:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \quad [1] \qquad Rr = Mr^2\frac{a}{r} \quad [2] \text{ y } [3] \qquad R = Ma = \frac{Mg\operatorname{sen}\varphi}{2}$$

$$\frac{Mg\operatorname{sen}\varphi}{2} \leqslant \mu Mg\cos\varphi \quad [4] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tag}\varphi \leqslant 2\mu}$$

2) Ecuaciones referidas a una esfera maciza y homogénea:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \quad [1] \qquad Rr = \frac{2}{5}Mr^2\frac{a}{r} \quad [2] \text{ y } [3] \qquad R = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{7}Mg\operatorname{sen}\varphi$$

$$\frac{2}{7}Mg\operatorname{sen}\varphi \leqslant \mu Mg\cos\varphi \quad [4] \qquad \boxed{\operatorname{tag}\varphi \leqslant \frac{7}{2}\mu}$$

3) Aceleración del aro:

$$\boxed{a = \frac{R}{M} = \frac{1}{2} g\operatorname{sen}\varphi}$$

Aceleración de la esfera:

$$\boxed{a = \frac{5}{2}\,\frac{R}{M} = \frac{5}{7} g\operatorname{sen}\varphi}$$

4) Las ecuaciones que se cumplen para rodar deslizando a lo largo del plano inclinado son:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \qquad [1]$$

$$Rr = I\alpha \qquad [2]$$

$$a \neq \alpha r \qquad [3]$$

$$R = \mu Mg\cos\varphi \qquad [4]$$

Referidas a un aro y a una esfera son:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - \mu Mg\cos\varphi = Ma \quad [1] \text{ y } [4] \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}$$

[2] y [3]

Para un aro: $\mu Mgr\cos\varphi = Mr^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{g}{r}\mu\cos\varphi}$

Para una esfera: $\mu Mgr\cos\varphi = \frac{2}{5} Mr^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{5}{2}\,\frac{g}{r}\,\mu\cos\varphi}$

Problema 37. Un cilindro macizo y homogéneo rueda y desliza a lo largo de un plano inclinado. Determinar la aceleración del CM y la aceleración angular de giro.

Solución

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = M\mathbf{a}$$

$$\mathbf{N} = \Sigma \mathbf{N}_i = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$$

de la primera:

$$f - R = Ma \quad \Rightarrow \quad Mg\operatorname{sen}\varphi - R = Ma \qquad [1]$$

a: aceleración del centro de masa. Además, el par productor de la rotación es el que corresponde a la fuerza R, que en este caso es máxima; luego:

$$N = I\alpha \quad \Rightarrow \quad Rr = I\alpha \qquad [2]$$

$$R = \mu Mg\cos\varphi$$

sustituyendo R en [1] y [2], nos queda:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi - \mu Mg\cos\varphi = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}$$

$$\mu Mgr\cos\varphi = \frac{1}{2} Mr^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{2\mu g\cos\varphi}{r}}$$

Problema 38. Supuesto el siguiente modelo: a) La Tierra gira alrededor del Sol en órbita circular de radio $R = 1{,}495 \times 10^8$ km y tarda $T = 365{,}25$ d en dar una vuelta. b) La Tierra es perfectamente esférica, de radio $R_0 = 6\,370$ km y masa $M_0 = 5{,}976 \times 10^{24}$ kg. c) La Tierra tarda $T' = 24$ h en dar una vuelta alrededor de su eje. d) El plano de la eclíptica (plano de la órbita de la Tierra alrededor del

Sol) y el plano del ecuador forman un ángulo constante $\varepsilon = 23°27'$. Tomando como origen el centro del Sol, calcular:
1. El orbital de la Tierra.
2. El spin.
3. La expresión vectorial del momento angular.

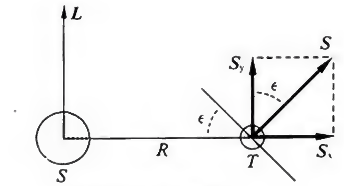
Solución

$$J = R \wedge Mv + \Sigma r_i' \wedge m_i v_i' = L + S$$

1) Por ser R y v perpendiculares, se tiene:

$$L = RM_0 v = M_0 \omega R^2 = \frac{2\pi M_0 R^2}{T}$$

$$\boxed{L = \frac{2\pi 5{,}976 \times 10^{24} \times 1{,}495^2 \times 10^{22}}{365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60} = 2{,}659 \times 10^{40}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}}$$



Problema IX-38

2)

$$S = I\omega = \frac{2}{5} M_0 R_0^2 \frac{2\pi}{T'} = \frac{4\pi M_0 R_0^2}{5T'}$$

$$\boxed{S = \frac{4\pi 5{,}976 \times 10^{24} \times 6{,}37^2 \times 10^{12}}{5 \times 24 \times 60 \times 60} = 7{,}054 \times 10^{33}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}}$$

3)

$$J = J_x i + J_y i$$

$$J_x = S_x = S\operatorname{sen}\varepsilon = 2{,}807 \times 10^{33}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

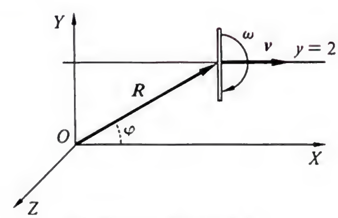
$$J_y = L + S_y = L + S\cos\varepsilon = 2{,}659 \times 10^{40}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

$$\boxed{J = 10^{33}(2{,}807 i + 2{,}659 \times 10^7 j)\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}}$$

Problema 39. **1.** Una varilla homogénea y recta de 1 m de longitud y 4 kg de masa se mueve en el plano XY, de modo que su centro de masa tiene una velocidad de 1 m/s sobre la recta $y = 2$ m en el sentido positivo del eje de las X. La barra gira en el sentido de las agujas de un reloj con una velocidad angular de 6 rad/s. Calcular el vector momento angular respecto al origen de coordenadas. **2.** Si el centro de masa de la varilla se mueve en el plano YZ con la misma velocidad que antes sobre la recta $y = 2$ m y en sentido positivo del eje Z y gira en un plano paralelo al XY con la misma velocidad angular que en el caso anterior, ¿cuál será ahora el vector momento angular?

Solución

$$J = R \wedge Mv + \Sigma r_i' \wedge m_i v_i' = L + S$$



Problema IX-39-1.ª

1)

$$\left.\begin{aligned} L &= |R \wedge Mv| = RMv\operatorname{sen}\varphi \\ y &= R\operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right| \quad L = Mvy = 8\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

El orbital está dirigido en el sentido negativo del eje de las Z (hacia dentro del plano de la figura); luego:

$$\boldsymbol{L} = -\ 8\boldsymbol{k}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

Por otra parte:

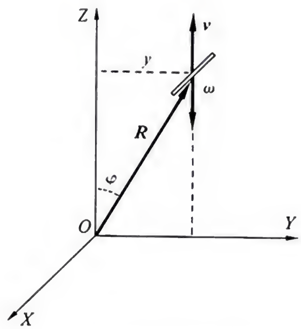
$$S = I\omega = \frac{1}{12}\ Ml^2\omega = \frac{1}{12}\ 4 \times 6 = 2\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

El spin también está dirigido en sentido negativo del eje Z, es decir:

$$\boldsymbol{S} = -\ 2\boldsymbol{k}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

luego nos queda:

$$\boxed{\boldsymbol{J} = -\ 10\boldsymbol{k}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}}$$



Problema IX-39-2.ª

2)

$$\left.\begin{aligned} L &= \boldsymbol{R} \wedge M\boldsymbol{v} = RMv\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y &= R\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{aligned}\right|\quad L = Mvy = 8\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

El orbital está dirigido en el sentido positivo del eje de las X; luego:

$$\boldsymbol{L} = 8\boldsymbol{i}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

Por otra parte:

$$S = I\omega = \frac{1}{12}\ Ml^2\omega = \frac{1}{12}\ 4 \times 6 = 2\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

El spin está dirigido en sentido negativo del eje Z, es decir:

$$\boldsymbol{S} = -\ 2\boldsymbol{k}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}$$

luego nos queda:

$$\boxed{J = 8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}\ \frac{\mathrm{kg \cdot m^2}}{\mathrm{s}}}$$

Capítulo X

ENERGIA - CAMPOS - CAMPO GRAVITATORIO

A) TRABAJO Y POTENCIA

FORMULARIO

TRABAJO:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = Fdr\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \\ d\boldsymbol{r} &= dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} \end{aligned}\right| \quad dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

TRABAJO QUE REALIZA UN MOMENTO DE UN PAR AL HACER GIRAR UN CUERPO ALREDEDOR DE UN EJE:

$$dW = Nd\varphi$$

POTENCIA:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

Problema 1. Para arrastrar un cuerpo de 100 kg por un terreno horizontal se emplea una fuerza constante igual a la décima parte de su peso y formando un ángulo de 45° con la horizontal. Calcular:

1. El trabajo realizado en un recorrido de 100 m.

2. Si este trabajo se ha realizado en 11 min y 49 s, ¿qué potencia se habrá desarrollado?

Solución

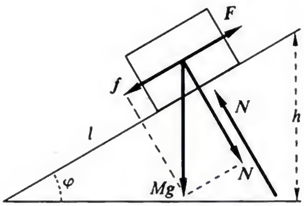
1)

$$F = \frac{Mg}{10} = \frac{100 \times 9{,}8}{10} = 98 \text{ N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = Fs\cos\varphi = 98 \times 100\cos 45° = 6\,929{,}6 \text{ J}}$$

2)

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{6\,929{,}6}{11 \times 60 + 49} = 9{,}8 \text{ W}}$$

Problema 2. Demostrar que el trabajo realizado para elevar un cuerpo una altura h utilizando un plano inclinado sin rozamiento es el mismo que al elevarlo verticalmente a esa altura.



Problema X-2

Solución

En efecto: si utilizamos el plano:

$$\left.\begin{array}{l} W = Fl \\ F = f = Mg\,\mathrm{sen}\varphi \\ l\,\mathrm{sen}\varphi = h \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = Mgl\,\mathrm{sen}\varphi = Mgh}$$

Si la elevación es vertical:

$$\left.\begin{array}{l} W = Ph \\ P = Mg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = Mgh}$$

«El trabajo realizado al subir un cuerpo una altura h es Mgh» (energía potencial de gravitación para pequeñas variaciones de h).

Problema 3. Calcular el trabajo que hay que realizar al estirar un resorte una longitud x. La constante recuperadora es K.

Solución

La fuerza a vencer es $F = Kx$ (igual y de signo contrario a la reacción del resorte $-Kx$). El trabajo realizado es:

$$\boxed{W = \int_0^x Kxdx = \frac{1}{2}Kx^2}$$

lo que nos mide, también la energía potencial acumulada en el resorte.

Problema 4. Queremos elevar a 90 m de altura un caudal de agua de 500 l/s. Calcular la potencia que precisa tener el motor que realiza esta operación.

Solución

500 l/s equivalen a: $\frac{M}{t} = 500$ kg/s $\Rightarrow$ $\boxed{P = \frac{Mgh}{t} = \frac{500 \times 90}{75}\ \mathrm{CV} = 600\ \mathrm{CV}}$

Problema 5. Una motobomba eleva 500 m^3 de agua a un depósito situado a 50 m de altura en 1 h. Si el rendimiento de la motobomba es del 80 %, calcular:
1. Trabajo realizado por la motobomba.
2. El costo de la operación si el kW · h cuesta 6 ptas.
3. La potencia útil y motor del aparato.

Solución

$$V = 500\ \mathrm{m^3\ de\ H_2O} \quad \Leftrightarrow \quad M = 5 \times 10^5\ \mathrm{kg}$$

$$\eta = 0.8$$

1)

$$\boxed{W_u = Mgh = 5 \times 10^5 \times 9{,}8 \times 50 \text{ J} = 68 \text{ kW} \cdot \text{h}}$$

2)

$$r = \frac{W_u}{W_m} \quad \Rightarrow \quad W_m = \frac{W_u}{r} = \frac{68}{0{,}8} = 85 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 85 \times 6 = 510 \text{ ptas}}$$

3)

$$\boxed{P_u = \frac{Mgh}{t} = 68 \text{ kW}} \qquad \boxed{P_m = \frac{Mgh}{tr} = 85 \text{ kW}}$$

Problema 6. Calcular la fuerza que se opone al movimiento de un coche que desarrolla una potencia de 20 CV cuando va a 72 km/h en carretera horizontal.

Solución

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{P}{v} = \frac{20 \times 75 \times 3\,600}{72\,000} = 75 \text{ kp}}$$

Problema 7. Calcular el momento que produce un motor de 50 CV cuando gira a 3 600 rpm.

Solución

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Nd\varphi}{dt} \quad \Rightarrow \quad P = N\omega = N2\pi\nu \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = \frac{P}{2\pi\nu} = \frac{50 \times 75 \times 60}{2\pi 3\,600} \simeq 10 \text{ kp} \cdot \text{m}}$$

Problema 8. Se quiere subir un cuerpo de 1 000 kg por un plano inclinado 30°, siendo el coeficiente de rozamiento 0,2.

1. ¿Cuánto vale la fuerza necesaria paralela al plano para arrastrar el cuerpo con velocidad uniforme?

2. Se abandona el cuerpo en lo alto del plano inclinado, ¿cuánto vale la aceleración de caída?

3. Si se quiere que el descenso sea uniforme, ¿qué fuerza de frenado habrá que aplicar al cuerpo?

4. Si la velocidad uniforme alcanzada en la caída es de 10 km/h, ¿qué potencia desarrolla la fuerza de freno?

Solución

1)

$$F = Mg\,\text{sen}\varphi + \mu Mg\cos\varphi = \frac{1\,000}{9{,}8}\,9{,}8\left(\frac{1}{2} + 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 673{,}2 \text{ kp}$$

2)

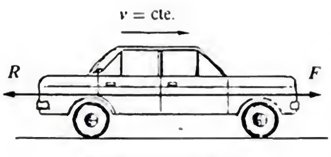
$$a = g(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) = 3{,}2 \text{ m/s}^2$$

3)

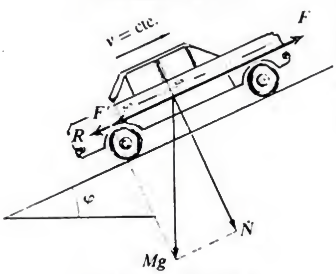
$$F = Mg\,\text{sen}\varphi - \mu Mg\cos\varphi = 320\ \text{kp}$$

4)

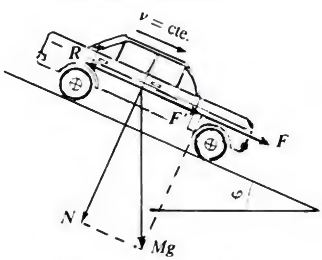
$$P = \frac{W}{t} = Fv = 320\,\frac{10\,000}{3\,600}\,\frac{1}{75} = 12\ \text{CV}$$



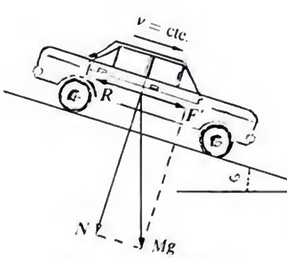
Problema X-9-1.ª



Problema X-9-2.ª



Problema X-9-3.ª



Problema X-9-4.ª

Problema 9. Suponiendo que un automóvil de 750 kg de peso necesite una potencia de 20 CV para mantener una velocidad constante de 60 km/h por una carretera horizontal, calcular:

1. El valor de la suma de todas las resistencias que se oponen al movimiento.

2. La potencia necesaria para que el automóvil suba a 60 km/h una pendiente de 10 %, es decir 10 m de ascenso por cada 100 m de recorrido. Se supone que las resistencias por rozamiento son las mismas que en 1.

3. La potencia necesaria para que baje una pendiente del 5 % a igual velocidad (60 km/h).

4. La pendiente que permitirá bajar a la velocidad de 60 km/h al mismo coche sin que funcione el motor.

Solución

$$v = \frac{50}{3}\ \text{m/s}$$

1)

$$\left.\begin{aligned} P &= Fv \\ F &= R \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{R = \frac{P}{v} = \frac{20 \times 75 \times 3}{50} = 90\ \text{kp}}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} P &= Fv \\ F &= F' + R \\ F' &= Mg\,\text{sen}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{P = (Mg\,\text{sen}\varphi + R)v = \left(750\,\frac{10}{100} + 90\right)\frac{50}{3 \times 75} = \frac{110}{3}\ \text{CV}}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} P &= Fv \\ F &= R - F' \\ F' &= Mg\,\text{sen}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{P = (R - Mg\,\text{sen}\varphi)v = \left(90 - 750\,\frac{5}{100}\right)\frac{50}{3 \times 75} = \frac{35}{3}\ \text{CV}}$$

4)

$$\left.\begin{aligned} F' &= R \\ F' &= Mg\,\text{sen}\varphi \end{aligned}\right| \Rightarrow Mg\,\text{sen}\varphi = R \Rightarrow \text{sen}\varphi = \frac{R}{Mg} = \frac{90}{750} = 0{,}12 \Rightarrow \boxed{\text{Pendiente es del 12 \%}}$$

Problema 10. Un ciclista que pesa, junto con su bicicleta, 90 kg corre por una carretera. El conjunto de las resistencias pasivas que se oponen a su movimiento viene dado por la fórmula $R = 0{,}4v^2$ en el sistema SI, siendo v la velocidad.

1. Calcular la potencia que debe desarrollar el ciclista para mantener la velocidad de 27 km/h sobre una carretera horizontal.
2. Este ciclista desciende, sin pedalear, una pendiente del 5 % (por cada 100 m de carretera hay un desnivel de 5 m). Demostrar que alcanza una velocidad límite y calcular su valor.

Solución

$$v = \frac{27\,000}{3\,600} = 7{,}5 \text{ m/s}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} F = R \\ P = Fv \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{P = Rv = 0{,}4v^3 = 0{,}4 \times 7{,}5^3 \text{ W} = 168{,}75 \text{ W}}$$

2) La velocidad del ciclista se va haciendo cada vez mayor a medida que transcurre el tiempo, aumentando con ella la resistencia. La velocidad límite se alcanzará en el instante que la resistencia se hace igual a la componente del peso, según la dirección del plano inclinado.

$$Mg\operatorname{sen}\varphi = 0{,}4v_l^2 \Rightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{Mg\operatorname{sen}\varphi}{0{,}4}} = \sqrt{\frac{90 \times 9{,}8 \times 5}{100 \times 0{,}4}} = 10{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 11. El vector de posición de una partícula de 5 kg de masa, expresado en el SI, es: $\boldsymbol{r} = (t^3 - 2)\boldsymbol{i} + (1 - t)\boldsymbol{j} + (3t^2 - 6)\boldsymbol{k}$. Calcular:
1. El momento lineal de la partícula en el instante $t = 2$ s.
2. El momento angular en el mismo instante.
3. El trabajo desarrollado en el tercer segundo.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{v} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 3t^2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k} \\ t = 2 \text{ s} \Rightarrow \boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k} \text{ m/s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{p} = M\boldsymbol{v} = 60\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 60\boldsymbol{k} \text{ N} \cdot \text{s}}$$

2)

$$t = 2 \text{ s} \Rightarrow \boldsymbol{r} = 6\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 6 & -1 & 6 \\ 60 & -5 & 60 \end{vmatrix} = -30\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{k} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

3)

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 6t\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} = 30t\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{k} \text{ N}$$

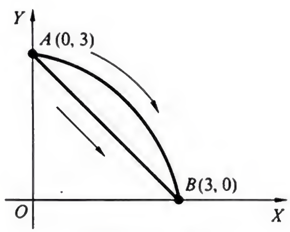
y como:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} = (3t^2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6t\boldsymbol{k})\,dt$$

nos queda:

$$W = \int_2^3 [30t3t^2 + 0 \times (-1) + 30 \times 6t]\,dt = \int_2^3 (90t^3 + 180t)\,dt \Rightarrow \boxed{W = 1\,912{,}5 \text{ J}}$$

Problema 12. Una partícula está sometida a una fuerza $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i}$ N, en la que x e y son las coordenadas del punto del plano en las que se encuentra la partícula en cada instante. Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula del punto A (0, 3) al B (3, 0), estando expresadas estas coordenadas en metros; a lo largo de los siguientes caminos:
1. A lo largo de la recta que los une.
2. A lo largo de un arco de circunferencia de centro el origen de coordenadas y de extremos A y B.



Problema X-12

Solución

1) La ecuación de la recta es:

$$y = 3 - x$$

y como:

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F_x dx + F_y dy = xydx \quad \Rightarrow \quad W_A^B = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,3)}^{(3,0)} xydx$$

nos queda:

$$\boxed{W_A^B = \int_0^3 x(3-x)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 4{,}5 \text{ J}}$$

2)

$$W_A^B = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{(0,3)}^{(3,0)} xydx$$

como la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

sustituyendo, se obtiene:

$$\boxed{W_A^B = \int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^3 -2x(9-x^2)^{1/2}dx = \left[-\frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}\right]_0^3 = 9 \text{ J}}$$

Vemos que el trabajo realizado por la fuerza, que en definitiva nos define un campo de fuerzas, depende de la trayectoria; en consecuencia, dicho campo de fuerzas no es un campo conservativo.

Problema 13. Una partícula está sometida a $\boldsymbol{F} = 6xy\boldsymbol{i} + (3x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}$ N. Calcular el trabajo realizado por tal fuerza al desplazar la partícula del punto O (0, 0) al A (1, 1), estando expresadas estas coordenadas en metros, a lo largo de cada uno de los siguientes caminos:
1. De O a B (1, 0) y de B a A.
2. De O a A a lo largo de la recta $y = x$.
3. De O a A a lo largo de la parábola $y = x^2$.

Solución

$$W_0^A = \int_0^A \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^A (F_x dx + F_y dy)$$

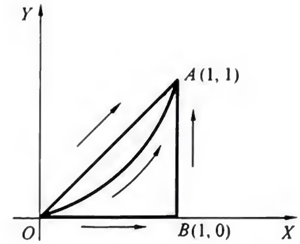
1)

$$W_0^A = W_0^B + W_B^A = \int_0^B (F_x dx + F_y dy) + \int_B^A (F_x dx + F_y dy)$$

La trayectoria de O a B tiene por ecuación $y = 0$; luego:

$$\int_0^B F_x dx = \int_0^1 6xydx = 0$$

$$\int_0^B F_y dy = \int_0^0 (3x^2 - 3y^2)dy = 0$$



Problema X-13

La trayectoria de B a A tiene por ecuación $x = 1$; luego:

$$\int_B^A F_x dx = \int_1^1 6xydx = 0$$

$$\int_B^A F_y dy = \int_0^1 (3x^2 - 3y^2)dy = \int_0^1 (3 - 3y^2)dy = [3y - y^3]_0^1 = 2 \text{ J}$$

por tanto:

$$W_0^A = 2 \text{ J}$$

2) A lo largo de $y = x$ será:

$$W_0^A = \int_0^1 6xydx + \int_0^1 (3x^2 - 3y^2)dy = \int_0^1 6x^2dx = [2x^3]_0^1 = 2 \text{ J}$$

3) A lo largo de $y = x^2$ será:

$$W_0^A = \int_0^1 6xydx + \int_0^1 (3x^2 - 3y^2)dy = \int_0^1 6x^3dx + \int_0^1 (3y - 3y^2)dy =$$

$$= \left[\frac{3x^4}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{3y^2}{2} - y^3\right]_0^1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ J}$$

Vemos que el trabajo realizado por la fuerza, que en definitiva nos define un campo de fuerzas, es independiente de la trayectoria y dependerá únicamente del punto inicial y final; en consecuencia, será un campo conservativo y, por tanto, irrotacional. (Compruébese.)

B) ENERGIA CINETICA

FORMULARIO

ENERGÍA CINÉTICA DE LA PARTÍCULA:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS. ENERGÍA CINÉTICA INTERNA:

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$(M = \Sigma m_i)$$

v: la velocidad del CM.
v_i': la velocidad de la partícula i referida al CM como origen.

$$T_{int} = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE:

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO QUE GIRA ALREDEDOR DE UN EJE QUE PASA POR EL CENTRO DE MASA Y AL MISMO TIEMPO SE TRASLADA:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I_0\omega^2$$

M: masa del sólido.
v: velocidad de CM.
I_0: momento de inercia respecto al eje de giro.

VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE UNA PARTÍCULA CUANDO SOBRE ELLA ACTÚAN FUERZAS EXTERIORES (TEOREMA DE LAS FUERZAS VIVAS):

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2} mv^2\right) \Leftrightarrow W_1^2 = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = T_2 - T_1$$

VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO CUANDO SOBRE ÉL ACTÚAN FUERZAS EXTERNAS:

$$T - T_0 = W_{ext} = \sum_i \int_A^B \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i$$

VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SÓLIDO RÍGIDO EN ROTACIÓN ALREDEDOR DE UN EJE, CUANDO SOBRE ÉL ACTÚAN PARES EXTERNOS:

$$W_{ext} = T - T_0 = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

Problema 14. Calcular la velocidad que sería necesario comunicar a un proyectil de 340 kg para que adquiera una energía cinética igual a la cuarta parte de la que posee un acorazado de 10 000 t que marcha con una velocidad de 18 nudos. Expresar la velocidad del proyectil en el SI, sabiendo que una milla marina corresponde a 1,852 km, y que un nudo es 1 mile/h.

Solución

$$v_2 = 18 \text{ mile/h} = \frac{1\,852 \times 18}{3\,600} \text{ m/s} = 9{,}26 \text{ m/s}$$

$$\frac{1}{2} 340 v_1^2 = \frac{1}{8} 10^7 \times 9{,}26^2 \Rightarrow \boxed{v_1 = 794 \text{ m/s}}$$

Problema 15. Con una honda de 0,75 m de longitud se hace girar una piedra de 250 g a razón de 300 rpm, en un plano horizontal, a 2 m del suelo. Calcúlese:
1. La tensión de la cuerda, supuesta despreciable su masa.
2. La energía cinética de la piedra girando.

3. La velocidad con que sale despedida al soltar uno de los cabos de la honda.
4. El tiempo que tardará en llegar al suelo supuesto horizontal.
5. La distancia a que caerá la piedra.

Solución

1)

$$\text{Tensión} = F_c = M4\pi^2\nu^2 l = \frac{0{,}250}{9{,}8}\, 4\pi^2 25 \times 0{,}75 \simeq 18{,}89 \text{ kp}$$

2)

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M4\pi^2\nu^2 l^2 = 2M\pi^2\nu^2 l^2 = 2\, \frac{0{,}250}{9{,}8}\, \pi^2 25 \times 0{,}75^2 \simeq 7 \text{ kgm}$$

3)

$$v = \omega l = 2\pi\nu l = 2\pi 5 \times 0{,}75 = 23{,}56 \text{ m/s}$$

4)

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{9{,}8}} \simeq 0{,}64 \text{ s}$$

5)

$$x = vt = 23{,}56 \times 0{,}64 = 15 \text{ m}$$

Problema 16. Un sistema está formado por tres partículas de masas $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 5$ kg, que en un instante determinado tienen por velocidades: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ m/s, $\boldsymbol{v}_2 = 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ m/s y $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ m/s. Calcular:
1. La energía cinética del sistema.
2. La energía cinética referida al CM como origen (energía cinética interna).
3. Comprobar que: $T = \frac{1}{2} Mv^2 + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$.

Solución

1)

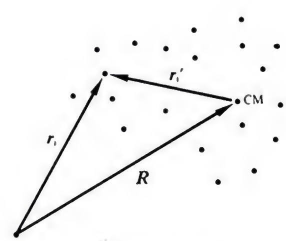
$$\boxed{T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} 2 \times 2 + \frac{1}{2} 3 \times 10 + \frac{1}{2} 5 \times 3 = 24{,}5 \text{ J}}$$

2)

$$\boldsymbol{R} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{\Sigma m_i \boldsymbol{v}_i}{M} = \frac{m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + m_3\boldsymbol{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}7\boldsymbol{i} + 1{,}2\boldsymbol{j} + 0{,}2\boldsymbol{k} \text{ m/s}$$

y como (figura):

$$\boldsymbol{r}_i' = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{R} \Rightarrow \boldsymbol{v}_i' = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \boldsymbol{v}_1' = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v} = \quad 0{,}3\boldsymbol{i} - 2{,}2\boldsymbol{j} - 0{,}2\boldsymbol{k} \text{ m/s} \\ \boldsymbol{v}_2' = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v} = -0{,}7\boldsymbol{i} + 1{,}8\boldsymbol{j} - 1{,}2\boldsymbol{k} \text{ m/s} \\ \boldsymbol{v}_3' = \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v} = \quad 0{,}3\boldsymbol{i} - 0{,}2\boldsymbol{j} + 0{,}8\boldsymbol{k} \text{ m/s} \end{array}\right.$$



Problema X-16

$$\boxed{T_{int} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} 2 \times 4{,}97 + \frac{1}{2} 3 \times 5{,}17 + \frac{1}{2} 5 \times 0{,}77 = 14{,}65 \text{ J}}$$

3) Como:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}10(0{,}7^2 + 1{,}2^2 + 0{,}2^2) = 9{,}85 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Mv^2 + \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2}m_i v_i'^2 = 9{,}85 + 14{,}65 = 24{,}5 \text{ J}$$

Problema 17. Un volante en forma de cilindro sólido, de masa 200 kg y radio 40 cm, gira a razón de 120 rpm. Calcular:
1. La energía cinética del volante.
2. Tiempo que tardará en pararse cuando se le frena, mediante un par de 40 N · m.
3. Número de vueltas que dará hasta pararse, a partir del momento en que comienza el frenado.

Solución

1)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}MR^2 4\pi^2\nu^2 = MR^2\pi^2\nu^2 = 200 \times 0{,}4^2\pi^2 4 = 128\pi^2 \text{ J}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{2\pi\nu}{t} \end{array}\right| \quad N = \frac{1}{2}MR^2\frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{MR^2\pi\nu}{N} = \frac{200 \times 0{,}4^2\pi 2}{40} = 1{,}6\pi \text{ s}}$$

3)

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega t = \pi\nu t \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\nu t}{2} = \frac{2 \times 1{,}6\pi}{2} = 1{,}6\pi \text{ vueltas}}$$

Problema 18. Se tiene un volante, en forma de cilindro sólido, de 1 m de diámetro y 600 kg de peso girando a razón de 500 rpm. Se actúa sobre él para pararlo con un par de valor 20 kp · cm. Calcular:
1. La energía almacenada por el volante cuando gira a su régimen.
2. Qué tiempo tardará en pararse al aplicar el par de frenado.
3. Cuántas revoluciones dará durante el tiempo que tarda en pararse.

Solución

$$N = 20 \text{ kp} \cdot \text{cm} = 0{,}2 \text{ kp} \cdot \text{m}$$

1)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}MR^2 4\pi^2\nu^2 = MR^2\pi^2\nu^2 = \frac{600}{9{,}8}0{,}25\pi^2\left(\frac{500}{60}\right)^2 = 10\,490 \text{ kgm}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t} \end{array}\right| \quad N = \frac{1}{2}MR^2\frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{MR^2\pi\nu}{N} = \frac{600 \times 0{,}25\pi 500}{9{,}8 \times 60 \times 0{,}2} = 638\pi \text{ s}$$

3)

$$\boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\nu t}{2} = \frac{500 \times 638\pi}{60 \times 2} = 8\,351 \text{ vueltas}}$$

Problema 19. Supuesta la Tierra esférica de $M_0 = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg y de $R_0 = 6\ 370$ km. Calcular:
1. La energía cinética de rotación alrededor de su eje.
2. La fuerza que habría que aplicar en un punto del ecuador y en la dirección de la tangente a éste para que desde el reposo adquiriera la energía antes calculada en 15 días.

Problema X-19

Solución

1)

$$T = \frac{1}{2} I_0\omega_0^2 \qquad \omega_0 = 2\pi\nu_0 \qquad \nu_0 = 1 \text{ vuelta/día} \qquad I_0 = \frac{2}{5} M_0R_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}\, M_0R_0^2 4\pi^2\nu_0^2 = \frac{5{,}98 \times 10^{24}\ 6{,}37^2 \times 10^{12}\ 4\pi^2}{5 \times 24^2 \times 3\ 600^2} = 2{,}57 \times 10^{29}\ \text{J}}$$

2)

$$N = I_0\alpha \qquad N = FR_0 \qquad \alpha = \frac{2\pi\nu_0}{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{FR_0 = \frac{2}{5} M_0R_0^2 \frac{2\pi\nu_0}{t} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{4M_0R_0\pi\nu_0}{5t} = \frac{4 \times 5{,}98 \times 10^{24}\ 6{,}37 \times 10^6\pi}{5 \times 24 \times 3\ 600 \times 15 \times 24 \times 3\ 600} = 8{,}55 \times 10^{20}\ \text{N}}$$

Problema 20. Supuesto el siguiente modelo: a) La Tierra gira alrededor del Sol en órbita circular de radio $R = 1{,}495 \times 10^8$ km y tarda $T = 265{,}25$ d en dar una vuelta. b) La Tierra es perfectamente esférica, de radio $R_0 = 6\ 370$ km y masa $M_0 = 5{,}976 \times 10^{24}$ kg. c) La Tierra tarda $T_0 = 24$ h en dar una vuelta alrededor de su eje. Calcular, tomando como origen el centro del Sol, la energía cinética de la Tierra en su órbita.

Solución

$$E_c = \frac{1}{2} M_0v^2 + \frac{1}{2} I_0\omega_0^2$$

v: la velocidad del CM de la Tierra en su giro alrededor del Sol.
I_0: momento de inercia de la Tierra respecto a un eje que pasa por los polos.
ω_0: la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje.

Llamando ω a la velocidad angular del CM de la Tierra en su giro alrededor del Sol:

$$v = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

además:

$$I_0 = \frac{2}{5} M_0R_0^2 \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

luego:

$$E_c = \frac{1}{2} M_0 \frac{4\pi^2}{T^2} R^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5} M_0R_0^2 \frac{4\pi^2}{T_0^2} = 4\pi^2M_0 \left(\frac{R^2}{2T^2} + \frac{R_0^2}{5T_0^2}\right)$$

Sustituyendo:

$$\boxed{E_c = 2{,}648 \times 10^{31}\ \text{J}}$$

(El segundo sumando es despreciable frente al primero.)

Problema 21. Un proyectil de 10 g de masa sale del cañón de un arma a una velocidad de 500 m/s. Siendo la longitud del cañón 100 cm, calcular la fuerza producida por la expansión de los gases originados en la explosión de la pólvora y la energía cinética de la bala. (Se supone la fuerza constante mientras dura el recorrido de la bala en el interior del cañón.)

Solución

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}10^{-2}\,25 \times 10^4 = 1\,250 \text{ J}}$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = Fl \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{Mv^2}{2l} = 1\,250 \text{ N}}$$

Problema 22. Efectuamos un disparo sobre una pared que ofrece una resistencia constante de 500 kp. La bala, que tiene 30 g de masa, llega a la pared con una velocidad de 600 m/s y sale de ella con 400 m/s. Calcular el espesor de la pared.

Solución

$$dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) \quad \Rightarrow \quad Fe = \frac{1}{2}Mv_2^2 - \frac{1}{2}Mv_1^2$$

$$\boxed{e = \frac{M}{2F}(v_2^2 - v_1^2) = \frac{3 \times 10^{-2}}{2 \times 500 \times 9{,}8}(600^2 - 400^2) = 0{,}6 \text{ m}}$$

Problema 23. Una fuerza de 14 dyn actuando sobre un punto material en reposo le comunica una velocidad de 20 cm/s después de un recorrido de 50 cm. Calcular el tiempo invertido en dicho recorrido, la masa del punto material y la aceleración adquirida.

Solución

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) \quad \Rightarrow \quad Fs = \frac{1}{2}Mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{2Fs}{v^2} = \frac{2 \times 14 \times 50}{400} = 3{,}5 \text{ g}}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \frac{\mathrm{d}(M\boldsymbol{v})}{dt} \quad \Rightarrow \quad Ft = Mv \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{Mv}{F} = \frac{3{,}5 \times 20}{14} = 5 \text{ s}}$$

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{F}{M} = \frac{14}{3{,}5} = 4 \text{ cm/s}^2}$$

Problema 24. Sobre un punto material de 5 g actúa una fuerza constante que después de 5 s le comunica una energía cinética de 2 250 erg. Determinar la intensidad de la fuerza y la aceleración, así como el espacio recorrido hasta adquirir dicha energía.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{1}{2}Mv^2 \\ v = at \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma^2t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2T}{M}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2 \times 2\,250}{5}} = 6 \text{ cm/s}^2}$$

$$\boxed{F = Ma = 5 \times 6 = 30 \text{ dyn}}$$

$$T = Fs \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = \frac{T}{F} = \frac{2\,250}{30} = 75 \text{ cm}}$$

Problema 25. El vector de posición de una partícula que se mueve en el espacio viene dado por $\boldsymbol{r} = 3t^3\boldsymbol{i} + (t^2 + t + 1)\boldsymbol{j} + (2t + 3)\boldsymbol{k}$, expresado en el SI. Hállese el trabajo desarrollado en el quinto segundo. La masa de la partícula es 2 kg.

Solución

$$dW = d\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = dT \quad \Rightarrow \quad W = T_2 - T_1$$

como:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 9t^2\boldsymbol{i} + (2t + 1)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} t = 4\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = 144\boldsymbol{i} + 9\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = 144^2 + 9^2 + 2^2 = 20\,821\ \text{m}^2/\text{s}^2 \\ t = 5\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = 225\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 225^2 + 11^2 + 2^2 = 50\,750\ \text{m}^2/\text{s}^2 \end{array} \right.$$

luego:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{1}{2}\, 2 \times 20\,821 = 20\,821\ \text{J} \\ T_2 = \dfrac{1}{2}\, 2 \times 50\,750 = 50\,750\ \text{J} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{W = T_2 - T_1 = 29\,929\ \text{J}}$$

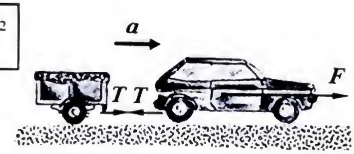
Problema 26. Un automóvil ejerce una fuerza de tracción de 120 kp y arrastra un remolque con una cuerda. El automóvil tiene una masa de 800 kg y el remolque 1 000 kg. Si despreciamos los rozamientos, calcular:

1. La aceleración del movimiento.
2. La tensión de la cuerda.
3. ¿Qué energía cinética poseerá el conjunto auto remolque cuando, habiendo partido del reposo, haya recorrido 20 m?
4. ¿Qué velocidad alcanzará en el caso anterior?

Solución

1)

$$\left. \begin{array}{l} F - T = Ma \\ T = M'a \end{array} \right| \Rightarrow \quad F = (M + M')a \quad \Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{M + M'} = \frac{120 \times 9{,}8}{800 + 1\,000} \simeq 0{,}65\ \text{m/s}^2}$$



Problema X-26

2)

$$\boxed{T = F - Ma = M'a = 1\,000 \times 0{,}65 = 650\ \text{N}}$$

3)

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}Mv^2 = Fs = 120 \times 20 = 2\,400\ \text{kgm} = 23\,520\ \text{J}}$$

4)

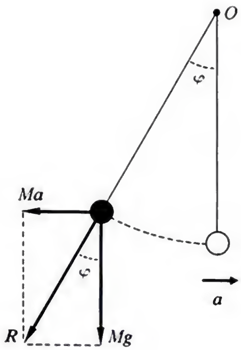
$$\boxed{v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 0{,}65 \times 20} = 5{,}1\ \text{m/s}}$$

Problema 27. Un automotor de masa 10^4 kg parte del reposo por una vía recta y horizontal y tarda 1 min en adquirir su velocidad de régimen 100 km/h.

1. Calcular la aceleración durante ese minuto, supuesta constante.
2. Si del techo pende un péndulo (un hilo fino con una esfera en su extremo),

¿cómo calcularíamos el ángulo que forma el hilo del péndulo con la vertical durante el primer minuto?

3. Si el automotor, cuando marcha a 100 km/h, frena hasta parar en 200 m, ¿cuánto vale la fuerza de frenado?



Problema X-27

Solución

$$v = \frac{250}{9} \text{ m/s}$$

1)

$$\boxed{a = \frac{v}{t} = \frac{250}{9 \times 60} = \frac{25}{54} \text{ m/s}^2}$$

2) Considerando la «fuerza de inercia», la figura nos conduce a:

$$\text{tag}\varphi = \frac{Ma}{Mg} = \frac{a}{g} = \frac{25}{54 \times 9{,}8} \Rightarrow \boxed{\varphi = 2°42'}$$

3)

$$Fs = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{Mv^2}{2s} = \frac{10^4 \times 250^2}{9^2 \times 2 \times 200} = 19\,290 \text{ N}}$$

Problema 28. El cañón de una escopeta tiene una longitud de 1 m y la fuerza que impulsa al proyectil viene dada por la expresión $F = 0{,}1\,(200 - x)$, viniendo expresada F en newtones y x en centímetros. La masa del proyectil es de 5 g. Determinar:

1. El trabajo de la fuerza en el interior del cañón.

2. La velocidad del proyectil en el momento de salir del cañón.

3. La energía cinética del proyectil en este momento expresada en calorías.

Solución

1) Trabajaremos en el sistema CGS:

$$dW = Fdx = 0{,}1\,(200 - x)\,10^5\,dx$$

$$\boxed{W = \int_0^{100} 0{,}1\,(200 - x)\,10^5\,dx = 10^4 \left[200x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{100} = 1{,}5 \times 10^8 \text{ erg} = 15 \text{ J}}$$

2)

$$W = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2W}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 15}{5 \times 10^{-3}}} = 77{,}5 \text{ m/s}}$$

3) La caloría es una unidad de energía (el calor es una de las formas de energía) y equivale a 4,18 J; luego:

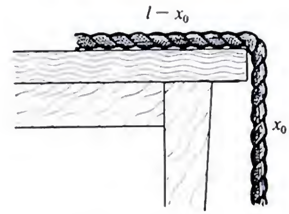
$$\boxed{W = \frac{15}{4{,}18} \text{ J} = 3{,}6 \text{ cal}}$$

Problema 29. Colocamos una cuerda flexible de 1 m de longitud sobre una mesa de tal forma que parte de ella cuelgue por un extremo; se deja caer desde una posición en la que se equilibran el trozo de cuerda que cuelga y el rozamiento

dinámico. Calcular la velocidad de la cuerda cuando el extremo que está sobre la mesa llega al borde de la misma. Coeficiente dinámico de rozamiento: $\mu = 0{,}5$.

Solución

M_1 = masa de la cuerda sobre la mesa.
M_2 = masa de la cuerda que cuelga.
λ = masa de la unidad de longitud.
x_0 = longitud de cuerda que cuelga inicialmente.



Problema X-29

En el equilibrio:

$$M_2 g = \mu M_1 g \quad \Rightarrow \quad \lambda x_0 = \lambda(l - x_0)\mu \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{l\mu}{1 + \mu}$$

Cuando la cuerda cuelga x la fuerza que produce el movimiento es:

$$F = \lambda x g - \lambda(l - x)\mu g = \lambda g[x(1 + \mu) - l\mu]$$

aplicando el teorema de las fuerzas vivas, teniendo en cuenta que la cuerda parte del reposo, se tiene:

$$\frac{1}{2} M v^2 = \int_{x_0}^{l} F dx = \lambda g \left[(1 + \mu)\int_{x_0}^{l} x dx - l\mu \int_{x_0}^{l} dx\right] = \lambda g \left[(1 + \mu)\left(\frac{l^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right) - l\mu(l - x_0)\right]$$

Sustituyendo el valor hallado para x_0 y teniendo en cuenta que $M = \lambda l$, queda:

$$\frac{1}{2} l v^2 = g\left[(1 + \mu)\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2\mu^2}{2(1 + \mu)^2}\right) - l\mu\left(l - \frac{l\mu}{1 + \mu}\right)\right] = g\left[\frac{l^2(1 + \mu^2 + 2\mu) - l^2\mu^2}{2(1 + \mu)} - \frac{l^2\mu}{1 + \mu}\right] = \frac{g l^2}{2(1 + \mu)}$$

despejando v:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{lg}{1 + \mu}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}5}} = 2{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 30. Un par de fuerzas de 200 N · m de momento, actuando sobre una esfera de 30 cm de radio y pivotada en su eje, le comunica una velocidad angular de 50 Hz después de girar un ángulo de 10π rad. Calcular:
1. La masa de la esfera.
2. La aceleración angular.
3. Tiempo invertido en el proceso.

Solución

1)

$$W = N\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$N\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}\, MR^2 4\pi^2\nu^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{5N\varphi}{4\pi^2\nu^2R^2} = \frac{5 \times 200 \times 10\pi}{4\pi^2 50^2\, 0{,}3^2} = 3{,}54 \text{ kg}}$$

2)

$$\omega = \sqrt{2\alpha\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\omega^2}{2\varphi} = \frac{4\pi^2\nu^2}{2\varphi} = \frac{4\pi^2 50^2}{2 \times 10\pi} = 500\,\pi \text{ rad/s}^2}$$

3)

$$\varphi = \frac{1}{2}\,\omega t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2\varphi}{\omega} = \frac{\varphi}{\pi\nu} = \frac{10\pi}{\pi 50} = \frac{1}{5} \text{ s}}$$

Problema 31. Un volante en forma de cilindro sólido de 200 kg de masa y 40 cm de radio gira a 10 Hz. Se actúa sobre él hasta pararlo con un par. Determinar:
1. Trabajo realizado por el par durante el frenado.
2. ¿Qué ángulo ha girado el volante hasta que se para, si el par aplicado es de 100 N · m?

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} W = \dfrac{1}{2} I\omega^2 \\ I = \dfrac{1}{2} MR^2 \\ \omega = 2\pi\nu \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} MR^2 4\pi^2\nu^2 = MR^2\pi^2\nu^2 = 200 \times 0{,}4^2 \times \pi^2 \times 10^2 = 31\,582{,}7 \text{ J}}$$

2)

$$W = N\varphi \quad \Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{W}{N} = \frac{31\,582{,}7}{100} = 315{,}827 \text{ rad}}$$

Problema 32. Un aro de 1 m de diámetro y de 500 g de masa se encuentra girando, en ausencia de rozamientos, alrededor de su eje con una frecuencia de 1 Hz. Se le aplica entonces una fuerza tangencial constante que le comunica una aceleración angular de una revolución/s^2 hasta que adquiere una frecuencia de 10 Hz. Calcúlese:
1. El trabajo realizado.
2. El tiempo que dura la aceleración.
3. El valor de la fuerza tangencial aplicada.
4. La potencia mecánica puesta en juego.

Solución

$$I = MR^2 \qquad \alpha = 2\pi \text{ rad/s}^2 \qquad \omega = 2\pi\nu$$

1)

$$\boxed{W = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2 = 2\pi^2 MR^2(\nu^2 - \nu_0^2) = 2\pi^2 0{,}5 \times 0{,}5^2(10^2 - 1) = 244 \text{ J}}$$

2)

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \boxed{t = 2\pi \frac{\nu - \nu_0}{\alpha} = 9 \text{ s}}$$

3)

$$N = I\alpha \quad \Rightarrow \quad FR = MR^2\alpha \quad \Rightarrow \boxed{F = MR\alpha = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 2\pi = \frac{\pi}{2} \text{ N}}$$

4)

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{244}{9} = 27 \text{ W}}$$

Problema 33. Calcular el trabajo desarrollado por un freno que, actuando sobre un cuerpo de 25 kg de masa, cuando éste se encuentra girando alrededor de un eje (radio de giro del cuerpo respecto al eje: 1 m) con una velocidad angular de 20 Hz, pase a girar con 10 Hz.

Solución

$$W = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

y como:

$$I = MK_0^2 \qquad \omega_1 = 2\pi\nu_1 \qquad \omega_2 = 2\pi\nu_2$$

queda:

$$\boxed{W = 2\pi MK_0^2(\nu_2^2 - \nu_1^2) = 2\pi 25(20^2 - 10^2) = 15 \times 10^3\pi \text{ J}}$$

C) TEORIA DE CAMPOS. ENERGIA POTENCIAL DE UN CAMPO DE FUERZAS CONSERVATIVO

FORMULARIO

VECTOR GRADIENTE:

$$\boldsymbol{grad}\, a = \nabla a = \frac{\partial a}{\partial x} \boldsymbol{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \boldsymbol{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \boldsymbol{k}$$

CIRCULACIÓN:

$$\Gamma = \int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \Leftrightarrow d\Gamma = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

FLUJO:

$$\Phi = \int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} \Leftrightarrow d\Phi = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

DIVERGENCIA:

$$div \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

ROTACIONAL:

$$\boldsymbol{rot E} = \nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \boldsymbol{k}$$

LAPLACIANA DE UN ESCALAR:

$$\nabla^2 a = \Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

LAPLACIANA DE UN VECTOR:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \Delta \boldsymbol{E} = \Delta E_x \boldsymbol{i} + \Delta E_y \boldsymbol{i} + \Delta E_z \boldsymbol{k}$$

CARACTERÍSTICAS DE UN CAMPO CONSERVATIVO:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{grad}\, a$$

o también:

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E} = 0$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN CAMPO DE FUERZAS CONSERVATIVO:

$$U(\boldsymbol{r}_1) - U(\boldsymbol{r}_2) = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} = -\, \boldsymbol{grad}\, U$$

Problema 34. Dado el vector: $\boldsymbol{E} = 2x^2y\boldsymbol{i} + 3xz^2\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$ y la magnitud escalar: $a = x^2y + 3xyz - 3z^2 + 1$, calcular el valor de las siguientes expresiones en el punto A (1, 0, 2):

1. $\boldsymbol{grad}\, a$
2. $div\, \boldsymbol{E}$
3. $\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E}$
4. Δa
5. $\Delta \boldsymbol{E}$

Solución

1)

$$\boldsymbol{grad}\, a = \boldsymbol{\nabla} a = \frac{\partial a}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= 2xy + 3yz \\ \frac{\partial a}{\partial y} &= x^2 + 3xz \\ \frac{\partial a}{\partial z} &= 3xy - 6z \end{aligned}\right| \Rightarrow \boldsymbol{grad}\, a = (2xy + 3yz)\boldsymbol{i} + (x^2 + 3xz)\boldsymbol{j} + (3xy - 6z)\boldsymbol{k}$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\boldsymbol{grad}\, a = \boldsymbol{\nabla} a = 7\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}}$$

2)

$$div\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 4xy \\ \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial E_z}{\partial z} &= -\, x \end{aligned}\right| \Rightarrow div\, \boldsymbol{E} = 4xy - x$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{div\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = -\, 1}$$

3)

$$rot E = \nabla \times E = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2y & 3xz^2 & -xz \end{vmatrix} = -6xzi + zj + (3z^2 - 2x^2)k$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{rot E = \nabla \times E = -12i + 2j + 10k}$$

4) Δa es la laplaciana del escalar a, que se define por el escalar:

$$\Delta a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= 2y \\ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} &= -6 \end{aligned}\right| \Rightarrow \Delta a = 2y - 6$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\Delta a = -6}$$

5) ΔE es la laplaciana del vector E, que se define por el vector:

$$\Delta E = \Delta E_x i + \Delta E_y j + \Delta E_z k$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta E_x &= \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 4y \\ \Delta E_y &= \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = 6x \\ \Delta E_z &= \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = 0 \end{aligned}\right| \Rightarrow \Delta E = 4yi + 6xj$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\Delta E = 6j}$$

Problema 35. Dado el vector $E = x^2 i - 2yzj + xz^2 k$ y el escalar $a = 2x^2y - 3z^2$, calcular en el punto A (1, 0, 2) las siguientes expresiones:

1. $div(aE)$
2. $E \cdot grad\, a$
3. $E \times rot E$
4. $E \times grad\, a$
5. $rot(aE)$

Solución

1) El producto de un escalar a por el vector $\boldsymbol{E}$ es el vector:

$$\boldsymbol{aE} = (2x^2y - 3z^2)(x^2\boldsymbol{i} - 2yz\boldsymbol{j} + xz^2\boldsymbol{k}) = (2x^4y - 3x^2z^2)\boldsymbol{i} + (-4x^2y^2z + 6yz^3)\boldsymbol{j} + (2x^3yz^2 - 3xz^4)\boldsymbol{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial(aE_x)}{\partial x} = 8x^3y - 6xz^2 \\[2ex] \dfrac{\partial(aE_y)}{\partial y} = -8x^2yz + 6z^3 \\[2ex] \dfrac{\partial(aE_z)}{\partial z} = 4x^3yz - 12xz^3 \end{array}\right| \Rightarrow div(\boldsymbol{aE}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{aE}) = 8x^3y - 6xz^2 - 8x^2yz + 6z^3 + 4x^3yz - 12xz^3$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{div(\boldsymbol{aE}) = -72}$$

2)

$$\boldsymbol{grad}\,a = \frac{\partial a}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial a}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial a}{\partial z}\,\boldsymbol{k} = 4xy\boldsymbol{i} + 2x^2\boldsymbol{j} - 6z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{grad}\,a = 4x^3y - 4x^2yz - 6xz^3$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{grad}\,a = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}a = -48}$$

3)

$$\boldsymbol{rotE} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -2yz & xz^2 \end{vmatrix} = 2y\boldsymbol{i} - z^2\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{rotE} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x^2 & -2yz & xz^2 \\ 2y & -z^2 & 0 \end{vmatrix} = xz^4\boldsymbol{i} + 2xyz^2\boldsymbol{j} + (-x^2z^2 + 4y^2z)\boldsymbol{k}$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{rotE} = 16\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k}}$$

4)

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{grad}\,a = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x^2 & -2yz & xz^2 \\ 4xy & 2x^2 & -6z \end{vmatrix} = (12yz^2 - 2x^3z^2)\boldsymbol{i} + (4x^2yz^2 + 6x^2z)\boldsymbol{j} + (2x^4 + 8xy^2z)\boldsymbol{k}$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{grad}\,a = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\nabla}a = -8\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}}$$

5) Teniendo en cuenta 1), obtenemos:

$$\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{aE}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{aE}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x^4y - 3x^2z^2 & -4x^2y^2z + 6yz^3 & 2x^3yz^2 - 3xz^4 \end{vmatrix} =$$

$$= (2x^3z^2 + 4x^2y^2 - 18yz^2)\boldsymbol{i} + (-6x^2z - 6x^2yz^2 + 3z^4)\boldsymbol{j} + (-8xy^2z - 2x^4)\boldsymbol{k}$$

y en el punto A (1, 0, 2):

$$\boxed{\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{aE}) = \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{aE}) = 8\boldsymbol{i} + 36\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}$$

Problema 36. La función potencial de un campo vectorial viene dada por la expresión:

$$V = z^2x - 2y - \frac{x^3}{3} + 5$$

1. Calcular el vector que define dicho campo.
2. Comprobar que el campo es irrotacional.

Solución

1)

$$\boldsymbol{E} = -\, \boldsymbol{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= z^2 - x^2\\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 2\\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 2xz\end{aligned}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{E} = (x^2 - z^2)\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2xz\boldsymbol{k}}$$

2)

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

y como en nuestro caso:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\,2z\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0\end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E} = 0}$$

Problema 37. Demostrar que el vector $\boldsymbol{E} = 6xy\boldsymbol{i} + (3x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ representa a un campo conservativo o, lo que es lo mismo, admite un potencial.

Solución

Si existe un potencial, el campo tendrá que ser irrotacional, es decir:

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

en nuestro caso:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 6x$$

cumpliéndose las condiciones para que en el campo exista un potencial.

Problema 38. Hállese la circulación del vector $\boldsymbol{E} = (x + y^2)\boldsymbol{i} - 3xy\boldsymbol{j} + (x + z)^2\boldsymbol{k}$ a lo largo de la parábola $x = y^2$, $z = 0$ desde el punto A (1, 1, 0) al B (2, 4, 0).

Solución

La circulación del vector $\boldsymbol{E}$ a lo largo de una curva C es por definición:

$$\Gamma = \int_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

por consiguiente:

$$\boxed{\Gamma = \int_1^2 (x + y^2)dx - \int_1^4 3xydy + \int_0^0 (x + z)^2 dz = \int_1^2 2xdx - \int_1^4 3y^3 dy = [x^2]_1^2 - \left[\frac{3y^4}{4}\right]_1^4 = -188{,}25}$$

Problema 39. En un campo de fuerzas conservativo la energía potencial viene dada por la expresión:

$$U = 3x + \frac{y^2}{x} - 3yz + 35$$

expresada en el SI. Calcular:

1. La fuerza que actúa sobre una partícula colocada en el punto A (1, 2, 1) m.
2. El trabajo realizado por el campo cuando la partícula se desplaza del punto A al B (−1, 3, 2) m.

Solución

1) Los valores de las derivadas parciales de U serán:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2 - y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x} - 3z = \frac{2y - 3xz}{x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -3y$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{F} = -\,\mathbf{grad}\,U \Rightarrow \boldsymbol{F} = -\frac{3x^2 - y^2}{x^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y - 3xz}{x}\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$$

en el punto A (1, 2, 1):

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k} \text{ N}}$$

2) $U(A) = 36$ J y $U(B) = 5$ J y como:

$$W_A^B = U(A) - U(B) \Rightarrow \boxed{W_A^B = 31 \text{ J}}$$

D) CAMPO GRAVITATORIO

FORMULARIO

INTENSIDAD DEL CAMPO GRAVITATORIO CREADO POR UNA PARTÍCULA:

$$g(P) = \frac{\boldsymbol{F}}{m'} = -\,G\,\frac{m}{r^3}\,\boldsymbol{r}$$

TEOREMA DE GAUSS:

$$\Phi = \oint_A \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{A} = 4\pi GM$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN CAMPO GRAVITATORIO:

$$U_2 - U_1 = GMM' \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

Si $r_2 = \infty$, convenimos $U_2 = 0$; entonces:

$$U = -\,G\,\frac{MM'}{r}$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UNA PARTÍCULA (m) EN PRESENCIA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS:

$$U = \Sigma U_i = -\,Gm\Sigma\,\frac{m_i}{r_i}$$

si la distribución es continua:

$$U = -\,Gm\int\frac{dm}{r}$$

ENERGÍA POTENCIAL DEL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE:

$$U_2 - U_1 = GM_0M\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = M(g_1r_1 - g_2r_2)$$

si $r_2 - r_1 = h$ y $r_1 \simeq r_2$, entonces:

$$U_2 - U_1 = Mgh$$

FUNCIÓN POTENCIAL EN EL CAMPO GRAVITATORIO:

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{U(\boldsymbol{r})}{m} \quad\Leftrightarrow\quad dV = \frac{dU}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{F} = -\,\boldsymbol{grad}\,U \\ \boldsymbol{g} = \dfrac{\boldsymbol{F}}{m} \end{array}\right| \Rightarrow \boldsymbol{g} = -\,\boldsymbol{grad}\,V$$

POTENCIAL EN UN PUNTO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN DISCRETA:

$$V(\boldsymbol{r}) = -G\Sigma \frac{m_i}{r_i}$$

POTENCIAL EN UN PUNTO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA:

$$V(\boldsymbol{r}) = -G\int \frac{dm}{r}$$

Problema 40. Calcular la altura sobre el suelo a la que hay que colocar una masa de 100 kg para que tenga una energía potencial igual a la que posee un barco de 5 000 t que marcha con una velocidad de 36 km/h (R_0 = 6 370 km, g_0 = 9,80 m/s^2).

Solución

La energía que tiene el barco a 36 km/h = 10 m/s es:

$$T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}5 \times 10^6\, 10^2 \text{ J} = 2{,}5 \times 10^8 \text{ J}$$

Como:

$$U - U_0 = \Delta U = GM_0m\left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0+h}\right] = \frac{GM_0mh}{R_0(R_0+h)}$$

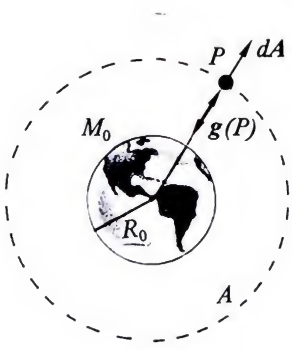
$$g_0 = G\frac{M_0}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad GM_0 = g_0R_0^2$$

nos queda:

$$\Delta U = \frac{mg_0R_0h}{R_0+h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{R_0\Delta U}{mg_0R_0 - \Delta U} = \frac{6{,}37 \times 10^6\, 2{,}5 \times 10^8}{10^2\, 9{,}8 \times 6{,}37 \times 10^6 - 2{,}5 \times 10^8} \text{ m} = 265{,}74 \text{ km}}$$

Problema 41. Calcular la energía potencial que posee una masa $M \ll M_0$ en el interior de la Tierra en un punto situado a una profundidad h, supuesta ésta homogénea y esférica de radio R_0 y densidad ρ.

Solución



Problema X-41-1.

Primeramente calcularemos la intensidad del campo gravitatorio fuera y dentro de la Tierra. Como la simetría de la distribución nos exige que el campo sea radial, resolveremos este problema por aplicación del teorema de Gauss a una superficie esférica de radio r concéntrica con la Tierra. El campo en P, por ser radial, será paralelo a $\boldsymbol{r}$ y también a $d\boldsymbol{A}$.

1) En un punto P a una distancia $r > R_0$ del centro de la Tierra.

$$\Phi = \oint_A \boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_A g\,dA\cos\varphi = \oint_A g\,dA$$

como g sólo depende de r y A es una esfera, es constante al integrar; luego:

$$\Phi = g\oint_A dA = g4\pi r^2$$

por otra parte:

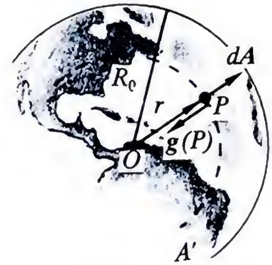
$$\Phi = 4\pi G M_0$$

igualando:

$$g = G\frac{M_0}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g} = -G\frac{M_0}{r^3}\boldsymbol{r}$$

sacamos en conclusión que «la intensidad del campo gravitatorio que produce la Tierra en un punto exterior a ella es la que produciría una masa puntual de masa M_0 colocada en el centro de ella».

2) En un punto P interior a una distancia $r < R_0$ del centro de la Tierra.
En este caso los argumentos de simetría son iguales. Para integrar tomaremos una esfera A', que pasa por el punto P. Igual que antes $\boldsymbol{r}$, es paralelo a $d\boldsymbol{A}$; luego:



Problema X-41-2.ª

$$\Phi = \oint_{A'} \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{A} = \oint_{A'} g\,dA = g4\pi r^2$$

y por otra parte:

$$\Phi = 4\pi G M_0'$$

donde M_0' es la masa encerrada dentro de $A'(M_0' < M_0)$, igualando queda:

$$g = G\frac{M_0'}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{g} = -G\frac{M_0'}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Sacando en conclusión que «la intensidad del campo gravitatorio que produce la Tierra en un punto de su interior es el que produciría una masa puntual (M_0'), igual a la que habría en el interior de la esfera de radio la distancia del centro al punto considerado».

La expresión de la energía potencial es:

$$U_1 - U_2 = \int_1^2 \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

tomando como hipótesis que $r_2 = \infty \quad \Rightarrow \quad U_2 = 0$, o lo que es lo mismo, «la energía potencial de un cuerpo en el infinito es cero», tendremos:

$$U(r) = \int_r^\infty \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_\infty^r \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

Calcularemos la energía potencial del cuerpo M colocado en el interior de la Tierra a una distancia $r = R_0 - h$ de su centro, midiendo el trabajo (con signo menos) realizado al transportar el cuerpo del infinito a la superficie de la Tierra, más el realizado al transportarlo al punto considerado, es decir:

$$U(P) = -\int_\infty^{R_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} - \int_{R_0}^{r} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$$

La fuerza $\boldsymbol{F}$ será el peso del cuerpo en el lugar en que se encuentre; por otro lado, las integrales a calcular no dependen del camino recorrido, tomando éste a lo largo de una línea de fuerza podremos prescindir de la notación vectorial, puesto que $\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = rdr$; con estas consideraciones los valores de las dos integrales serán:

$$-\int_\infty^{R_0} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -M\int_\infty^{R_0} \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r} = GM_0M\int_\infty^{R_0}\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}{r^3} = GM_0M\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^{R_0} = -\frac{GM_0M}{R_0}$$

$$-\int_{R_0}^{R_0-h} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -M\int_{R_0}^{R_0-h} \boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{r} = GM\int_{R_0}^{R_0-h} M_0'\frac{\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r}}{r^3} = GM\int_{R_0}^{R_0-h}\frac{M_0'}{r^2}\,dr$$

en esta última integral M_0' depende de r, por lo que no podremos sacarla de dentro del signo integral; teniendo en cuenta:

$$\rho = \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} = \frac{M_0'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad M_0' = \frac{r^3}{R_0^3}M_0$$

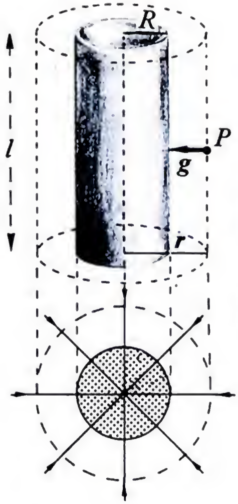
obteniéndose para valor de la integral:

$$-\int_{R_0}^{R_0-h} F \cdot dr = \frac{GM_0M}{R_0^3}\int_{R_0}^{R_0-h} rdr = \frac{GM_0M}{R_0^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_0}^{R_0-h} = -\frac{GM_0M}{2R_0^3}(2R_0h - h^2)$$

Sustituyendo en $U(P)$, nos quedará:

$$U(P) = -\frac{2\pi GM\rho}{3}[2R_0^2 + 2R_0h - h^2]$$

el signo menos nos indica que en el punto considerado la energía potencial es menor que en el infinito.



Problema X-42-1.ª

Problema 42. Calcular la intensidad del campo gravitatorio debido a un volumen cilíndrico muy largo, homogéneo, de densidad ρ y radio R en puntos situados:

1. $r > R$

2. $r < R$

Solución

Este es un caso claro de aplicación del teorema de Gauss, puesto que la intensidad del campo gravitatorio en ambos casos tiene la dirección del radio de los cilindros coaxiales con el dado y toma el mismo valor en todos los puntos de la superficie lateral de cada cilindro.

1) Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cilíndrica de radio r y longitud l, tendremos:

$$\Phi = 4\pi GM$$

siendo M la masa de su interior; y como:

$$\rho = \frac{dM}{dV} = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho\pi R^2 l$$

luego:

$$\Phi = 4\pi^2 G\rho R^2 l$$

Por otra parte, aplicamos el concepto de flujo a la superficie lateral de este cilindro, y nos quedará:

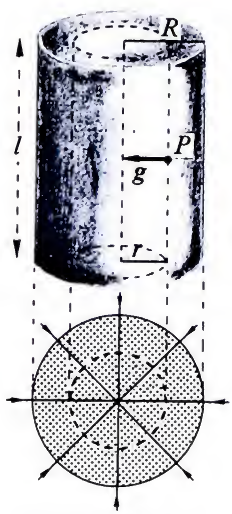
$$\Phi = \int_A g \cdot dA = \int_A gdA\cos\varphi$$

pero $\cos\varphi = 1$, ya que $\varphi = 0$ por ir en la misma dirección ambos vectores y, además, por ser g el mismo en todos los puntos del área, nos quedará:

$$\Phi = \int_A gdA = g\int_A dA = g2\pi rl$$

los dos flujos calculados son iguales, puesto que el flujo que atraviesa los círculos superior e inferior son nulos, ya que el vector área y el vector campo son perpendiculares; luego:

$$4\pi G\rho R^2 l = g2\pi rl \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2GR^2\rho}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = -\frac{2GR^2\rho}{r^2}\, r}$$



Problema X-42-2.ª

2) Haciendo el mismo razonamiento que antes, aplicamos el teorema de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = 4\pi GM' \\ M' = \rho\pi r^2 l\end{array}\right| \Rightarrow \Phi = 4\pi^2 G\rho r^2 l$$

Por otra parte:

$$\Phi = \int_A g \cdot dA = g \int_A dA = g2\pi rl$$

igualando:

$$4\pi^2 G\rho r^2 l = g2\pi rl \quad \Rightarrow \quad g = 2\pi G r\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{g} = -\,2\pi G\rho \boldsymbol{r}}$$

Problema 43. Supongamos que en el espacio intergaláctico (fuera de toda influencia de cuerpos celestes) definimos un sistema de ejes rectangulares. Dos partículas de masas 4 y 5 kg las colocamos en (0, 0) y (0, 3), medidas estas coordenadas en metros. Calcular:

1. La fuerza con que se atraen.

2. La intensidad del campo gravitatorio en el punto A (4, 0) m creado por las dos partículas.

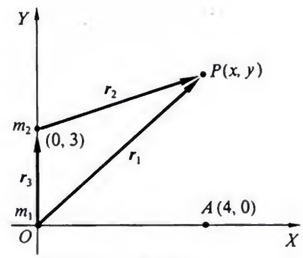
3. El trabajo realizado al transportar en presencia de estas dos partículas otra de masa 3 kg desde el punto A al B (6, 7) m.

Solución

1) La fuerza en módulo será:

$$F = G\,\frac{m_1 m_2}{r_3^2} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{4 \times 5}{9} = 14{,}82 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}$$

en la dirección de $\boldsymbol{r}_3$.



Problema X-43-1.ª

2) El procedimiento a seguir, «en general», es calcular primeramente la función de punto potencial $V(P)$ y por derivación se obtiene la intensidad del campo; puesto que:

$$\boldsymbol{g} = -\,\boldsymbol{grad}\,V(P)$$

el valor de $V(P)$ para cualquier punto $P(xy)$ será en nuestro problema:

$$V(P) = -\,G\Sigma\,\frac{m_i}{r_i} = -\,G\left[\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right] = -\,G\left[\frac{m_1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{x^2 + (y-3)^2}}\right]$$

entonces:

$$g_x = -\,\frac{\partial V}{\partial x} = -\,Gx\left[\frac{m_1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2}{[x^2 + (y-3)^2]^{3/2}}\right]$$

$$g_y = -\,\frac{\partial V}{\partial y} = -\,G\left[\frac{m_1 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y-3)}{[x^2 + (y-3)^2]^{3/2}}\right]$$

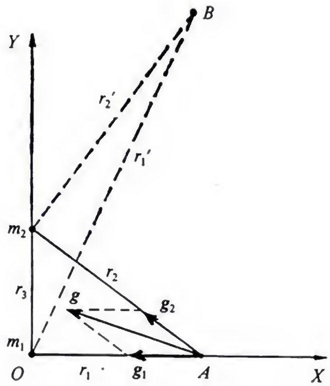
si hacemos $A = P$, queda $x = 4$ e $y = 0$; se obtiene:

$$g_x = -\,6{,}67 \times 10^{-11}\,4\left[\frac{4}{4^3} + \frac{5}{5^3}\right] = -\,0{,}41 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}$$

$$g_y = -\,6{,}67 \times 10^{-11}\left[-\,\frac{5 \times 3}{5^3}\right] = 0{,}12 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}$$

luego:

$$\boxed{\boldsymbol{g} = (-0{,}41\boldsymbol{i} + 0{,}12\boldsymbol{j})\,6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m/s^2}}$$



Problema X-43-2.ª

OTRO PROCEDIMIENTO A SEGUIR:

$$g = g_1 + g_2 = g_x + g_y$$

los módulos de g_1 y g_2 son:

$$g_1 = G\frac{m_1}{r_1^2} \qquad g_2 = G\frac{m_2}{r_2^2}$$

y como:

$$g_x = g_{x1} + g_{x2}$$
$$g_y = g_{y1} + g_{y2}$$

siendo:

$$g_{x1} = g_1\cos\alpha \quad \Big| \quad g_{x2} = g_2\cos\beta$$
$$g_{y1} = g_1\operatorname{sen}\alpha \quad \Big| \quad g_{y2} = g_2\operatorname{sen}\beta$$

$$\alpha = \pi \qquad \cos\beta = -\frac{r_1}{r_2} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{r_3}{r_2}$$

luego nos queda:

$$g_{x1} = -g_1 \quad \Big| \quad g_{x2} = -g_2\frac{r_1}{r_2}$$
$$g_{y1} = 0 \quad \Big| \quad g_{y2} = g_2\frac{r_3}{r_2}$$

con lo que se obtiene:

$$g = -\left[g_1 + \frac{r_1}{r_2}g_2\right]i + \left(\frac{r_3}{r_2}g_2\right)j$$

sustituyendo los valores de g_1 y g_2, nos queda:

$$g = G\left[-\left(\frac{m_1}{r_1^2} + \frac{m_2 r_1}{r_2^3}\right)i + \frac{m_2 r_3}{r_2^3}j\right]$$

$$\begin{array}{l|l} & r_1 = 4 \text{ m} \\ m_1 = 4 \text{ kg} & r_2 = \sqrt{r_1^2 + r_3^2} = \sqrt{16+9} = 5 \text{ m} \\ m_2 = 5 \text{ kg} & r_3 = 3 \text{ m} \\ & G = 6{,}67 \times 10^{-11}\dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2} \end{array}$$

Luego el valor de g escrito en el sistema Giorgi será:

$$g = \left[-\left(\frac{4}{16} + \frac{5\times 4}{5^3}\right)i + \frac{5\times 3}{5^3}j\right]6{,}67\times 10^{-11} \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{g = (-0{,}41i + 0{,}12j)6{,}67\times 10^{-11} \text{ m/s}^2}$$

3) Teniendo en cuenta que una partícula de masa m colocada en un punto, a una distancia r de otra masa m', tiene una energía potencial:

$$U = -G\frac{mm'}{r} = mV$$

Una partícula de masa m colocada en un punto a distancias: r_1, r_2, r_3, ... r_n, respectivamente, de un sistema de partículas de masas: m_1, m_2, m_3, ..., m_n; tendrá una energía potencial:

$$U = \Sigma U_i = -Gm\Sigma\frac{m_i}{r_i}$$

El trabajo en el transporte de la masa $m = 3$ kg del punto A al punto B vendrá medido por:

$$W_A^B = U_A - U_B$$

y como:

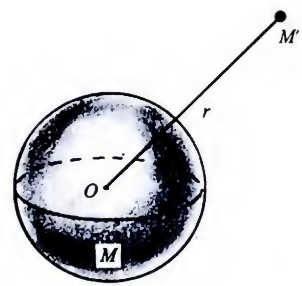
$$U_A = mV_A = -3 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\left[\frac{4}{4} + \frac{5}{5}\right] = -40{,}02 \times 10^{-11}\ \text{J}$$

$$U_B = mV_B = -3 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\left[\frac{4}{\sqrt{85}} + \frac{5}{\sqrt{52}}\right] = -22{,}55 \times 10^{-11}\ \text{J}$$

luego:

$$\boxed{W_A^B = U_A - U_B = -17{,}47 \times 10^{-11}\ \text{J}}$$

Problema 44. A 9 m de distancia de la superficie de una esfera de 1 000 kg y 1 m de radio se sitúa una masa de 500 g.
1. ¿Cuál es su energía potencial?
2. ¿Cuál es el potencial gravitatorio en dicho punto?



Problema X-44

Solución

1) Si convenimos que en el infinito $U = 0$, entonces:

$$U = -G\frac{MM'}{r} = -6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{1\,000 \times 0{,}5}{10} = -3{,}34 \times 10^{-9}\ \text{J}$$

2) El potencial gravitatorio será:

$$V = -G\frac{M}{r} = -6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{1\,000}{10} = -6{,}67 \times 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

Problema 45. **1.** Calcular la intensidad del campo gravitatorio creado por una varilla delgada y homogénea de longitud L y masa M en un punto situado en el eje de la varilla y a una distancia a de su extremo.
2. Calcular la energía potencial que tiene una partícula de masa m colocada en dicho punto.

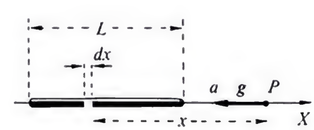
Solución

1) Para cualquier punto del eje OX distante x del elemento dx y distante a del extremo la función potencial en él será una función de a; calculada $V(a)$ y teniendo en cuenta la unidimensionalidad del problema, tendremos que:

$$\boldsymbol{g} = -\,\boldsymbol{grad}\,V(a) = -\frac{dV}{da}\,\boldsymbol{i}$$

como:

$$V(a) = -G\int_a^{L+a}\frac{dm}{x} = -G\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{x} = G\lambda \ln\frac{a}{L+a}$$



Problema X-45

en la que hemos llamado λ a la «masa de la unidad de longitud»:

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = \frac{M}{L} \Rightarrow M = \lambda L$$

derivando:

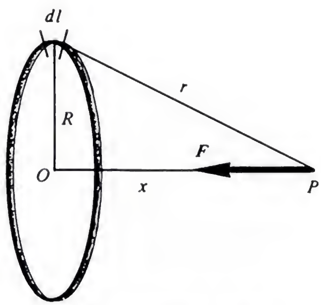
$$\boxed{g = -\frac{dV}{da}\, i = -\frac{G\lambda L}{a(L+a)}\, i = -\frac{GM}{a(L+a)}\, i}$$

2)

$$\boxed{U(a) = mV(a) = mG\lambda \ln \frac{a}{L+a} = \frac{GMm}{L} \ln \frac{a}{L+a}}$$

Problema 46. Calcular la fuerza gravitatoria ejercida por un anillo de masa M y radio R sobre una partícula de masa m situada en el eje del anillo y a una distancia x.

Solución



Problema X-46

El procedimiento a seguir será calcular $V(P)$, de donde se obtendrá:

$$\boldsymbol{g} = -\,\mathbf{grad}\, V \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$$

Llamando λ a la «masa de la unidad de longitud» del anillo:

$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad M = \lambda 2\pi R$$

el valor de la función potencial dV creada por el elemento dl de masa $dm = \lambda dl$ en P será:

$$dV = -G\,\frac{dm}{r} = -G\,\frac{\lambda dl}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

integrando:

$$V(P) = -\frac{G\lambda}{\sqrt{x^2+R^2}} \oint dl = -\frac{G\lambda 2\pi R}{\sqrt{x^2+R^2}} = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

luego:

$$\boldsymbol{g} = -\,\mathbf{grad}\, V = -\frac{dV}{dx}\,\boldsymbol{i} = -\frac{GMx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{i}$$

quedándonos:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g} = -\frac{GMmx}{(R^2+x^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{i}}$$

Capítulo XI

LEYES DE CONSERVACION

A) CONSERVACION DE LA ENERGIA

FORMULARIO

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAMPO CONSERVATIVO:

$$T + U = \mathrm{ct^e}$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS EN UN CAMPO DE FUERZAS CONSERVATIVO:

$$(T + U) - (T_0 + U_0) = W_{\mathrm{ext}}$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS CUANDO ACTÚAN FUERZAS CONSERVATIVAS Y DISIPATIVAS:

$$(T + U) - (T_0 + U_0) = W_{\mathrm{ext}} + W_{\mathrm{R}}$$

EQUIVALENCIA CALOR-ENERGÍA:

1 CALORÍA = 4,18 JULIOS

Problema 1. Desde qué altura tendría que caer un coche para equiparar con la energía que posee cuando marcha a 100 km/h.

Solución

$$T + U = \mathrm{ct^e} \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{v^2}{2g} = \frac{10^{10}}{3\,600^2 \times 2 \times 9{,}8} = 39{,}4 \text{ m}}$$

Problema 2. Desde una cierta altura dejamos caer un cuerpo y llega al suelo con velocidad v_1; si en vez de abandonarlo lo lanzamos verticalmente hacia abajo con velocidad v_2, ¿con qué velocidad llega al suelo?

Solución

$$T + U = \text{ct}^{\text{e}}$$

$$\left.\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2} Mv_1^2 \\ Mgh + \frac{1}{2} Mv_2^2 &= \frac{1}{2} Mv_3^2 \end{aligned}\right| \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 = \frac{1}{2} Mv_3^2 \Rightarrow \boxed{v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Problema 3. Desde una torre de 30 m de altura se lanza un objeto de masa 0,10 kg con una velocidad de 16 m/s en una dirección que forma un ángulo de 45° con la horizontal. ¿Cuál es la energía total (cinética y potencial) después del lanzamiento? ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentra a 10 m sobre el suelo? No tomar en consideración la resistencia del aire.

Solución

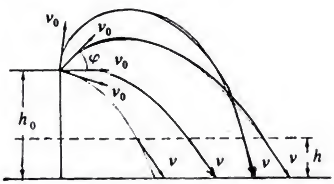
1)

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}1 \times 16^2 = 12{,}8 \text{ J} \\ U_0 &= Mgh_0 = 0{,}1 \times 9{,}8 \times 30 = 29{,}4 \text{ J} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{W = T_0 + U_0 = 42{,}2 \text{ J}}$$

2)

$$T_0 + U_0 = T + U \Rightarrow \frac{1}{2} Mv_0^2 + Mgh_0 = \frac{1}{2} Mv^2 + Mgh$$

$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)} = \sqrt{16^2 + 2 \times 9{,}8\,(30 - 10)} = 25{,}45 \text{ m/s}}$$



Problema XI-3

Obsérvese que es independiente del ángulo de lanzamiento y, por tanto, el proyectil lanzado con la velocidad v_0 con un ángulo cualquiera tendrá la misma velocidad cuando se encuentre a 10 m del suelo.

Problema 4. Un cañón de 30 cm de diámetro y 15 m de longitud lanza un proyectil de 350 kg comunicándole una velocidad inicial de 900 m/s y llega al blanco con una velocidad de 540 m/s. Se supone que el movimiento del proyectil dentro del tubo del cañón es uniformemente acelerado, debido a la fuerza constante de los gases de combustión de la pólvora. Se desea saber:

1. Aceleración del proyectil dentro del tubo del cañón.
2. Tiempo invertido para recorrer la longitud del tubo del cañón.
3. Fuerza ejercida por los gases de la pólvora sobre el proyectil.
4. Presión de estos gases sobre la base del proyectil.
5. Energía cinética del proyectil a la salida del cañón y su llegada al blanco.
6. ¿A qué altura se encuentra el blanco?

Solución

1)

$$v_0 = \sqrt{2as} \Rightarrow a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{81 \times 10^4}{30} = 27\,000 \text{ m/s}^2$$

2)

$$v_0 = at \qquad \Rightarrow \; t = \frac{v_0}{a} = \frac{900}{27\ 000} = 3{,}3 \times 10^{-2}\mathrm{s}$$

3)

$$Fs = \frac{1}{2}\ Mv_0^2 \;\Rightarrow\; F = \frac{Mv_0^2}{2s} = \frac{350 \times 81 \times 10^4}{30} = 945 \times 10^4\ \mathrm{N}$$

4)

$$p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi r^2} = \frac{945 \times 10^4}{\pi 0{,}15^2}\ \mathrm{N/cm^2} = \frac{945 \times 10^4}{9{,}8\pi 15^2} = 1\ 364{,}18\ \mathrm{kp/cm^2}$$

5)

$$T_0 = \frac{1}{2}\ Mv_0^2 = \frac{1}{2}\ \frac{350}{9{,}8}\ 900^2 = 144{,}64 \times 10^5\ \mathrm{kgm}$$

$$T = \frac{1}{2}\ Mv^2 = \frac{1}{2}\ \frac{350}{9{,}8}\ 540^2 = 52{,}07 \times 10^5\ \mathrm{kgm}$$

6)

$$\left.\begin{array}{l} T_0 + U_0 = T + U \\ U_0 = 0 \end{array}\right| \ \frac{1}{2}\ Mv_0^2 = \frac{1}{2}\ Mv^2 + Mgh \;\Rightarrow\; h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{900^2 - 540^2}{2 \times 9{,}8} = 26\ 449\ \mathrm{m}$$

Problema 5. Se dispara un proyectil de 300 gramos con velocidad inicial de 400 m/s, formando un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular:

1. Alcance.

2. Energías cinética y potencial: a) al salir, b) a los 5 s, c) en el punto más elevado.

Solución

1)

$$x = \frac{v_0^2 \mathrm{sen} 2\varphi}{g} = \frac{16 \times 10^4 \mathrm{sen} 120°}{9{,}8} \simeq 14\ 139\ \mathrm{m}$$

2)

a) $T_0 = \frac{1}{2}\ Mv_0^2 = \frac{1}{2}\ \frac{0{,}3}{9{,}8}\ 16 \times 10^4 \simeq 2\ 449\ \mathrm{kgm}$

$U_0 = 0$

b)
$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \cos\varphi = 400\ \frac{1}{2} = 200\ \mathrm{m/s} \\ v_y = v_0 \mathrm{sen}\varphi - gt = 200\sqrt{3} - 9{,}8 \times 5 = 297\ \mathrm{m/s} \end{array}\right| \;\Rightarrow\; v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{200^2 + 297^2}\ \mathrm{m/s}$$

$$T = \frac{1}{2}\ Mv^2 = \frac{1}{2}\ \frac{0{,}3}{9{,}8}\ (200^2 + 297^2) = 1\ 962\ \mathrm{kgm}$$

$$T + U = \mathrm{ct^e} \;\Rightarrow\; T_0 = T + U \;\Rightarrow\; U = T_0 - T = 2\ 449 - 1\ 962 = 487\ \mathrm{kgm}$$

c) $T' = \frac{1}{2}\ Mv_x^2 = \frac{1}{2}\ Mv_0^2 \cos^2\varphi = \frac{1}{2}\ \frac{0{,}3}{9{,}8}\ 16 \times 10^4 \times 0{,}5^2 = 612\ \mathrm{kgm}$

$$T_0 = T + U = T' + U' \;\Rightarrow\; U' = T_0 - T' = 2\ 449 - 612 = 1\ 837\ \mathrm{kgm}$$

Problema 6. El calor de combustión del carbón vegetal es, aproximadamente, 8 000 cal/g. Calcular la masa de carbón que habría que quemar para elevar un bloque de piedra de una tonelada a una altura de 341,6 m si el calor se transformase íntegramente en energía mecánica.

Solución

La energía producida al quemarse M g de carbón es:

$$W = 8\,000 M \text{ cal} = 8\,000 \times 4{,}18\, M \text{ J}$$

expresado M en g.

La energía necesaria para elevar 1 000 kg a 341,6 m es:

$$W = Mgh = 10^3 \times 9{,}8 \times 341{,}6 \text{ J}$$

igualando y despejando M, nos queda:

$$\boxed{M = \frac{10^3 \times 9{,}8 \times 341{,}6}{8\,000 \times 4{,}18} \text{ g} = 100 \text{ g}}$$

Problema 7. Un camión cuya masa es de 10 t marcha a una velocidad de 60 km/h. Determinar:

1. Su energía cinética.

2. Cantidad de calor que se produce en sus frenos cuando se detiene por su acción.

Solución

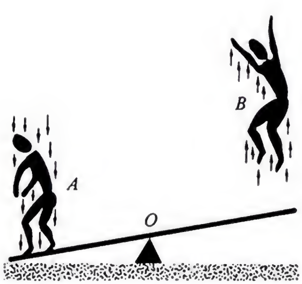
1)

$$v = \frac{60\,000}{3\,600} = \frac{50}{3} \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2}\, 10^4 \left(\frac{50}{3}\right)^2 = 1\,388\,889 \text{ J}}$$

2) Toda la energía calculada se ha transformado en calor, expresada ésta en cal:

$$\boxed{T = Q = \frac{1\,388\,889}{4{,}18} \text{ cal} = 332\,270 \text{ cal}}$$

Problema 8. Un atleta A, de 70 kg de masa, se lanza contra el extremo de un tablón apoyado en un punto, desde una altura de 3 m. En el otro extremo del tablón se encuentra un chico B, de 35 kg. Suponiendo que las 2/3 partes de la energía cinética de A se transmiten al chico B, calcular la altura a que éste ascenderá.



Problema XI-8

Solución

La energía potencial del atleta se transforma en cinética; 2/3 de ésta en cinética del chico B, y ésta en potencial de tal chico. En definitiva, los 2/3 de la energía potencial de A se transforman en energía potencial de B, en el punto más alto de su ascenso.

$$\frac{2}{3}\, Mgh = M'gh' \Rightarrow \boxed{h' = \frac{2Mh}{3M'} = \frac{2 \times 70 \times 3}{3 \times 35} = 4 \text{ m}}$$

Problema 9. Una bola de acero, cuya masa es de 500 g, cae sin velocidad inicial desde una altura desconocida sobre un plano horizontal. La velocidad en el momento del choque es de 44,25 m/s.

1. ¿Desde qué altura cae la bola?

2. Si después del choque la bola asciende hasta una altura de 15 m, ¿qué cantidad de calor se desprendió en el choque?

Solución

1)

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{44{,}25^2}{2 \times 9{,}8} = 100 \text{ m}$$

2) La energía transformada en calor en el choque con el suelo es:

$$\Delta W = Mgh - Mgh' = Mg\,(h - h') = 0{,}5 \times 9{,}8 \times 85 \text{ J} = 0{,}5 \times 9{,}8 \times 85 \times 0{,}24 \text{ cal} = 100 \text{ cal}$$

Problema 10. Una pelota se deja caer al suelo desde 2 m de altura. Suponiendo que en cada choque contra el suelo se pierde en forma de calor el 10 % de la energía cinética, calcular la velocidad de la pelota a la salida del segundo choque y la altura a que llega después de realizado éste.

Solución

En el primer choque llega al suelo con una energía cinética igual a la primitiva potencial, de valor:

$$U = Mgh$$

cuyo 90 % se transforma en potencial, al llegar la pelota al punto más alto de su trayecto, y vuelve a transformarse en cinética durante la caída; en el nuevo choque vuelve a perder un 10 % de la energía cinética que lleva, saliendo del segundo choque con una energía cinética:

$$\frac{1}{2} Mv^2 = 0{,}9 \times 0{,}9Mgh \qquad [1]$$

a la que corresponde una velocidad:

$$v^2 = 2 \times 0{,}9 \times 0{,}9gh = 1{,}62gh \quad \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{1{,}62 \times 9{,}8 \times 2} \text{ m/s} = 5{,}63 \text{ m/s}}$$

La energía cinética de la pelota a la salida del segundo choque [1] se transforma en potencial:

$$0{,}9 \times 0{,}9Mgh = Mgh'$$

a la que corresponde una altura:

$$\boxed{h' = 0{,}9 \times 0{,}9h = 0{,}81 \times 2 = 1{,}62 \text{ m} = 1{,}62 \text{ m}}$$

Problema 11. Un motor eléctrico cuyo rendimiento es del 85 % tiene que accionar un montacargas que pesa vacío 437 kg y que puede cargarse con 1 537 kg más. El montacargas tiene que elevarse hasta 24,6 m de altura, tardando en ello 35 s. ¿Cuál ha de ser la potencia media del motor? Si el arranque, tiempo que tarda en adquirir la velocidad de ascensión, dura 2,1 s. ¿Qué potencia precisa tener el motor durante este período? ¿Y cuál es la potencia que necesita tener en el descenso del montacargas en vacío y a la misma velocidad?

Solución

1)

$$\boxed{P = \frac{(M_1 + M_2)gh}{t\eta} = \frac{(437 + 1\,537)\ 24{,}6}{35 \times 0{,}85 \times 75} = 21{,}76 \text{ CV}}$$

2)

$$P = \frac{(M_1 + M_2)gh_1 + \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2}{t_1 \eta}$$

Supuesto un movimiento uniformemente acelerado hasta alcanzar la velocidad de régimen v con la que continúa en la segunda etapa, tendremos:

$$t_1 = 2{,}1 \text{ s} \qquad t_2 = 32{,}9 \text{ s} \qquad h = 24{,}6 \text{ m}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} v t_1 \qquad h_2 = v t_2 \qquad h = h_1 + h_2$$

$$24{,}6 = \frac{1}{2} v 2{,}1 + v 32{,}9 \Rightarrow v = 0{,}73 \text{ m/s}$$

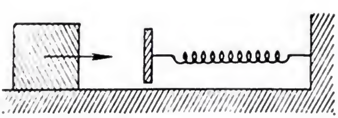
$$h_1 = \frac{1}{2} v t_1 = \frac{1}{2} 0{,}73 \times 2{,}1 = 0{,}76 \text{ m}$$

luego:

$$\boxed{P = \frac{(437 + 1\,537)\ 0{,}76 + \frac{1}{2}\,\frac{437 + 1\,537}{9{,}8}\,0{,}73^2}{2{,}1 \times 0{,}85 \times 75} = 11{,}61 \text{ CV}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} P = Fv \\ F = Mg \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{P = \frac{Mgv}{\eta} = \frac{437 \times 0{,}73}{0{,}85 \times 75} \text{ CV} = 5 \text{ CV}}$$



Problema XI-12

Problema 12. Una masa de 5 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, con la velocidad de 4 m/s, y choca frontalmente con un muelle elástico de masa despreciable y de constante recuperadora 1 kp/cm. Determinar:
1. La energía cinética del sistema en el momento en que la masa alcanza el muelle.
2. La compresión máxima del muelle.
3. Velocidad de la masa cuando el muelle se ha comprimido 10 cm.

Solución

1)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} 5 \times 16 = 40 \text{ J}}$$

2) El trabajo efectuado al comprimirse el resorte una distancia x a partir de su longitud inicial es:

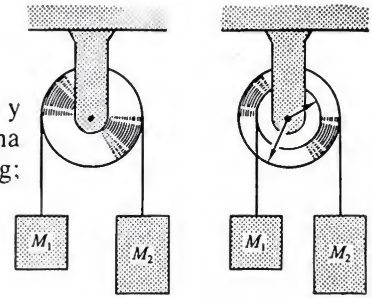
$$W = \frac{1}{2} Kx^2$$

luego:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Kx_M^2 \Rightarrow \boxed{x_M = \sqrt{\frac{2T}{K}} = \sqrt{\frac{2 \times 40}{980}} \simeq 0{,}28 \text{ m} = 28 \text{ cm}}$$

3)

$$\frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Mv'^2 \Rightarrow \boxed{v' = \sqrt{v^2 - \frac{Kx^2}{M}} = \sqrt{16 - \frac{980 \times 10^{-2}}{5}} = 3{,}7 \text{ m/s}}$$

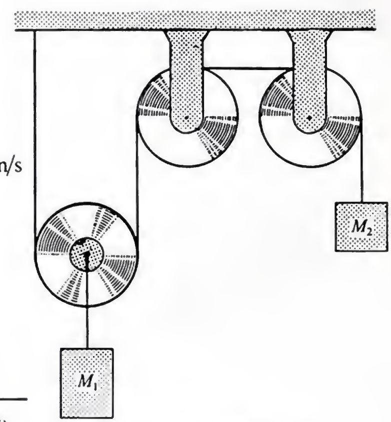


Problema 13. En los sistemas representados en la figura los pesos de los cables y poleas son despreciables. Determinar la velocidad v_2 de la masa M_2 cuando se ha movido h_2 a partir de la posición de reposo. $M_1 = 100$ kg; $M_2 = 1\,000$ kg; $h_2 = 2$ m; $r_2 = 2r_1$.

Solución

La ecuación de la energía en todos los casos es:

$$\boxed{M_2gh_2 = \frac{1}{2} M_2v_2^2 + M_1gh_1 + \frac{1}{2} M_1v_1^2}$$



Problema XI-13

1)

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_2 \\ h_1 = h_2 \end{array}\right| \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh_2 \frac{M_2 - M_1}{M_1 + M_2}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2 \frac{1\,000 - 100}{1\,000 + 100}} = 5{,}7 \text{ m/s}$$

2)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow M_2gh_2 = \frac{1}{2} M_2v_2^2 + M_1g \frac{r_1}{r_2} h_2 + \frac{1}{2} M_1 \frac{r_1^2}{r_2^2} v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2 \frac{M_2 - \frac{r_1}{r_2} M_1}{M_2 + \frac{r_1^2}{r_2^2} M_1}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2 \frac{1\,000 - \frac{1}{2} 100}{1\,000 + \frac{1}{4} 100}} = 6 \text{ m/s}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = 2v_2 \\ h_1 = 2h_2 \end{array}\right| \Rightarrow M_2gh_2 = \frac{1}{2} M_2v_2^2 + 2M_1gh_2 + 2M_1v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_2 \frac{M_2 - 2M_1}{M_2 + 4M_1}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2 \frac{1\,000 - 2 \times 100}{1\,000 + 4 \times 100}} = 4{,}7 \text{ m/s}$$

Problema 14. Un ciclista con su bici pesa 80 kp. Partiendo del reposo y sobre un camino horizontal, tarda un minuto en alcanzar la velocidad de 18 km/h ejerciendo una fuerza que supondremos constante. Los rozamientos equivalen en total a una fuerza constante de 15 kp.

1. Calcular la fuerza motriz ejercida por el ciclista.

2. Calcular el trabajo realizado por el ciclista durante el primer minuto y la potencia media que ha desarrollado.

3. Si una vez alcanzada la velocidad de 18 km/h deja de pedalear, ¿qué distancia recorrerá en esas condiciones? El camino es horizontal.

Solución

1)

$$v = 5 \text{ m/s}$$

$$Fs = \frac{1}{2} Mv^2 + Rs$$

$$s = \frac{1}{2} vt$$

$$\boxed{F = \frac{Mv^2}{2s} + R = \frac{Mv}{t} + R = \frac{80 \times 5}{9,8 \times 60} + 15 = 15,68 \text{ kp}}$$

2)

$$\boxed{W = Fs = \frac{Fvt}{2} = \frac{15,68 \times 5 \times 60}{2} = 2\,352 \text{ kgm}}$$

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{2\,352}{60} = 39,2 \text{ kgm/s}}$$

3)

$$W = Rs' = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow \boxed{s' = \frac{Mv^2}{2R} = \frac{80 \times 25}{9,8 \times 2 \times 15} = 6,8 \text{ m}}$$

Problema 15. Un automóvil de 1 425 kg de masa parte del reposo sobre una pista horizontal. Suponiendo que la resistencia al avance es constante y vale 15 kg, calcular:

1. La aceleración que es preciso comunicar al auto para alcanzar la velocidad de 120 km/h en 800 m.

2. El trabajo que habrá realizado el motor desde el momento de partir hasta que alcanza la velocidad de 120 km/h.

3. La potencia que desarrolla el motor en el momento en que ha alcanzado los 120 km/h.

4. En el preciso instante en que se alcanza la velocidad de 120 km/h desconectamos el amotor de la transmisión, ¿qué trayecto recorrerá aún el auto hasta pararse?, ¿cuánto tiempo tardará en pararse?

Solución

$$v = 120 \text{ km/h} = \frac{120\,000}{3\,600} \text{ m/s} = \frac{100}{3} \text{ m/s}$$

1)

$$v = \sqrt{2as} \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = \frac{10^4}{9 \times 2 \times 800} = \frac{25}{36}\ \text{m/s}^2$$

2)

$$W = Fs = \frac{1}{2} Mv^2 + Rs = \frac{1}{2}\ \frac{1\,425}{9{,}8}\ \frac{10^4}{9} + 15 \times 800 = 92\,782{,}3\ \text{kgm}$$

3)

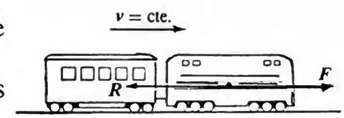
$$\left.\begin{array}{l} P = Fv \\ \\ F - R = Ma \end{array}\right| \quad P = (R + Ma)v = \left(15 + \frac{1\,425}{9{,}8}\ \frac{25}{36}\right) \frac{100}{3 \times 75} = 51{,}5\ \text{CV}$$

4)

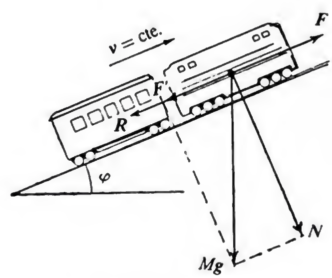
$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2}\ Mv^2\right) \Rightarrow Rs = \frac{1}{2}\ Mv^2 \Rightarrow s = \frac{Mv^2}{2R} = \frac{1\,425 \times 10^4}{9 \times 2 \times 15 \times 9{,}8}\ \text{m} = 5\,385\ \text{m}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{d(M\boldsymbol{v})}{dt} \Rightarrow Rt = Mv \Rightarrow t = \frac{Mv}{R} = \frac{1\,425 \times 100}{3 \times 15 \times 9{,}8}\ \text{s} = 323{,}1\ \text{s}$$

Problema 16. Una locomotora arrastra un tren de 500 t. Sabiendo que en conjunto las resistencias equivalen a 5 kg por tonelada. Calcular:
1. El esfuerzo de tracción, a velocidad constante en horizontal.
2. Si alcanza 72 km/h en 100 m, ¿cuál será el esfuerzo durante este período de aceleración constante?
3. Calcular también el esfuerzo de tracción subiendo una cuesta de 10 milésimas (se eleva 10 m por kilómetro) a 72 km/h.



Problema XI-16-1.ª



Problema XI-16-2.ª

Solución

$$v = 72\ \text{km/h} = 20\ \text{m/s}$$

1)

$$F = R = 5 \times 500 = 2\,500\ \text{kp}$$

2)

$$Fs = \frac{1}{2}\ Mv^2 + Rs \Rightarrow F = \frac{Mv^2}{2s} + R = \frac{5 \times 10^5\ 20^2}{9{,}8 \times 2 \times 100} + 2\,500 = 104\,540\ \text{kp}$$

3)

$$F = F' + R = Mg\,\text{sen}\varphi + R = 5 \times 10^5\ \frac{10}{1\,000} + 2\,500 = 7\,500\ \text{kp}$$

Problema 17. Se ha de arrastrar por el suelo un fardo que pesa 100 kg aplicando una fuerza de 50 kp (coeficiente de rozamiento $\mu = 0{,}3$). ¿En cuál de las siguientes direcciones nos convendrá aplicarla para conseguir mayor efecto?:
1. Tirando horizontalmente.
2. Tirando hacia arriba en dirección que forme un ángulo de 30° con la horizontal.

3. Empujando hacia abajo también en dirección 30° con la horizontal. Calcular en uno cualquiera de los casos anteriores la producción de calor por rozamiento si el fardo se arrastra 10 m.

Solución

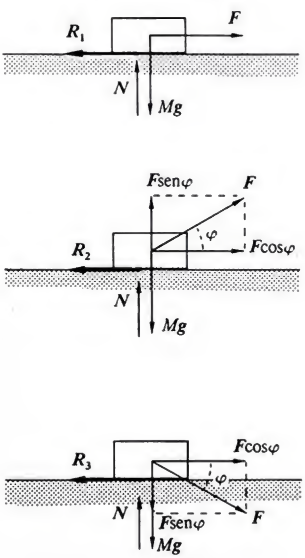


Figura XI-17

1)

$$\left.\begin{aligned} F - R_1 &= Ma_1 \\ R_1 &= \mu Mg \end{aligned}\right| \Rightarrow F_1 = Ma_1 = F - \mu Mg = 50 - 0{,}3 \times 100 = 20 \text{ kp}$$

El trabajo que se transforma en calor debido al rozamiento en los 10 m de recorrido es:

$$W_1 = R_1 s = \mu Mgs = 0{,}3 \ \frac{100}{9{,}8} \ 9{,}8 \times 10 = 300 \text{ kgm}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} F\cos\varphi - R_2 &= Ma_2 \\ R_2 &= \mu(Mg - F\text{sen}\varphi) \end{aligned}\right| \Rightarrow F_2 = Ma_2 = F\cos\varphi - \mu(Mg - F\text{sen}\varphi)$$

$$F_2 = 50 \ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}3 \left(100 - 50 \ \frac{1}{2}\right) = 20{,}8 \text{ kp}$$

el trabajo disipado en forma de calor es:

$$W_2 = R_2 s = \mu \, (Mg - F \, \text{sen}\varphi) \, s = 0{,}3 \left(100 - 50 \ \frac{1}{2}\right) 10 = 225 \text{ kgm}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} F\cos\varphi - R_3 &= Ma_3 \\ R_3 &= \mu(Mg + F\text{sen}\varphi) \end{aligned}\right| \Rightarrow F_3 = Ma_3 = F\cos\varphi - \mu(Mg + F\text{sen}\varphi)$$

$$F_3 = 50 \ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}3 \left(100 + 50 \ \frac{1}{2}\right) = 5{,}8 \text{ kp}$$

y la energía disipada en forma de calor por rozamiento es:

$$W_3 = R_3 s = \mu(Mg + F\text{sen}\varphi)s = 0{,}3 \left(100 + 50 \ \frac{1}{2}\right) 10 = 375 \text{ kgm}$$

> La fuerza activa mayor, productora de la mayor aceleración, corresponde al caso 2, que es, también, en el que se disipa menor energía.

Problema 18. Desde lo alto de un plano inclinado 30° sobre la horizontal se deja caer un cuerpo de masa 1 kg que desliza sobre el plano, siendo el coeficiente de rozamiento 0,2. Determinar:

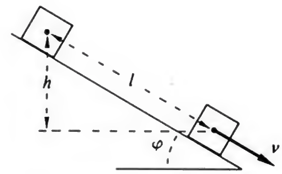
1. Aceleración de bajada.
2. Tiempo que tarda en recorrer 10 metros en el plano.
3. Velocidad final recorridos los 10 metros.

Solución

El problema se puede resolver aplicando la dinámica, pero lo resolveremos por consideraciones energéticas.

$$U = T + W_{\text{rozamiento}} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2} Mv^2 + \mu Mgl \cos\varphi \\ h = l \operatorname{sen}\varphi \end{array} \right| gl \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2} v^2 + \mu gl \cos\varphi$$

$$v = \sqrt{2gl(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)} = \sqrt{2al}$$



Problema XI-18

1)

$$\boxed{a = g\,(\operatorname{sen}\varphi - \mu \cos\varphi) = 9{,}8\left(0{,}5 - 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3{,}2 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$l = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2\,l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 10}{3{,}2}} = 2{,}5 \text{ s}}$$

3)

$$\boxed{v = \sqrt{2 \times 3{,}2 \times 10} = 8 \text{ m/s}}$$

Problema 19. Para descargar de un camión un fardo de 100 kg es necesario inclinar el suelo del camión un ángulo de 60°. Calcular:
1. El coeficiente de rozamiento entre el fardo y el suelo del camión.
2. El calor que produce el rozamiento del fardo durante la descarga y en un recorrido de 2 m.

Solución

1) Si queremos hacer un esfuerzo mínimo (en este caso, nulo), dejamos que el cuerpo, por esa pendiente de 60°, deslice con movimiento uniforme, de esta manera la componente del peso paralela al suelo del camión y la fuerza de rozamiento serán iguales:

$$Mg\operatorname{sen}\varphi = \mu Mg\cos\varphi \Rightarrow \boxed{\mu = \text{tag}60° = \sqrt{3}}$$

2)

$$W = Rl = \mu Mgl\cos\varphi = \sqrt{3} \times 100 \times 9{,}8 \times 2 \times 0{,}5 = 1\,697{,}4 \text{ J}$$

que, expresado en calorías:

$$\boxed{W = \frac{1\,697{,}4}{4{,}18} = 406 \text{ cal}}$$

Problema 20. Un cuerpo de 2 kg se desliza por una rampa inclinada 45° sobre la horizontal, siendo el coeficiente de rozamiento de 0,2. Calcular:

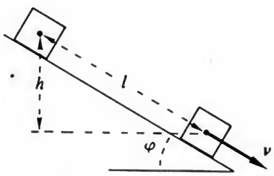
1. Espacio recorrido al cabo de 3 s de iniciarse el movimiento.

2. Velocidad al cabo de dicho tiempo.

3. Valor que debería tener el coeficiente de rozamiento para que descendiera con movimiento uniforme.

4. En este caso, ¿cuánto valdría el calor desprendido por causa del rozamiento, en un recorrido de 10 m?

Solución



Problema XI-20

1)

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + W_R$$

$$h = l\,\text{sen}\varphi$$

$$l = \frac{1}{2} vt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2l}{t}$$

$$W_R = \mu Mgl\cos\varphi$$

$$Mgl\,\text{sen}\varphi = \frac{1}{2} M \frac{4l^2}{t^2} + \mu Mgl\cos\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{l = \frac{gt^2(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{2} = \frac{9{,}8 \times 9 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0{,}2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = 25 \text{ m}}$$

2)

$$\boxed{v = \frac{2l}{t} = \frac{2 \times 25}{3} \simeq 16{,}7 \text{ m/s}}$$

3)

$$\boxed{\mu = \text{tag}\varphi = \text{tag}45° = 1}$$

4)

$$W_R = \mu Mgl\cos\varphi = 2 \times 9{,}8 \times 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 138{,}6 \text{ J}$$

que, expresado en calorías, es:

$$\boxed{W_R = \frac{138{,}6}{4{,}18} \text{ cal} = 33{,}2 \text{ cal}}$$

Problema 21. En lo alto de un plano inclinado cuya longitud es 20 m y cuya inclinación es 30° abandonamos un cuerpo, dejándolo en reposo, para que deslice libremente. El cuerpo pesa 10 kg y el coeficiente de rozamiento vale 0,2. Calcular:

1. La aceleración de caída del cuerpo a lo largo del plano.

2. El tiempo que tardará en llegar al suelo.

3. La energía cinética con que llegará al suelo.

4. El calor producido por el rozamiento hasta llegar al suelo.

Solución

1) (Ver figura dei problema anterior.)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2} Mv^2 + W_R \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \\ W_R = \mu Mgl\cos\varphi \end{array}\right| \; Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2} Mv^2 + \mu Mgl\cos\varphi$$

$$v = \sqrt{2gl(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)} = \sqrt{2al}$$

$$\boxed{a = g(\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi) = 9{,}8\left(\frac{1}{2} - 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 3{,}20 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$l = \frac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 20}{3{,}20}} = 3{,}5 \text{ s}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{1}{2} Mv^2 \\ v = \sqrt{2al} \end{array}\right| \; \boxed{T = \frac{1}{2} M2al = Mal = 10 \times 3{,}20 \times 20 = 640 \text{ J}}$$

4)

$$W_R = \mu Mgl\cos\varphi = 0{,}2 \times 10 \times 9{,}8 \times 20\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 339{,}48 \text{ J}$$

que, expresado en calorías, es:

$$\boxed{W_R = \frac{339{,}48}{4{,}18} = 81{,}2 \text{ cal}}$$

Problema 22. Un cuerpo de masa 100 g se impulsa a lo largo de un plano inclinado 30° con velocidad instantánea de 5 m/s, ascendiendo por el plano y al final se para. El coeficiente de ronzamiento del cuerpo con el plano es de 0,2. Determinar:

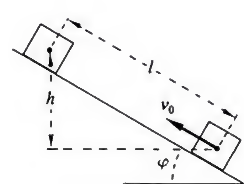
1. La longitud de plano que recorre el cuerpo hasta que se detiene.
2. Trabajo de la fuerza de rozamiento.
3. Aumento de la energía potencial del cuerpo en el momento en que se para.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} Mv_0^2 = Mgh + Rl \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \\ R = \mu Mg\cos\varphi \end{array}\right| \; \frac{1}{2} Mv_0^2 = Mgl\operatorname{sen}\varphi + \mu Mgl\cos\varphi$$

$$\boxed{l = \frac{v^2}{2g(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)} = 1{,}9 \text{ m}}$$



Problema XI-22

2)

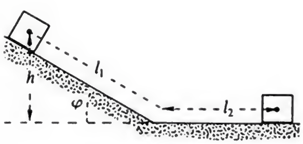
$$\boxed{W_R = Rl = \mu Mgl\cos\varphi = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 1{,}9\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}03 \text{ kgm}}$$

3)

$$\boxed{U = Mgh = Mgl\,\text{sen}\varphi = 0{,}1 \times 1{,}9\,\frac{1}{2} = 0{,}09 \text{ kgm}}$$

Problema 23. Un cuerpo de masa 10 kg desliza bajando sobre un plano inclinado 30° sobre la horizontal. El plano tiene una longitud de 5 m y a continuación de él hay un plano horizontal. El coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano es de 0,25 y del cuerpo con el plano horizontal de 0,3. El cuerpo empieza a moverse desde la parte superior del plano inclinado. Determinar:

1. Velocidad del cuerpo al llegar al plano horizontal.
2. Espacio recorrido en el plano horizontal hasta que se para.
3. Cantidad de calor desarrollada como consecuencia del rozamiento.



Problema XI-23

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2}Mv^2 + W_{R_1} \\ h &= l_1\,\text{sen}\varphi \\ W_{R_1} &= \mu_1 Mgl_1\cos\varphi \end{aligned}\right| \quad Mgl_1\,\text{sen}\varphi = \frac{1}{2}Mv^2 + \mu_1 Mgl_1\cos\varphi$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gl_1(\text{sen}\varphi - \mu_1\cos\varphi)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 5\left(\frac{1}{2} - 0{,}25\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 5{,}3 \text{ m/s}}$$

2)

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \mu_2 Mgl_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{l_2 = \frac{v^2}{2\mu_2 g} = \frac{5{,}3^2}{2 \times 0{,}3 \times 9{,}8} = 4{,}7 \text{ m}}$$

3) Llamando W_{R_1} al trabajo del rozamiento en el plano inclinado y W_{R_2} en el horizontal:

$$W = W_{R_1} + W_{R_2} = Mg(\mu_1 l_1\cos\varphi + \mu_2 l_2) = 10 \times 9{,}8\left(0{,}25 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 0{,}3 \times 4{,}7\right) = 244 \text{ J}$$

expresado en calorías:

$$\boxed{W = \frac{244}{4{,}18} = 58{,}4 \text{ cal}}$$

Problema 24. Se tiene un plano inclinado sobre la horizontal 30° y de longitud 10 m. ¿Qué velocidad paralela al plano debe de comunicarse a un cuerpo que pesa 1 kg para que al llegar al final del plano su velocidad sea cero? El coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano vale 0,1. ¿Qué tiempo ha tardado el cuerpo en recorrer el plano? El cuerpo, una vez que se ha parado, inicia el descenso por la acción de su propio peso. ¿Qué velocidad tendrá al llegar al punto donde partió?

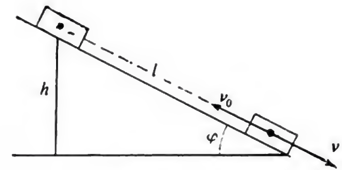
Solución

$$T_0 = U + W_{\text{rozamiento}}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} M v_0^2 = Mgh + \mu Mgl\cos\varphi \\ h = l\,\text{sen}\varphi \end{array}\right| \quad \frac{1}{2} v_0^2 = gl\,\text{sen}\varphi + \mu gl\cos\varphi$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gl(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)} = 10{,}7 \text{ m/s}}$$



Problema XI-24

2)

$$l = \frac{1}{2} vt \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2l}{v_0} = 1{,}9 \text{ s}}$$

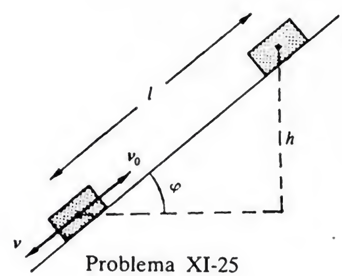
3)

$$T_0 = T + W_{\text{rozamiento}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv^2 + 2\mu Mgl\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gl\cos\varphi} = 9 \text{ m/s}}$$

Problema 25. Sobre un plano inclinado un ángulo de 30° con la horizontal se lanza hacia arriba y por la línea de máxima pendiente un cuerpo de masa 100 g y velocidad inicial de 10 m/s. Siendo el coeficiente de rozamiento del cuerpo con el plano 0,2. Determinar:

1. Espacio que recorre el cuerpo sobre el plano hasta que se para.
2. Incremento de la energía potencial del cuerpo en ese momento.
3. Calor desprendido por efecto del rozamiento.
4. Alcanzada la altura máxima, el cuerpo desciende; ¿cuál es su velocidad al pasar por la posición inicial?

Solución



Problema XI-25

1)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} M v_0^2 = Mgh + W_R \\ h = l\,\text{sen}\varphi \\ W_R = \mu Mgl\cos\varphi \end{array}\right| \quad \frac{1}{2} Mv_0^2 = Mgl\,\text{sen}\varphi + \mu Mgl\cos\varphi$$

$$\boxed{l = \frac{v_0^2}{2g(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)} = \frac{100}{2 \times 9{,}8\left(\frac{1}{2} + 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 7{,}6 \text{ m}}$$

2)

$$\boxed{\Delta U = Mgh = Mgl\,\text{sen}\varphi = 0{,}1 \times 9{,}8 \times 7{,}6 \times 0{,}5 = 3{,}7 \text{ J}}$$

3)

$$W_R = \mu Mgl\cos\varphi = 0{,}2 \times 0{,}1 \times 9{,}8 \times 7{,}6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1{,}3 \text{ J}$$

que, expresado en calorías:

$$\boxed{W_R = \frac{1{,}3}{4{,}18} \text{ cal} = 0{,}3 \text{ cal}}$$

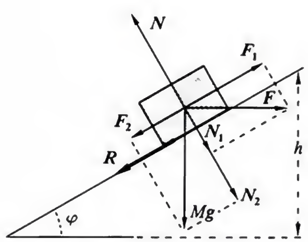
4)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}Mv_0^2 = \dfrac{1}{2}Mv^2 + W_R \\ W_R = 2\mu Mgl\cos\varphi \\ l = \dfrac{v_0^2}{2g(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}Mv_0^2 = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{\mu M v_0^2\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi} \quad \Rightarrow \\ v = v_0\sqrt{1 - \dfrac{2\mu\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi}} = v_0\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}\varphi - \mu\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi}} \end{array}$$

$$\boxed{v = 10\sqrt{\frac{1 - 0{,}2\sqrt{3}}{1 + 0{,}2\sqrt{3}}} = 6{,}9 \text{ m/s}}$$

Problema 26. A lo largo de un plano inclinado un ángulo φ, cuya tagφ = 0,3, y de coeficiente dinámico de rozamiento entre la superficie del plano y el móvil $\mu = 0{,}3$, se desplaza un cuerpo que pesa 100 kp. La altura del plano es de 50 m. Calcular:

1. Fuerza mínima horizontal necesaria para subirlo con movimiento uniforme.
2. Fuerza paralela al plano para subir el mismo en 10 s con movimiento uniformemente acelerado.
3. Trabajo desarrollado y en qué se ha invertido.
4. Potencia media desarrollada.



Problema XI-26

Solución

1)

$$F_1 = F_2 + R \left| \begin{array}{l} F_1 = F\cos\varphi \\ F_2 = Mg\operatorname{sen}\varphi \\ R = \mu(N_1 + N_2) = \mu[Mg\cos\varphi + F\operatorname{sen}\varphi] \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$F\cos\varphi = Mg\operatorname{sen}\varphi + \mu Mg\cos\varphi + \mu F\operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \quad F = Mg\operatorname{tag}\varphi + \mu Mg + \mu F\operatorname{tag}\varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{F = Mg\frac{\mu + \operatorname{tag}\varphi}{1 - \mu\operatorname{tag}\varphi} = 100\frac{0{,}3 + 0{,}3}{1 - 0{,}3 \times 0{,}3} = 66 \text{ kp}}$$

2) y 3) El trabajo de la fuerza F se emplea en aumentar la energía potencial al subir el cuerpo a la altura h, en la energía cinética adquirida al final del plano y en el trabajo de la fuerza de rozamiento.

$$\left.\begin{array}{l} Fl = Mgh + \dfrac{1}{2}Mv^2 + \mu Mgl\cos\varphi \\ l = \dfrac{h}{\operatorname{sen}\varphi} \\ l = \dfrac{1}{2}vt \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{2l}{t} = \dfrac{2h}{t\operatorname{sen}\varphi} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{Fh}{\operatorname{sen}\varphi} = Mgh + \frac{1}{2}M\frac{4h^2}{t^2\operatorname{sen}^2\varphi} + \frac{\mu Mgh\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$F = M\left[g\operatorname{sen}\varphi + \frac{2h}{t^2\operatorname{sen}\varphi} + \mu g\cos\varphi\right]$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{\operatorname{tag}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2\varphi}} = 0{,}29 \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tag}^2\varphi}} = 0{,}96$$

$$\boxed{F = \frac{100}{9{,}8}\left[9{,}8 \times 0{,}29 + \frac{2 \times 50}{10^2 \times 0{,}29} + 0{,}3 \times 9{,}8 \times 0{,}96\right] = 93 \text{kp}}$$

$$\boxed{W = Fl = \frac{Fh}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{93 \times 50}{0{,}29} = 16\,034 \text{ kgm}}$$

4)

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{16\,034}{10} = 1\,603{,}4 \text{ kgm/s} = 21{,}37 \text{ CV}}$$

Problema 27. Un bloque de 5 kg se lanza hacia arriba, por la línea de máxima pendiente, sobre un plano inclinado 37°, con una velocidad inicial de 9,8 m/s. Se observa que recorre una distancia de 6 m y después desliza hacia abajo hasta el punto de partida. Calcular la fuerza de rozamiento que actúa sobre sobre el bloque y la velocidad de éste cuando vuelve a su posición inicial.

Solución

1)

$$T_0 = U + W_{\text{rozamiento}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M v_0^2 = Mgl\operatorname{sen}\varphi + Rl$$

$$\boxed{R = M\left[\frac{v_0^2}{2l} - g\operatorname{sen}\varphi\right] = 5\left[\frac{9{,}8^2}{2 \times 6} - 9{,}8\operatorname{sen}37°\right] = 10{,}5 \text{ N}}$$

2)

$$T_0 = T + \text{trabajo del rozamiento al subir y bajar}$$

$$\frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + 2Rl \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4Rl}{M}} = \sqrt{9{,}8^2 - \frac{4 \times 10{,}5 \times 6}{5}} = 6{,}7 \text{ m/s}}$$

Problema 28. Por un plano inclinado 30° sobre la horizontal se lanza hacia arriba un cuerpo de masa 5 kg con una velocidad de 10 m/s, siendo el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano 0,2.

1. ¿Cuál será la aceleración de su movimiento?
2. ¿Qué espacio recorre hasta que se para?
3. ¿Qué tiempo tarda en pararse?
4. Una vez que se para empieza a descender, ¿con qué velocidad pasa por el punto de partida?

Solución

1)

$$T_0 = U + W_{\text{rozamiento}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M v_0^2 = Mgl\operatorname{sen}\varphi + \mu Mgl\cos\varphi$$

$$v_0 = \sqrt{2gl(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)} = \sqrt{2|a|l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|a| = g(\operatorname{sen}\varphi + \mu\cos\varphi) = 9{,}8\left(\frac{1}{2} + 0{,}2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6{,}6 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$v_0 = \sqrt{2|a|l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = \frac{v_0^2}{2|a|} = \frac{100}{13{,}2} = 7{,}6 \text{ m}}$$

3)

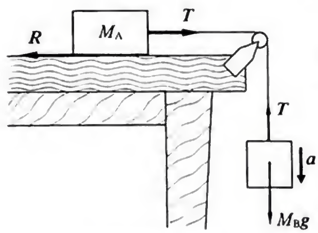
$$v_0 = |a|t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{v_0}{|a|} = \frac{10}{6{,}6} = 1{,}5 \text{ s}}$$

4)

$$T_0 = T + W_{\text{rozamiento}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} M v^2 + 2\mu Mgl\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 - 4\mu gl\cos\varphi} = 7 \text{ m/s}}$$

Problema 29. Un cuerpo A de 10 kg reposa sobre una mesa horizontal, y está unido mediante un hilo que pasa por la garganta de una polea, situada en el borde de la mesa, al cuerpo B, de 5 kg, que pende libremente como una plomada. Al dejar en libertad este sistema se pone espontáneamente en movimiento: el cuerpo B cae verticalmente, arrastrando en su caída al cuerpo A, que se deslizará horizontalmente sobre la mesa. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo A y la mesa es 0,2 y el peso de polea y cables son despreciables, calcular:

1. Velocidad del sistema después de un recorrido de los cuerpos de 50 cm.
2. Tensión del hilo durante la caída.
3. El calor desarrollado por el rozamiento en ese tiempo.



Problema XI-29

Solución

1) La energía potencial pérdida por el cuerpo B al descender 50 cm se emplea en energía cinética del sistema y en el trabajo de la fuerza de rozamiento que se transforma en calor; entonces:

$$M_Bgh = \frac{1}{2}(M_A + M_B)v^2 + \mu M_Ags \qquad h = s \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2g\frac{M_B - \mu M_A}{M_A + M_B}h} = \sqrt{2 \times 9{,}8\,\frac{5 - 0{,}2 \times 10}{5 + 10}\,0{,}5} = 1{,}4 \text{ m/s}}$$

2)

$$M_Bg - T = M_Ba \quad \Rightarrow \quad T = M_B(g - a)$$

$$v = \sqrt{2ah} \quad \Rightarrow \quad a = g\frac{M_B - \mu M_A}{M_A + M_B} = 1{,}96 \text{ m/s}^2 \qquad \boxed{T = 5(9{,}8 - 1{,}96) = 39{,}2 \text{ N}}$$

3)

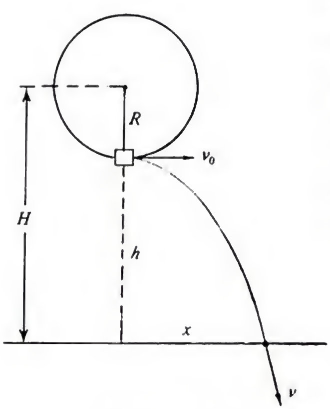
$$W_R = \mu M_Ags = 0{,}2 \times 10 \times 9{,}8 \times 0{,}5 = 9{,}8 \text{ J}$$

que, expresado en calorías:

$$\boxed{W_R = \frac{9{,}8}{4{,}18} = 2{,}34 \text{ cal}}$$

Problema 30. Con ayuda de una cuerda se hace girar un cuerpo de 1 kg en una circunferencia de 1 m de radio, situada en un plano vertical, cuyo centro está situado a 10,8 m por encima de un suelo horizontal. La cuerda se rompe cuando la tensión es de 11,2 kg, lo cual ocurre cuando el cuerpo está en el punto más bajo de su trayectoria. Se pide:

1. ¿Qué velocidad tiene el cuerpo cuando se rompe la cuerda?
2. ¿Cuánto tardará en caer al suelo?
3. ¿Cuál será su velocidad en el instante de chocar contra el suelo?



Problema XI-30

Solución

1)

$$T = F_c + Mg = \frac{Mv_0^2}{R} + Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{(T - Mg)R}{M}} = \sqrt{(11{,}2 - 1)9{,}8} = 10 \text{ m/s}}$$

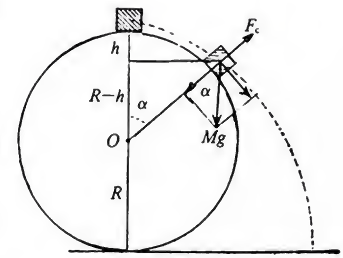
2)

$$h = \frac{1}{2} gt^2 \;\Rightarrow\; \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2}\ \text{s}}$$

3)

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 + Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 \;\Rightarrow\; \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{10^2 + 2 \times 9{,}8 \times 9{,}8} = 17\ \text{m/s}}$$

Problema 31. Desde el punto más alto de una esfera de radio R se desliza libremente sin rozamiento ni velocidad inicial un cuerpo de masa M.
1. Determinar el punto en que abandona la superficie esférica.
2. Calcular la energía cinética con que llegará al suelo. (Supongamos que la esfera está en reposo sobre un suelo horizontal.)



Problema XI-31

Solución

1) Abandonará la superficie esférica cuando la fuerza centrífuga se iguale a la componente normal del peso:

$$\frac{Mv^2}{R} = Mg\cos\alpha \qquad [1]$$

Aplicando $T + U = \text{ct}^{\text{e}}$, tomando como nivel cero de energía potencial el plano que contiene el punto donde el cuerpo abandona la superficie esférica, nos queda:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 \;\Rightarrow\; v^2 = 2gh$$

y como:

$$R - h = R\cos\alpha \;\Rightarrow\; h = R(1 - \cos\alpha)$$

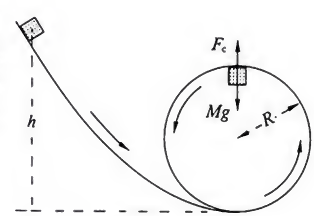
sustituyendo los valores de v^2 y h en la ecuación [1], tendremos:

$$2(1 - \cos\alpha) = \cos\alpha \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = 48^\circ\ 11'}$$

2) Tomando como nivel cero de energía potencial en el plano en que se apoya la esfera, nos queda:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = 2MgR}$$

Problema 32. El pequeño cuerpo A, de masa 1 kg, «riza el rizo» en una pista circular vertical de 1 m de radio. Calcular la mínima energía cinética que debe tener en el punto más alto (B) del trayecto circular y la altura mínima desde la que se debe dejar caer para que describa el rizo. (Se suponen nulos los rozamientos y que el cuerpo no está enganchado a la pista.)



Problema XI-32

Solución

En el punto más alto se ha de igualar el peso del cuerpo y la fuerza centrífuga, luego:

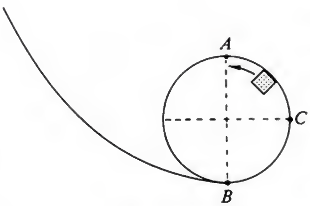
$$Mg = M\frac{v^2}{R} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{Rg} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{9{,}8} = 3{,}1\ \text{m/s}$$

La energía cinética será:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} MRg = \frac{1}{2} \frac{1}{9,8} 9,8 = 0,5 \text{ kgm}}$$

Tomando origen de energías potenciales en el plano que contiene al punto más bajo del trayecto, tendremos:

$$T + U = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad Mgh = Mg2R + \frac{1}{2} Mv^2 \quad \Rightarrow \boxed{h = 2R + \frac{1}{2} R = \frac{5}{2} R = 2,5 \text{ m}}$$



Problema XI-33

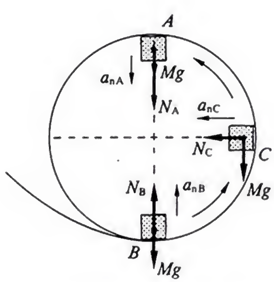
Problema 33. Lanzamos un cuerpo de 100 g de masa por el aparato de «rizar el rizo», cuya pista circular tiene 10 cm de radio; suponemos que el cuerpo no se encuentra enganchado a la pista y que desliza por ella sin rozamiento. Calcular:
1. La velocidad crítica en A para que dé vueltas.
2. La velocidad crítica en B para que dé vueltas.
3. La velocidad crítica en C para que dé vueltas.
4. La fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres puntos citados.

Solución

1) En A se tendrá que igualar el peso del cuerpo y la fuerza centrífuga para que justamente «rice el rizo»; luego:

$$Mg = M \frac{v_A^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = Rg \quad \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{Rg} = \sqrt{0,1 \times 10} = 1 \text{ m/s}}$$

2) Si en A tiene que poseer la velocidad antes calculada para que el cuerpo «rice el rizo» justamente, la velocidad en B la calcularemos aplicando el principio de conservación de la energía, tomando como origen de energías potenciales el plano horizontal que lo contiene, y tendremos:



Problema XI-33-1.ª

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} Mv_B^2 = \dfrac{1}{2} Mv_A^2 + Mgh \\ h = 2R \\ v_A = \sqrt{Rg} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{v_A^2 + 4gR} = \sqrt{5gR} = \sqrt{5} \text{ m/s}}$$

3) Tomando como nivel cero de energías potenciales al plano horizontal que contiene a C y haciendo las mismas consideraciones que en el apartado anterior, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2} Mv_C^2 = \dfrac{1}{2} Mv_A^2 + Mgh \\ h = R \\ v_A = \sqrt{Rg} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{v_A^2 + 2gR} = \sqrt{3gR} = \sqrt{3} \text{ m/s}}$$

4) Aplicando a los tres puntos la primera ecuación del movimiento en la dirección del radio de la pista, obtenemos:

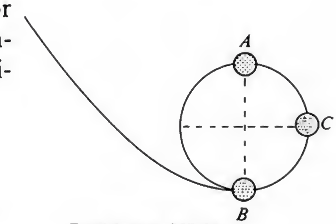
$$\left.\begin{array}{l} N_A + Mg = Ma_{nA} \\ a_{nA} = \dfrac{v_A^2}{R} = g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_A = 0}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_B - Mg = Ma_{nB} \\ a_{nB} = \dfrac{v_B^2}{R} = 5g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_B = 6Mg = 6 \times 0{,}1 \times 10 = 6 \text{ N}}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_C = Ma_{nC} \\ a_{nC} = \dfrac{v_C^2}{R} = 3g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_C = 3Mg = 3 \times 0{,}1 \times 10 = 3 \text{ N}}$$

Problema 34. Lanzamos un cuerpo de 100 g de masa enganchado a la pista por el aparato de «rizar el rizo», que tiene 0,1 m de radio y desliza por ella sin rozamiento. (Por ejemplo, una bolita ensartada a un alambre por el que puede deslizar.) Calcular:

1. La velocidad crítica en A para que dé vueltas.
2. La velocidad crítica en B para que dé vueltas.
3. La velocidad crítica en C para que dé vueltas.
4. La fuerza que la pista ejerce sobre el cuerpo en los tres puntos citados.



Problema XI-34

Solución

1) En A la velocidad mínima que puede tener para que «rice el rizo» el cuerpo es cero.

2) Toda la energía cinética en B tendrá que transformarse en potencial en A, condición para que justamente «rice el rizo», con lo que:

$$\frac{1}{2} Mv_B^2 = Mg2R \quad \Rightarrow \boxed{v_B = \sqrt{4gR} = \sqrt{4 \times 10 \times 0{,}1} = 2 \text{ m/s}}$$

3) Tomando como nivel de energías potenciales al plano horizontal que contiene a C, se obtiene:

$$\frac{1}{2} Mv_C^2 = MgR \quad \Rightarrow \boxed{v_C = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 10 \times 0{,}1} = \sqrt{2} \text{ m/s}}$$

4) Haciendo lo mismo que en el problema anterior y considerando la misma figura:

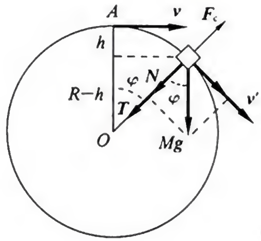
$$\left.\begin{array}{l} N_A + Mg = Ma_{nA} \\ a_{nA} = \dfrac{v_A^2}{R} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_A = -Mg = -0{,}1 \times 10 = -1 \text{ N}}$$

el signo menos nos indica que N_A va dirigida en sentido contrario al dibujado:

$$\left.\begin{array}{l} N_B - Mg = Ma_{nB} \\ a_{nB} = \dfrac{v_B^2}{R} = 4g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_B = 5Mg = 5 \times 0{,}1 \times 10 = 5 \text{ N}}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_C = Ma_{nC} \\ a_{nC} = \dfrac{v_C^2}{R} = 2g \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{N_C = 2Mg = 2 \times 0{,}1 \times 10 = 2 \text{ N}}$$

Problema 35. Damos vueltas a una piedra atada a una cuerda en una circunferencia vertical de radio R, y cuando ha adquirido una gran velocidad de rotación cesamos nuestros impulsos, girando así sin impulso alguno. Calcular las tensiones de la cuerda en cualquier punto y el exceso de tensión sobre la posición más alta. Suponemos conocida la velocidad en el punto más alto.



Problema XI-35

Solución

$$\text{Tensión} = F_c - N = M\,\frac{v'^2}{R} - Mg\cos\varphi$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}Mv^2 + Mgh = \frac{1}{2}Mv'^2 \;\Rightarrow\; v'^2 = v^2 + 2gh \\ R - h = R\cos\varphi \;\Rightarrow\; h = R(1-\cos\varphi) \end{array}\right| \; v'^2 = v^2 + 2gR(1-\cos\varphi)$$

$$\text{Tensión} = M\left[\frac{v^2 + 2gR(1-\cos\varphi)}{R} - g\cos\varphi\right]$$

Simplificando:

$$\boxed{\text{Tensión} = M\left[\frac{v^2}{R} + 2g - 3g\cos\varphi\right]}$$

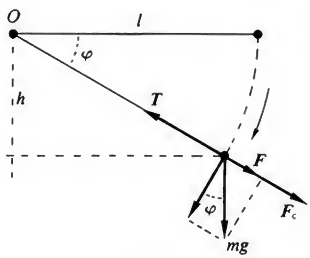
En el punto A, $\varphi = 0$, luego $\cos\varphi = 1$; nos queda:

$$\text{Tensión }(A) = M\left[\frac{v^2}{R} - g\right]$$

Luego el exceso de tensión en cualquier posición sobre la más alta será:

$$\boxed{\text{Tensión en cualquier punto} - \text{tensión }(A) = 3Mg(1-\cos\varphi)}$$

Problema 36. Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la prtícula. Determínese el ángulo que ha recorrido cuando la tensión del hilo es igual en magnitud al peso de ella.



Problema XI-36

Solución

$$\left.\begin{array}{l} T = F + F_c \\ F = mg\operatorname{sen}\varphi \\ F_c = \dfrac{mv^2}{l} \\ T = mg \end{array}\right| \;\Rightarrow\; g = g\operatorname{sen}\varphi + \frac{v^2}{l}$$

por otro lado:

$$\left.\begin{array}{l} mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; gl\operatorname{sen}\varphi = \frac{v^2}{2} \;\Rightarrow\; \frac{v^2}{l} = 2g\operatorname{sen}\varphi$$

luego:

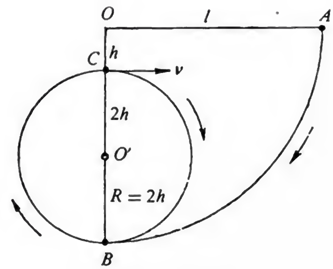
$$g = g\operatorname{sen}\varphi + 2g\operatorname{sen}\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{3} \;\Rightarrow \boxed{\varphi = 19°28'}$$

Problema 37. Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso apreciable de 2 m de largo. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la partícula y al pasar por la vertical encuentra un clavo O'. ¿Cuál debe ser la mínima distancia entre el punto de suspensión O y el clavo O' para que la partícula describa giros completos en torno a O'? (Despreciamos todos los rozamientos.)

Solución

En el punto más alto de la circunferencia de radio R se ha de verificar:

$$Mg = M\frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v^2 = Rg$$



Problema XI-37

Aplicando el principio de conservación de la energía en las posiciones A y C:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh$$

Igualando:

$$Rg = 2gh \quad \Rightarrow \quad R = 2h$$

de la figura obtenemos:

$$h = \frac{1}{5}l \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3h = \frac{3}{5}l = \frac{6}{5}\text{ m}}$$

Problema 38. Colgamos una partícula de un hilo inextensible y sin peso apreciable de 2 m de largo. Apartamos 90° de la posición de equilibrio la partícula, de forma que el hilo queda horizontal; soltamos la partícula y al pasar por la posición vertical encuentra un clavo O' colocado en el punto medio de la longitud del hilo. Determinar las coordenadas del punto en que la partícula dejará de tener trayectoria circular alrededor de O' y determinar la ecuación de su nueva trayectoria. (No considerar rozamientos.)

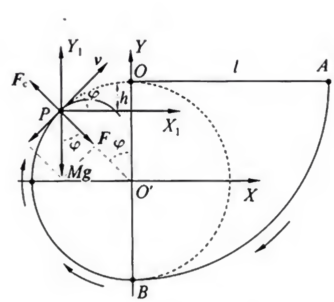
Solución

En el punto P en que la partícula abandona la trayectoria circular se ha de verificar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{Mv^2}{R} &= Mg\cos\varphi \\ R &= \frac{l}{2} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{l}{2}g\cos\varphi$$

la conservación de la energía exige

$$\left.\begin{aligned} Mgh &= \frac{1}{2}Mv^2 \\ h &= \frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad v^2 = gl(1-\cos\varphi)$$



Problema XI-38

Igualando los valores obtenidos para v^2:

$$\frac{l}{2}g\cos\varphi = gl(1-\cos\varphi) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{2}{3}$$

La ordenada de P respecto de O' es:

$$y = R\cos\varphi = \frac{l}{2}\cos\varphi = \frac{l}{3} = \frac{2}{3}\ \text{m}$$

y la abscisa:

$$x = -R\,\text{sen}\varphi = -\frac{l}{2}\sqrt{1-\cos^2\varphi} = -\frac{l}{2}\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{l\sqrt{5}}{3} = -\frac{2\sqrt{5}}{3}\ \text{m}$$

luego:

$$\boxed{P\left[-\frac{2\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right]\ \text{m}}$$

La ecuación de la trayectoria referida al punto P como origen la obtendremos considerando un tiro oblicuo de ángulo φ y de velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{l}{2}g\cos\varphi} = \sqrt{9{,}8\,\frac{2}{3}} = 2{,}5\ \text{m/s}$$

luego:

$$\left.\begin{aligned} x &= vt\cos\varphi \\ y &= vt\,\text{sen}\varphi - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right| \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad y = x\,\text{tag}\varphi - \frac{g}{v^2\cos^2\varphi}x^2$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{5}}{2}x - \frac{27}{8}x^2}$$

Problema 39. Dejamos caer un cuerpo desde una altura H = 20 000 m sobre un astro igual a la Tierra (R_0 = 6 370 km y g_0 = 9,8 m/s^2), de tal forma que alrededor de éste existe vacío (para anular en el problema la resistencia del aire). Calcular la velocidad alcanzada por el cuerpo cuando llegue a la superficie del planeta.

Solución

Aplicaremos el principio de conservación de la energía:

$$T + U = \text{ct}^{\text{e}}$$

siendo:

$$\Delta U = GM_0M\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

en la que:

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \text{Masa de la Tierra} \\ M &= \text{Masa del cuerpo} \\ r_1 &= R_0 \\ r_2 &= R_0 + H \end{aligned}\right| \quad g_0 = G\frac{M_0}{R_0^2} \quad \Rightarrow \quad GM_0 = g_0R_0^2$$

luego:

$$GM_0M\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{1}{2}Mv^2 \quad \Rightarrow \quad g_0R_0^2\,\frac{H}{R_0(R_0+H)} = \frac{1}{2}v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2g_0R_0H}{R_0+H}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}8 \times 3\,670 \times 10^3 \times 2 \times 10^4}{3\,670 \times 10^3 + 2 \times 10^4}} = 624{,}4\ \text{m/s}}$$

B) CONSERVACION DE LA ENERGIA EN SISTEMAS EN ROTACION

Problema 40. Un volante de 3 m de diámetro, cuya masa de 300 kg puede considerarse concentrada en la llanta, gira a razón de 180 rpm. Calcular:
1. La energía cinética del volante.
2. Número de vueltas que dará hasta pararse si se le frena con un par de fuerzas de momento 80 kp · m.
3. Tiempo que tardará en pararse en el caso anterior.
4. Si todo el trabajo de frenado se transformase en calor, ¿qué cantidad se desarrollaría?

Solución

1)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} MR^2 4\pi^2\nu^2 = 2MR^2\pi^2\nu^2 = 2 \times 300 \times 1{,}5^2 \times \pi^2 3^2 = 120\,000 \text{ J}}$$

2)

$$N\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad n = \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$\boxed{n = \frac{\frac{1}{2} I\omega^2}{N 2\pi} = \frac{120\,000}{80 \times 9{,}8 \times 2\pi} = 24{,}3 \text{ vueltas}}$$

3)

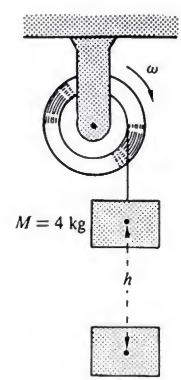
$$N = I\alpha \qquad \alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\nu}{t}$$

$$N = \frac{MR^2 2\pi\nu}{t} \Rightarrow \boxed{t = \frac{MR^2 2\pi\nu}{N} = \frac{300 \times 1{,}5^2 \times 2\pi 3}{80 \times 9{,}8} = 16{,}2 \text{ s}}$$

4)

$$\boxed{W = T = 120\,000 \text{ J} = \frac{120\,000}{4{,}18} \text{ cal} = 28\,708 \text{ cal}}$$

Problema 41. Un volante gira por la acción de un peso $P = 4$ kg que cuelga verticalmente del extremo de una cuerda arrollada a su eje. Partiendo del reposo, el peso P desciende una altura vertical $h = 3$ m en el tiempo $t = 12$ s. Determinar la energía cinética adquirida por el volante en ese intervalo, y la tensión T de la cuerda durante el movimiento.



Problema XI-41

Solución

1) El cuerpo cuando ha bajado una altura h habrá adquirido una velocidad v y el volante girará con una velocidad angular ω, luego:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad h = \frac{1}{2} vt \Rightarrow v = \frac{2h}{t}$$

$$Mgh = \frac{1}{2} M \frac{4h^2}{t^2} + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2} I\omega^2 = Mgh - \frac{1}{2} M \frac{4h^2}{t^2} = 4 \left[9{,}8 \times 3 - \frac{1}{2} \frac{4 \times 9}{144} \right] = 117{,}1 \text{ J}}$$

2)

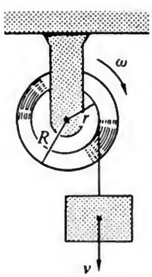
$$\text{Tensión} = Mg - Ma = M(g - a)$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2h}{t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Tensión} = M\left(g - \frac{2h}{t^2}\right) = \frac{4}{9{,}8}\left(9{,}8 - \frac{2 \times 3}{144}\right) = 3{,}98 \text{ kp}}$$

Problema 42. Se tiene un volante de radio $R = 1$ m y cuya masa $M = 100$ kg se supone localizada en la llanta. Arrollada a su eje, cuyo radio es de $r = 10$ cm y masa despreciable, hay una cuerda de la que pende un cuerpo de masa $m = 40$ kg; este cuerpo está a una altura $h = 18$ m del suelo. Calcular:
1. La aceleración con que cae el cuerpo.
2. Tensión de la cuerda durante la caída.
3. Tiempo que tarda el cuerpo en llegar al suelo.
4. Energía cinética adquirida por el volante al llegar el cuerpo al suelo.

Solución



Problema XI-42

1)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v = \omega r$$

$$I = MR^2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{r^2}$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{mr^2}{MR^2 + mr^2}} = \sqrt{2ah}$$

$$\boxed{a = g\frac{mr^2}{MR^2 + mr^2} = 9{,}8\frac{40 \times 10^2}{100 \times 100^2 + 40 \times 10^2} \simeq 0{,}04 \text{ m/s}^2}$$

2)

$$\boxed{T = mg - ma = m(g - a) = 40(9{,}8 - 0{,}04) = 390{,}4 \text{ N}}$$

3)

$$h = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2 \times 18}{0{,}04}} = 30 \text{ s}}$$

4)

$$T = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$v = \omega r = \sqrt{2ah}$$

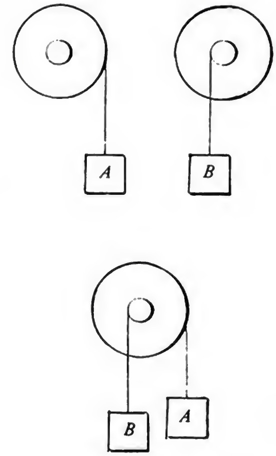
$$\boxed{T = \frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}MR^2\frac{2ah}{r^2} = \frac{1}{2}100 \times 1^2 \times \frac{2 \times 0{,}04 \times 18}{0{,}1^2} = 7\,200 \text{ J}}$$

Problema 43. **1.** Un volante de eje horizontal tiene una masa $M = 1\,500$ g que podemos considerar uniformemente repartida en su llanta, de radio $r = 10$ cm. Un hilo enrollado en esa llanta sostiene un cuerpo A de masa $m = 100$ g, de

manera que al descender A el volante gira. a) Suponiendo nulos los rozamientos, calcular la velocidad v de A cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que ha empleado en descender los 2 m.

2. Quitamos el cuerpo A y enrollamos un hilo sobre el eje del volante, de radio $r' = 4$ cm, que sostiene un cuerpo B de masa $m' = 200$ g. a) Calcular la velocidad v' de B cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que ha empleado en desdender los 2 m.

3. Supongamos ahora que A y B actúan simultáneamente. a) Calcular la velocidad V de A cuando haya descendido 2 m. b) Calcular el tiempo que emplea en descender esos 2 m.



Problema XI-43

Solución

Resolvemos todo el problema por consideraciones energéticas.

1) a)

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad l = Mr^2 \qquad v = \omega r \quad \Bigg| \quad mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \frac{v^2}{r^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh \frac{m}{m + M}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2 \frac{100}{100 + 1\,500}} = 1{,}56 \text{ m/s}}$$

b)

$$h = \frac{1}{2} vt \Rightarrow \boxed{t = \frac{2h}{v} = \frac{2 \times 2}{1{,}56} = 2{,}56 \text{ s}}$$

2) a)

$$m'gh = \frac{1}{2} m'v'^2 + \frac{1}{2} I\omega'^2 \qquad I = Mr^2 \qquad \omega' = v'r' \quad \Bigg| \quad m'gh = \frac{1}{2} m'v'^2 + \frac{1}{2} Mr^2 \frac{v'^2}{r'^2}$$

$$\boxed{v' = \sqrt{2gh \frac{m'r'^2}{m'r'^2 + Mr^2}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 2 \frac{200 \times 16}{200 \times 16 + 1\,500 \times 100}} = 0{,}90 \text{ m/s}}$$

b)

$$h = \frac{1}{2} v't' \Rightarrow \boxed{t' = \frac{2h}{v'} = \frac{2 \times 2}{0{,}90} = 4{,}44 \text{ s}}$$

3) a) Comprobemos primero si el movimiento es como indican en el problema, para lo cual tendrá que verificarse:

$$mgr > m'gr' \Rightarrow mr > m'r' \Rightarrow 100 \times 10 > 200 \times 4$$

$$\left.\begin{array}{l} mgh = \dfrac{1}{2}\, mV^2 + \dfrac{1}{2}\, m'V'^2 + m'gh' + \dfrac{1}{2}\, I\omega^2 \\ \left.\begin{array}{l} V = \omega r \\ V' = \omega r' \end{array}\right| \dfrac{V}{V'} = \dfrac{r}{r'} = \dfrac{h}{h'} \\ I = Mr^2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}\, mV^2 + \frac{1}{2}\, m'\, \frac{r'^2}{r^2}\, V^2 + m'g\, \frac{r'}{r}\, h + \frac{1}{2}\, Mr^2\, \frac{V^2}{r^2}$$

$$\boxed{V = \sqrt{2grh\, \frac{mr - m'r'}{Mr^2 + mr^2 + m'r'^2}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}1 \times 2\, \frac{100 \times 10 - 200 \times 4}{1\,500 \times 100 + 100 \times 100 + 200 \times 16}} = 0{,}07 \text{ m/s}}$$

b)

$$h = \frac{1}{2}\, Vt \;\Rightarrow \boxed{t = \frac{2h}{V} = \frac{2 \times 2}{0{,}07} = 57 \text{ s}}$$

Problema 44. Una rueda de 25 cm de radio y 0,5 kg de masa que se supone localizada en la periferia puede girar alrededor de un eje de masa despreciable de 4 cm de diámetro, en el que se halla enrollado un hilo del que pende un cuerpo de 200 g que al descender hace girar el sistema. Calcular:
1. El espacio recorrido por el cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento.
2. Su velocidad en ese instante y la de un punto de la periferia de la rueda.
3. Quitando la masa y suponiendo que la rueda gire con la velocidad adquirida, calcular la fuerza tangencial constante aplicada a la periferia de la rueda capaz de detenerla en 30 s y el número de vueltas que da la rueda hasta detenerse.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} mgh = \dfrac{1}{2}\, mv^2 + \dfrac{1}{2}\, I\omega^2 \\ v = \omega r = \dfrac{2h}{t} \\ I = MR^2 \end{array}\right| \; mgh = \frac{1}{2}\, m\, \frac{4h^2}{t^2} + \frac{1}{2}\, MR^2\, \frac{4h^2}{t^2 r^2}$$

$$\boxed{h = \frac{gt^2}{2}\, \frac{mr^2}{MR^2 + mr^2} = 1{,}25 \text{ m}}$$

2)

$$\boxed{v = \frac{2h}{t} = \frac{2 \times 1{,}25}{10} = 0{,}25 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{V = \omega R = \frac{v}{r}\, R = \frac{0{,}25 \times 0{,}25}{0{,}02} = 3{,}12 \text{ m/s}}$$

3)

$$N\varphi = \frac{1}{2} I\omega^2 \left| \begin{array}{l} N = FR \\ \varphi = \dfrac{1}{2}\,\omega t' \\ \omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{V}{R} = 12{,}5 \text{ rad/s} \\ I = MR^2 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} FR\,\dfrac{1}{2}\,\omega t' = \dfrac{1}{2}\,MR^2\omega^2 \\ \boxed{F = \dfrac{MR\omega}{t'} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}25 \times 12{,}5}{30} = 5 \times 10^{-2}\text{ N}} \end{array} \right.$$

$$\boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t'}{4\pi} = \frac{12{,}5 \times 30}{4\pi} = 29{,}8 \text{ vueltas}}$$

Problema 45. La garganta de una polea de 5 cm de radio lleva enrollada una cuerda de la cual pende un peso de 20 g, siendo de 2×10^{-5} kg · m^2 el momento de inercia de la polea. Se pice calcular:

1. La aceleración lineal del peso de 20 g.

2. La energía cinética adquirida por el sistema al cabo de 3 s de empezar a moverse.

3. La fuerza que tendrá que desarrollar un freno sobre la periferia de la polea para parar el sistema en 1 s, empezando a actuar dicho freno al transcurrir el tiempo citado en 2.

Solución

1) Aunque se puede resolver el problema como hicimos en dinámica de rotación por la ecuación $N = I\alpha$, vamos a resolverlo por consideraciones energéticas.

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

que junto con que la velocidad del cuerpo es la misma que la de un punto de la periferia de la polea y viene relacionada con ω por:

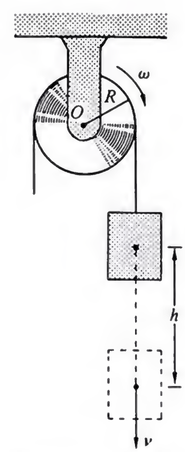
$$v = \omega R$$

nos queda:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh \frac{MR^2}{I + MR^2}} = \sqrt{2ah}$$

de donde:

$$\boxed{a = g\,\frac{MR^2}{I + MR^2} = 9{,}8\,\frac{2 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-5} + 2 \times 10^{-2} \times 25 \times 10^{-4}} = 7 \text{ m/s}^2}$$



Problema XI-45-1.ª

2)

$$\left. \begin{array}{l} T = \dfrac{1}{2} Mv^2 + \dfrac{1}{2} I\omega^2 = Mgh \\ h = \dfrac{1}{2} at^2 \end{array} \right| \quad \boxed{T = Mg\,\frac{1}{2}\,at^2 = 2 \times 10^{-2} \times 9{,}8\,\frac{1}{2}\,7 \times 9 = 6{,}174 \text{ J}}$$

3)

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mgh' + \frac{1}{2}I\omega^2 = N\varphi$$

$$v = at = 7 \times 3 = 21 \text{ m/s}$$

$$h' = \frac{1}{2}vt'$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

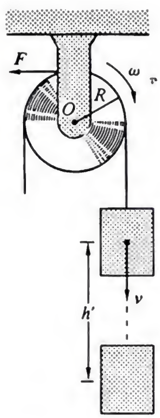
$$N = FR$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega t' = \frac{1}{2}\frac{v}{R}t'$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 + Mg\frac{vt'}{2} + \frac{Iv^2}{2R^2} = \frac{FRvt'}{2R} \Rightarrow$$

$$F = \frac{Iv}{R^2t'} + \frac{Mv}{t'} + Mg \Rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{2 \times 10^{-5}\,21}{25 \times 10^{-4}} + 2 \times 10^{-2}\,21 + 2 \times 10^{-2}\,9{,}8 = 0{,}784 \text{ N}}$$



Problema XI-45-2.ª

Problema 46. A la garganta de una polea fija, cilíndrica y maciza, de 5 cm de radio y de 2 kg de masa, enrollamos un cordón de masa despreciable al que se le sujeta un cuerpo de 1 kg que se encuentra apoyado en un plano inclinado 30° con la horizontal. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es 0,2, calcular:

1. La velocidad del cuerpo cuando haya descendido 50 cm a lo largo del plano.
2. La aceleración con que cae el cuerpo y la aceleración angular de la polea.

Solución

1)

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + W_R$$

$$h = l\,\text{sen}\varphi$$

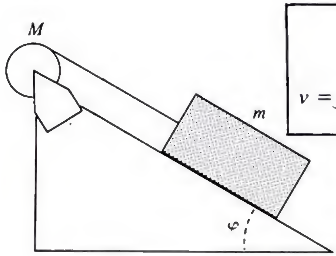
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

$$W_R = \mu mgl\cos\varphi$$

$$\Rightarrow mgl\,\text{sen}\varphi = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} + \mu mgl\cos\varphi \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4mgl(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{2m + M}} = \sqrt{\frac{4 \times 9{,}8 \times 0{,}5\left(\frac{1}{2} - 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 + 2}} = 1{,}3 \text{ m/s}}$$



Problema XI-46

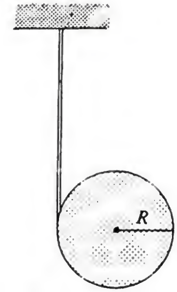
2)

$$v = \sqrt{2al} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2mg(\text{sen}\varphi - \mu\cos\varphi)}{2m + M} = \frac{2 \times 9{,}8\left(\frac{1}{2} - 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2 + 2} = 1{,}6 \text{ m/s}^2}$$

$$a = \alpha R \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1{,}6}{0{,}05} = 32 \text{ rad/s}^2}$$

Problema 47. Enrollamos una cuerda a un cilindro macizo y homogéneo de 10 kg y el otro extremo del cordón se fija al techo, como indica la figura. Soltamos el sistema partiendo del reposo, de forma que al caer la cuerda va desarrollándose. Calcular:

1. La velocidad del CM del cilindro cuando haya descendido 2 m.
2. La aceleración del CM durante la caída.
3. La tensión de la cuerda.



Problema XI-47

Solución

1)

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad I = \frac{1}{2} MR^2$$

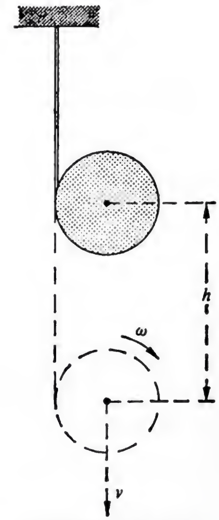
y como el centro de gravedad cae a una velocidad igual a la que tiene la cuerda, tendremos:

$$v = \omega R$$

luego:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, MR^2\, \frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4} Mv^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{\frac{4}{3} 9{,}8 \times 2} = 5{,}1 \text{ m/s}}$$



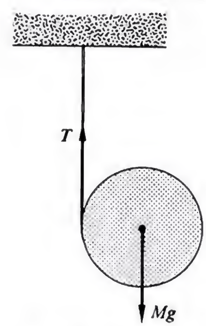
Problema XI-47-1.ª

2) El movimiento es uniformemente acelerado, luego:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{2ah} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3} g = \frac{2}{3} 9{,}8 = 6{,}53 \text{ m/s}^2}$$

3)

$$Mg - T = Ma \Rightarrow \boxed{T = M(g - a) = 10(9{,}8 - 6{,}53) = 32{,}7 \text{ N}}$$



Problema XI-47-2.ª

Problema 48. Una varilla homogénea de 1 m de longitud puede girar en torno a un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. La desplazamos de su posición de equilibrio estable y la colocamos vertical, de forma que el eje de giro esté en el punto más bajo del sistema. La varilla cae girando, espontáneamente. Calcular:

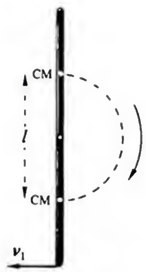
1. La velocidad de su extremo libre al pasar por la posición de equilibrio estable.
2. La velocidad de su extremo libre al pasar la varilla por su posición horizontal.
3. Hallar una fórmula general de la velocidad de su extremo libre y aceleración angular, tangencial, normal y resultante, en función de su longitud l, de g y del ángulo descrito desde su posición inicial.

Solución

1) El CM en la posición más baja, dista de cuando se encuentra en posición más alta del sistema l, luego:

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 \\ I = \frac{1}{3} Ml^2 \\ h = l \end{array}\right| \quad Mgl = \frac{1}{2}\frac{1}{3} Ml^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{6g}{l}}$$

$$\boxed{v = \omega l = l\sqrt{\frac{6g}{l}} = \sqrt{6gl} = 7{,}7 \text{ m/s}}$$

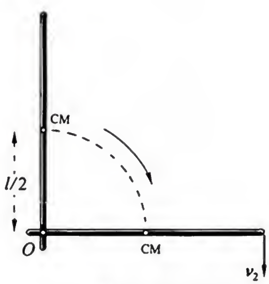


Problema XI-48-1.ª

2)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 \\ h = \frac{l}{2} \end{array}\right| \quad Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} Ml^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

$$\boxed{v = \omega l = l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{3gl} = 5{,}4 \text{ m/s}}$$



Problema XI-48-2.ª

3)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \frac{1}{2} I\omega^2 \\ b = \frac{l}{2} - h = \frac{l}{2}\cos\varphi \Rightarrow h = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \end{array}\right| \quad Mg\frac{l}{2}(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g(1-\cos\varphi)}{l}} \Rightarrow \boxed{v = \omega l = \sqrt{3gl(1-\cos\varphi)}}$$

COMPROBACIÓN:

para $\varphi = 180°$ (caso 1) $v = \sqrt{6gl}$

para $\varphi = 90°$ (caso 2) $v = \sqrt{3gl}$

Derivando:

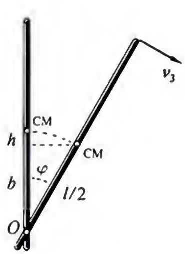
$$v^2 = 3gl(1-\cos\varphi) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} 2v\frac{dv}{dt} = 3gl\,\text{sen}\varphi\frac{d\varphi}{dt} \\ a_\varphi = \frac{dv}{dt} \\ \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{l} \end{array}\right| \quad 2va_\varphi = 3gl\frac{v}{l}\text{sen}\varphi$$

$$\boxed{a_\varphi = \frac{3}{2}g\,\text{sen}\varphi} \quad \boxed{\alpha = \frac{a_\varphi}{l} = \frac{3g}{2l}\text{sen}\varphi} \quad \boxed{a_n = \frac{v^2}{l} = 3g(1-\cos\varphi)}$$

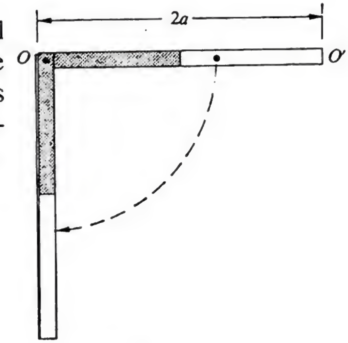
$$a = \sqrt{a_\varphi^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{9}{4}g^2\text{sen}^2\varphi + 9g^2(1-\cos\varphi)^2}$$

$$\boxed{a = 3g\sqrt{\frac{1}{4}\text{sen}^2\varphi + (1-\cos\varphi)^2}}$$



Problema XI-48-3.ª

Problema 49. Construimos una barra de 2 m de longitud, mitad de un material de masa $M_1 = 1$ kg y la otra mitad de otro de masa $M_2 = 2$ kg. Ponemos un eje en un extremo y se deja que caiga desde la posición horizontal como indicamos en la figura; hacemos lo mismo colgándola del otro extremo. Calcular la velocidad angular del sistema en ambos casos cuando pasa por la posición de equilibrio.



Problema XI-49

Solución

Calculemos primero la distancia a O del CM:

$$x_G = \frac{M_1 \dfrac{a}{2} + M_2 \dfrac{3a}{2}}{M_1 + M_2} = \frac{M_1 + 3M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2}$$

La distancia del CM contada a partir de O' será:

$$x'_G = 2a - x_G = 2a - \frac{M_1 + 3M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2} = \frac{3M_1 + M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2}$$

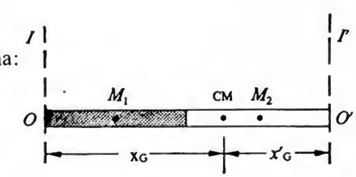
Teniendo en cuenta el teorema de Steiner y que el momento de inercia de una varilla homogénea de longitud L y masa M, respecto a un eje perpendicular a ella y que pasa por el CM es:

$$I_G = \frac{1}{12} ML^2$$

y con respecto a un eje paralelo al anterior que pasa por un extremo es:

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Obtenemos los momentos de inercia respecto a los ejes que pasan por O y O' de la forma:



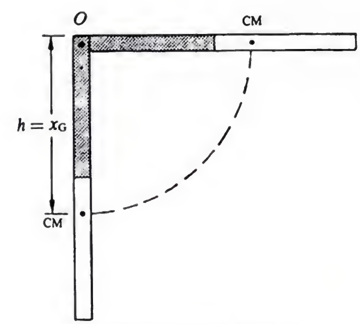
Problema XI-49-1.ª

$$I = \frac{1}{3} M_1 a^2 + \frac{1}{12} M_2 a^2 + M_2 \frac{9}{4} a^2 = \frac{1}{3} [M_1 + 7M_2] a^2$$

$$I' = \frac{1}{3} [7M_1 + M_2] a^2$$

1) Aplicando el principio de conservación de la energía, tendremos:

$$(M_1 + M_2) gh = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad h = x_G$$



Problema XI-49-2.ª

sustituyendo los valores obtenidos:

$$(M_1 + M_2) g \frac{M_1 + 3M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} [M_1 + 7M_2] a^2 \omega^2$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{a} \frac{M_1 + 3M_2}{M_1 + 7M_2}} = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}8 \times 7}{15}} = 3{,}7 \text{ rad/s}}$$

2)

$$(M_1 + M_2) gh' = \frac{1}{2} I' \omega'^2 \qquad h' = x'_G$$

sustituyendo los valores obtenidos:

$$[M_1 + M_2] g \frac{3M_1 + M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{3} [7M_1 + M_2] a^2 \omega'^2$$

$$\boxed{\omega' = \sqrt{\frac{3g}{a} \frac{3M_1 + M_2}{7M_1 + M_2}} = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}8 \times 5}{9}} = 4 \text{ rad/s}}$$

Problema 50. Un cilindro macizo de 100 kg y 60 cm de radio rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal con velocidad de traslación de 1 m/s. Calcular:
1. Su energía cinética de traslación.
2. Su energía cinética de rotación.
3. La altura a que podría subir por un plano inclinado.

Solución

1)

$$\boxed{T_t = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} 100 = 50 \text{ J}}$$

2)

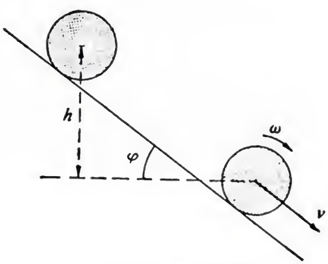
$$\boxed{T_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{4} Mv^2 = 25 \text{ J}}$$

3)

$$\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{75}{9{,}8 \times 100} \simeq 0{,}076 \text{ m}}$$

Problema 51. Calcular por energía las características del movimiento de un cilindro macizo de radio R que baja rodando, sin deslizar, a lo largo de un plano inclinado, conservando su eje horizontal. (Se supone no existen rozamientos por rodadura.)

Solución



Problema XI-51

La energía potencial gravitatoria perdida por el cilindro ha de ser igual a la suma de las energías cinéticas de rotación y traslación adquiridas:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

como:

$$I = \frac{1}{2} MR^2 \qquad v = \omega R \qquad h = l \operatorname{sen}\varphi$$

la ecuación anterior se transforma en:

$$Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{v^2}{R^2} \quad \Rightarrow \quad gl\operatorname{sen}\varphi = \frac{3}{4} v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 2\sqrt{\frac{gl\operatorname{sen}\varphi}{3}}}$$

Como tal velocidad ha de ser (movimiento uniformemente acelerado):

$$v = \sqrt{2al} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2l} = \frac{4gl\operatorname{sen}\varphi}{3 \times 2l} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{2}{3} g\operatorname{sen}\varphi}$$

El tiempo que tarda el cuerpo en recorrer el espacio l es:

$$l = \frac{1}{2} at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2l}{a}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{3l}{g\operatorname{sen}\varphi}}}$$

Problema 52. A lo largo de un plano inclinado de longitud 1 m y que forma un ángulo de 30° con la horizontal cae rodando (sin deslizamiento) una esfera homogénea de radio r y de masa 500 g. Inició la caída partiendo del reposo. ¿Cuánto vale su velocidad final? ¿Y su energía cinética?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}I\omega^2 \\ v = \omega R \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \\ I = \dfrac{2}{5}MR^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{2}{5}MR^2\frac{v^2}{R^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7}\,gl\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{\frac{10}{7}\,9{,}8 \times 0{,}5} = 2{,}64 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh = Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{0{,}5}{9{,}8}\,9{,}8 \times 0{,}5 = 0{,}25 \text{ kgm}}$$

Problema 53. Un cilindro de 8 kg de peso y de 0,15 m de radio rueda, sin deslizamiento, por un plano inclinado que forma con la horizontal un ángulo de 30°. Se trata de calcular:

1. El momento de inercia respecto al punto de contacto con el plano.
2. La aceleración lineal del CM en el movimiento a lo largo del plano.
3. La longitud de plano inclinado recorrido en 4 s.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} I = I_G + Md^2 \\ I_G = \dfrac{1}{2}MR^2 \\ d = r \end{array}\right| \quad \boxed{I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2}\,8 \times 0{,}15^2 = 0{,}27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2}Mv^2 + \dfrac{1}{2}I_G\omega^2 \\ v = \omega r \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right| \quad Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}\,gl\operatorname{sen}\varphi}$$

Si a es la aceleración lineal del centro, la velocidad adquirida por él al recorrer el espacio l es:

$$v = \sqrt{2al}$$

por igualación de las dos expresiones de v, se obtiene:

$$\boxed{a = \frac{2}{3}\, g\operatorname{sen}\varphi = \frac{2}{3}\, 9{,}8 \times 0{,}5 = 3{,}27 \text{ m/s}^2}$$

3)

$$\boxed{l = \frac{1}{2}\, at^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}27 \times 16 = 26{,}16 \text{ m}}$$

Problema 54. Un cilindro de masa 2 kg y radio 5 cm rueda sin deslizamiento por un plano inclinado 30°. Suponiendo que el cilindro partió del reposo, determinar:
1. Su velocidad, después de haber rodado 3 m por el plano inclinado, suponiendo el cilindro macizo.
2. Suponiendo el cilindro hueco y su masa uniformemente distribuida por la periferia, determinar su velocidad después de haber recorrido 3 m del plano.
3. En ambos casos determinar el tiempo que ha tardado en recorrer los 3 m.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2}\, Mv^2 + \dfrac{1}{2}\, I\omega^2 \\ v = \omega R \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \\ I = \dfrac{1}{2}\, MR^2 \end{array}\right| \quad Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\, MR^2\, \frac{v^2}{R^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{4}{3}\, gl\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{\frac{4}{3}\, 9{,}8 \times 3 \times 0{,}5} = 4{,}43 \text{ m/s}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{2}{2}\, Mv^2 + \dfrac{1}{2}\, I\omega^2 \\ v = \omega R \\ h = l\operatorname{sen}\varphi \\ l = MR^2 \end{array}\right| \quad Mgl\operatorname{sen}\varphi = \frac{1}{2}\, Mv^2 + \frac{1}{2}\, MR^2\, \frac{v^2}{R^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{gl\operatorname{sen}\varphi} = \sqrt{9{,}8 \times 3 \times 0{,}5} = 3{,}83 \text{ m/s}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} l = \dfrac{1}{2}\, vt \\ t = \dfrac{2l}{v} \end{array}\right| \quad \boxed{t_1 = \frac{2 \times 3}{4{,}43} = 1{,}35 \text{ s}} \quad \boxed{t_2 = \frac{2 \times 3}{3{,}83} = 1{,}57 \text{ s}}$$

Problema 55. Calcular la aceleración de caída por un plano inclinado un ángulo 30° de dos conos rectos iguales, unidos por sus vértices; el sistema rueda sin deslizar.

Solución

Llamamos M a la masa total del sistema.

$$\left.\begin{array}{l} Mgh = \dfrac{1}{2} Mv^2 + \dfrac{1}{2} I\omega^2 \\ h = l\,\text{sen}\varphi \\ v = \omega R \\ I = \dfrac{3}{10}\dfrac{M}{2}R^2 + \dfrac{3}{10}\dfrac{M}{2}R^2 = \dfrac{3}{10}MR^2 \end{array}\right| \Rightarrow Mgl\,\text{sen}\varphi = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{10}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{13}{20}Mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{20}{13}gl\,\text{sen}\varphi} = \sqrt{2al} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{10}{13}g\,\text{sen}\varphi = \frac{10 \times 9{,}8 \times 0{,}5}{13} = 3{,}77 \text{ m/s}^2}$$

C) CONSERVACION DEL MOMENTO LINEAL. COLISIONES

FORMULARIO

MOMENTO LINEAL: $\quad \boldsymbol{p} = \Sigma m_i v_i = M \dfrac{d\boldsymbol{R}}{dt}$

TEOREMA DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL: Si no actúan *fuerzas exteriores,* es decir $\boldsymbol{F} = 0$, tendremos:

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{p} = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} p_x = Mv_x = \text{ct}^{\text{e}} \\ p_y = Mv_y = \text{ct}^{\text{e}} \\ p_z = Mv_z = \text{ct}^{\text{e}} \end{array}\right.$$

CHOQUE FRONTAL PERFECTAMENTE ELÁSTICO: Se conserva el momento lineal y energía cinética. Consideramos movimientos en la dirección positiva del eje de las equis. (En caso contrario, aplicaremos las mismas fórmulas con los signos correspondientes.)

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad \Rightarrow \quad M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v'_1 + M_2 v'_2 \\ T = \mathrm{ct^e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} v'_1 = v_1 \dfrac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} + \dfrac{2 M_2 v_2}{M_1 + M_2} \\ v'_2 = 2 \dfrac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} - v_2 \dfrac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \end{array}\right.$$

$$\text{Si } M_1 = M_2: \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v'_1 = v_2 \\ v'_2 = v_1 \end{array}\right.$$

CHOQUES EN DOS DIMENSIONES PERFECTAMENTE ELÁSTICOS:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x} = M_1 v'_{1x} + M_2 v'_{2x} \\ M_1 v_{2y} + M_2 v_{2y} = M_2 v'_{1y} + M_2 v'_{2y} \end{array}\right.$$

$$T = \mathrm{ct^e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2$$

CHOQUE PERFECTAMENTE INELÁSTICO:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p} \quad \Rightarrow \quad M_1 \mathbf{v}_1 + M_2 \mathbf{v}_2 = (M_1 + M_2)\, \mathbf{V}$$

CHOQUES NO PERFECTAMENTE ELÁSTICOS. COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN EN UN CHOQUE:

$$c = - \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

Velocidad después de este choque:

$$v' = v_1 \frac{M_1 - cM_2}{M_1 + M_2} + \frac{M_2 v_2 (c+1)}{M_1 + M_2}$$

$$v'_2 = v_2 \frac{M_2 - cM_1}{M_1 + M_2} + \frac{M_1 v_1 (c+1)}{M_1 + M_2}$$

Problema 56. Un hombre de 80 kg que se encuentra de pie sobre una superficie helada arroja horizontalmente una pelota de 100 g con una velocidad de 25 m/s. **1.** ¿En qué dirección y con qué velocidad comenzará a moverse el hombre? **2.** Si el hombre arroja 4 de estas pelotas cada 3 s, ¿cuál es la fuerza media que actúa sobre él? (Se supone nulo el rozamiento del hombre con el hielo).

Solución

1)

$$F_{ex} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = Mv = \text{ct}^{e}$$

El momento lineal del sistema antes del lanzamiento de la pelota es nulo, luego:

$$0 = Mv + M'v' \quad \Rightarrow \quad \boxed{v' = -\frac{M}{M'}v = -\frac{0{,}1}{80}25 = -0{,}03 \text{ m/s}}$$

Luego el hombre se moverá en dirección horizontal y en sentido contrario al de la pelota.

2)

$$F = \frac{\Delta(Mv)}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{4 \times 0{,}1 \times 25}{3} = 3{,}33 \text{ N}}$$

Problema 57. En el cañón sin retroceso de 70 mm la masa del proyectil con su espoleta es de 7 kg y la velocidad del mismo a la salida del cañón es 200 m/s. Calcular la masa de los gases producidos en la combustión de la carga de proyección, teniendo en cuenta que la velocidad de salida de los mismos es de 700 m/s.

Solución

El momento lineal del sistema antes del disparo es nulo y la velocidad de salida de gases es de sentido contrario a la velocidad de salida de la granada. Luego:

$$0 = Mv - M'v' \quad \Rightarrow \quad \boxed{M' = M\frac{v}{v'} = 7\frac{200}{700} = 2 \text{ kg}}$$

Esta carga de proyección tan grande explica el enorme *rebufo* producido por estas armas.

Problema 58. Un avión que con su carga pesa 4 t vuela horizontalmente a la velocidad de 300 m/s y lanza horizontalmente un cohete de 100 kg a una velocidad de 800 m/s medidos por el piloto. ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después del lanzamiento?

Solución

Tomamos los ejes de referencia en el avión, con lo que el momento lineal antes del lanzamiento será nulo respecto de dichos ejes. El teorema de conservación del momento lineal nos da:

$$0 = M'v + (M - M')v' \quad \Rightarrow \quad v' = -\frac{M'}{M - M'}v = -\frac{100}{3\,900}800 \simeq -20 \text{ m/s}$$

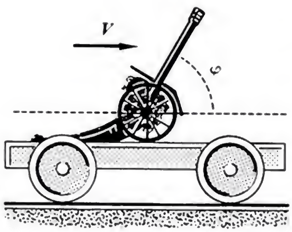
luego la velocidad del avión inmediatamente después del lanzamiento referida a tierra será:

$$\boxed{V = 300 - 20 = 280 \text{ m/s}}$$

Problema 59. Un cañón está montado sobre una plataforma y unida a ella; toda la carga del conjunto, incluida la plataforma, es de 5 t y se mueve a lo largo de unos raíles a una velocidad de 54 km/h. El cañón, cuya ánima forma un ángulo de 60° con la horizontal, dispara un proyectil de 100 kg con una velocidad de 300 m/s con respecto a un observador que se mueve con él, y en la misma dirección del movimiento del conjunto. Calcúlese:

1. Velocidad del conjunto inmediatamente después del disparo.

2. Velocidad que tendría que llevar el conjunto para que se pare inmediatamente después del disparo.



Problema XI-59

Solución

1) Tomamos los ejes de referencia en la plataforma, con lo que el momento lineal antes del disparo será nulo. El teorema de conservación del momento lineal nos da:

$$p = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} p_x = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad 0 = mv_x + (M - m)V' \\ p_y = \text{ct}^{\text{e}} \end{array} \right.$$

como:

$$v_x = v\cos\varphi$$

nos queda:

$$V' = -\frac{mv\cos\varphi}{M - m} = -\frac{10^2 \times 300}{2 \times 4\,900} \simeq -3 \text{ m/s}$$

luego la velocidad del conjunto inmediatamente después del disparo referida a tierra, teniendo en cuenta que $V = 54$ km/h $= 15$ m/s, será:

$$\boxed{V'' = V + V' = 15 - 3 = 12 \text{ m/s}}$$

2) Haciendo los mismos cálculos que en el apartado anterior y poniendo la condición:

$$V'' = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = V + V' = V - 3 \quad \Rightarrow \boxed{V = 3 \text{ m/s}}$$

Problema 60. Un nadador de 80 kg se lanza horizontalmente a un embalse de agua en reposo, con una velocidad de 15 m/s desde una barca parada que pesa 150 kg. La resistencia al avance de la barca que ofrece el agua es directamente proporcional a su velocidad en cada instante. Calcúlese la velocidad de la barca 15 s después de lanzarse el nadador. La constante de proporcionalidad vale 5 kg/s.

Solución

El momento lineal del sistema antes de lanzarse el nadador es nulo, y la velocidad con que sale la barca inmediatamente después de lanzarse es de sentido contrario a la del nadador; luego:

$$0 = Mv_0 - M'v_0' \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{M'}{M} v_0' = \frac{80}{150} 15 = 8 \text{ m/s}$$

Una vez que se ha iniciado el movimiento se cumple:

$$F = M\frac{dv}{dt} = -Kv \quad \Rightarrow \quad M\frac{dv}{v} = -Kdt$$

integrando:

$$M[\ln v]_8^v = [-kt]_0^{15} \quad \Rightarrow \quad 150[\ln 8 - \ln v] = 5 \times 15 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{8}{v} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{v = \frac{8}{e^{1/2}} = 4{,}8 \text{ m/s}}$$

Problema 61. Desde una torre de 95 m de altura se deja caer una piedra y un segundo después se lanza otra idéntica desde el suelo hacia arriba, en la misma vertical, chocando ambas en el punto medio de la altura de la torre. Si el choque es elástico, ¿cuáles son las nuevas velocidades de ambas piedras después del choque? ¿Hasta qué nueva altura asciende la primera piedra? Si no hubiese chocado, ¿hasta qué altura hubiese subido la segunda piedra?

Solución

Al ser las dos piedras idénticas y ser el choque elástico, se intercambian las velocidades. Si la velocidad de la primera piedra en el momento del choque es:

$$v_1 = -\sqrt{2g\frac{h}{2}} = -\sqrt{gh} = -\sqrt{9{,}8 \times 95} = -30 \text{ m/s}$$

considerando las velocidades hacia abajo como negativas y hacia arriba positivas. Entonces la velocidad de la segunda piedra después del choque será:

$$\boxed{v_2' = -30 \text{ m/s}}$$

Para calcular la velocidad de la segunda piedra en el momento del choque calculamos primero el tiempo que ha tardado la primera en llegar a mitad de la altura de la torre.

$$\frac{h}{2} = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}} = \sqrt{\frac{95}{9{,}8}} = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad t_2 = t_1 - 1 = 2 \text{ s}$$

entonces:

$$h_2 = \frac{h}{2} = v_{0_2}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 \qquad \Bigg| \qquad v_{0_2} = \frac{h + gt_2^2}{2t_2} = \frac{95 + 9{,}8 \times 4}{4} = 34 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_{0_2} - gt_2 \qquad \Bigg| \qquad v_2 = 34 - 9{,}8 \times 2 = 14 \text{ m/s}$$

Entonces la velocidad de la primera piedra después del choque será:

$$\boxed{v_1' = 14 \text{ m/s}}$$

La altura sobre el suelo a que asciende la primera piedra después del choque será la misma que la que hubiese subido la segunda si no hubiese choque; luego:

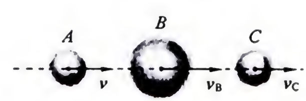
$$v_{0_2} = \sqrt{2gh'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = \frac{v_{0_2}^2}{2g} = \frac{34^2}{2 \times 9{,}8} = 58 \text{ m}}$$

Problema 62. Una esfera A se mueve con velocidad v; choca contra otra esfera B quieta, y ésta, al salir despedida, choca, a su vez, con una tercera esfera C, también inmóvil. La relación de masas de las tres esferas: $M_A:M_B:M_C$ como 3:6:2. Calcular la velocidad con que sale despedida la bola C. El choque se supone central y perfectamente elástico.

Solución

La velocidad de B después del choque será:

$$v_B = 2v\frac{M_A}{M_A + M_B} = 2v\frac{3M}{3M + 6M} = \frac{2}{3}v$$



Problema XI-62

La velocidad de C, después del choque con B, será:

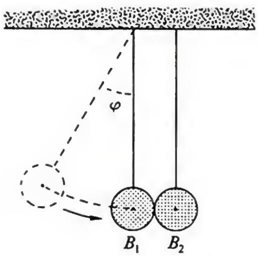
$$v_C = 2v_B\frac{M_B}{M_B + M_C} = 2\,\frac{2}{3}\,v\,\frac{6M}{6M + 2M} = v$$

$$\boxed{\text{La velocidad adquirida por } C \text{ es la misma que llevaba } A \text{ antes del choque.}}$$

Problema 63. Dos bolas de marfil B_1 y B_2, de masas M_1 y M_2, están suspendidas de dos hilos inextensibles de longitud 1 m. Las bolas se tocan, sin presión, cuando los hilos están verticales. Separamos B_1 de su posición de equilibrio un ángulo de 60°, manteniendo el hilo extendido y en el mismo plano vertical que el otro hilo; soltamos B_1 y entonces viene a chocar contra la bola B_2, que estaba inmóvil. Se pide calcular en los tres casos siguientes:

$$\text{a)}\quad M_2 = 2M_1 \qquad \text{b)}\quad M_2 = \frac{M_1}{2} \qquad \text{c)}\quad M_2 = M_1$$

1. La velocidad v_1 de B_1 cuando ésta choca con B_2.
2. Las velocidades de ambas bolas después del choque, supuesto perfectamente elástico.
3. Las alturas a que ascenderán después del choque en el tercer caso.



Problema XI-63

Solución

1) En los tres casos:

$$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)} = \sqrt{2\times 10\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{10}\ \text{m/s}$$

2)

$$v_1' = v_1\,\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} + 2\,\frac{M_2 v_2}{M_1 + M_2}$$

$$v_2' = 2\,\frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2} - v_2\,\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2}$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ M_2 = 2M_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_1' = v_1\,\dfrac{M_1 - 2M_1}{M_1 + 2M_1} = -\dfrac{v_1}{3} = -\dfrac{\sqrt{10}}{3}\ \text{m/s} \\[2ex] v_2' = 2\,\dfrac{M_1 v_1}{M_1 + 2M_1} = 2\,\dfrac{v_1}{3} = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}\ \text{m/s} \end{array}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ M_1 = 2M_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_1' = v_1\,\dfrac{2M_2 - M_2}{2M_2 + M_2} = \dfrac{v_1}{3} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}\ \text{m/s} \\[2ex] v_2' = 2\,\dfrac{2M_2 v_1}{2M_2 + M_2} = \dfrac{4}{3}\,v_1 = \dfrac{4\sqrt{10}}{3}\ \text{m/s.} \end{array}$$

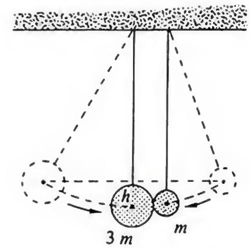
c)

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = 0 \\ M_1 = M_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 = \sqrt{10}\ \text{m/s} \end{array}$$

3) La misma de la que ha caído la primera:

$$h = l(1-\cos\varphi) = 1\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0{,}5\ \text{m}$$

Problema 64. Dos esferas perfectamente elásticas de masas 3 m y m, respectivamente, están pendientes de unos hilos de la misma longitud, de forma que en la posición de equilibrio quedan las esferas en contacto, los hilos paralelos y la línea que une los centros de aquéllas horizontal. Apartamos las esferas de su posición de equilibrio de manera que sus centros asciendan una altura vertical h y las soltamos. Al chocar, la mayor queda quieta y la pequeña asciende a una altura 4 veces mayor de la que partió. Al chocar de nuevo vuelven las dos a adquirir la altura h y vuelven a reproducir constantemente el fenómeno. Demostrar tales hechos.



Problema XI-64

Solución

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = 3m \\ M_2 = m \end{array}\right| \quad v_1 = -v_2 = \sqrt{2gh}$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas de choque elástico:

$$v_1' = v_1 \frac{3m - m}{3m + m} - 2v_1 \frac{m}{3m + m} = 0$$

$$v_2' = 2v_1 \frac{3m}{3m + m} + v_1 \frac{3m - m}{3m + m} = 2v_1 = 2\sqrt{2gh}$$

La bola de masa m ascenderá una altura h' tal que:

$$v_2' = \sqrt{2gh'} = 2\sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \quad h' = 4h$$

esta bola al volver a su punto de partida chocará con la de masa $3m$, ahora en reposo, llevando una velocidad igual a v_2', pero con signo negativo. Es decir, en el nuevo problema:

$$v_1 = 0 \qquad v_2 = -2\sqrt{2gh}$$

y, por tanto, la esfera de mayor masa adquirirá la velocidad:

$$v_1' = -2\frac{m2\sqrt{2gh}}{3m + m} = -\sqrt{2gh}$$

recobrando, por tanto, en su nuevo movimiento su altura inicial. La esfera menor adquirirá una velocidad:

$$v_2' = 2\sqrt{2gh}\frac{3m - m}{3m + m} = \sqrt{2gh}$$

recobrando también la altura de la cual partió.

Problema 65. Partiendo del principio de relatividad de Galileo y de las leyes de conservación de la masa y de la energía (masa y energía total de un sistema aislado permanecen constantes), deducir la ley de conservación del momento lineal en un choque entre dos partículas.

Solución

Supongamos dos partículas de masas M_1 y M_2 que tienen velocidades v_1 y v_2 referidas a un primer sistema inercial. Chocan y después del choque salen con las velocidades v_1' y v_2'. La ley de conservación de la energía descrita, desde el sistema de referencia, se escribirá:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 + \Delta Q \qquad [1]$$

siendo ΔQ la energía que en el choque se transforma en calor y potencial interna de las masas. (En choque elástico, $\Delta Q = 0$.)

Si desde un segundo sistema inercial las velocidades observadas son c_1 y c_2, y después del choque son c'_1 y c'_2, entonces la ley de conservación de la energía se escribirá:

$$\frac{1}{2} M_1 c_1^2 + \frac{1}{2} M_2 c_2^2 = \frac{1}{2} M_1 c_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 c_2'^2 + \Delta Q$$

Si es V la velocidad del segundo sistema referido al primero, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} c_1 = v_1 - V \\ c_2 = v_2 - V \end{array}\right\| \begin{array}{l} c'_1 = v'_1 - V \\ c'_2 = v'_2 - V \end{array}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula anterior y operando:

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1 - V)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2 - V)^2 = \frac{1}{2} M_1 (v'_1 - V)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v'_2 - V)^2 + \Delta Q$$

$$\frac{1}{2} M_1 (v_1^2 + V^2 - 2 v_1 \cdot V) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 + V^2 - 2 v_2 \cdot V) =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 (v_1'^2 + V^2 - 2 v'_1 \cdot V) + \frac{1}{2} M_2 (v_2'^2 + V^2 - 2 v'_2 \cdot V) + \Delta Q$$

Los términos en V^2 se simplifican, quedando:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - M_1 v_1 \cdot V - M_2 v_2 \cdot V =$$

$$= \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 - M_1 v'_1 \cdot V - M_2 v'_2 \cdot V + \Delta Q$$

expresión que comparada con la [1] obtenemos que:

$$(M_1 v_1 + M_2 v_2) \cdot V = (M_1 v'_1 + M_2 v'_2) \cdot V$$

luego:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v'_1 + M_2 v'_2$$

que nos demuestra la ley de conservación del momento lineal.

Problema 66. Sobre un trozo de madera cuya masa es 20 kg hacemos un disparo de fusil. Teniendo en cuenta que en el momento del impacto el proyectil (masa = 40 g) lleva una velocidad de 300 m/s y suponiendo que el proyectil quede incrustado en la madera, calcular la velocidad que adquiere el conjunto madera-proyectil.

Solución

$$M_1 v_1 = (M_1 + M_2) v_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 = \frac{40 \times 300}{20\,040} = 0{,}6 \text{ m/s}}$$

Problema 67. Tenemos dos bloques de masas 5 y 15 g que se mueven en la misma dirección con las velocidades de 10 y 5 cm/s, respectivamente. Calcular:
1. Sus velocidades después del choque, en el caso de que sus movimientos sean de sentidos opuestos.
2. En el caso de que lleven el mismo sentido, y el más rápido alcance al más lento. (En ambos casos se consideran los choques perfectamente elásticos.)
3. Si en el primer caso fuera el choque perfectamente inelástico, calcular: a) La velocidad común del conjunto de ambos. b) La pérdida de energía cinética. c) Indicar en qué se transforma esta energía aparentemente perdida.

Solución

Choque elástico:

$$v_1' = v_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} + 2v_2 \frac{M_2}{M_2 + M_1}$$

$$v_2' = -\, v_2 \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} + 2v_1 \frac{M_1}{M_1 + M_2}$$

1)

$$M_1 = 5 \text{ g} \qquad v_1 = 10 \text{ cm/s} \qquad M_2 = 15 \text{ g} \qquad v_2 = -\,5 \text{ cm/s}$$

$$v_1' = 10 \frac{5 - 15}{20} - 2 \times 5 \frac{15}{20} = -\,12{,}5 \text{ cm/s}$$

$$v_2' = 5 \frac{5 - 15}{20} + 2 \times 10 \frac{5}{20} = 2{,}5 \text{ cm/s}$$

Comprobación:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \Leftrightarrow \quad 10 - 12{,}5 = -\,5 + 2{,}5$$

2)

$$M_1 = 5 \text{ g} \qquad v_1 = 10 \text{ cm/s} \qquad M_2 = 15 \text{ g} \qquad v_2 = 5 \text{ cm/s}$$

$$v_1' = 10 \frac{5 - 15}{20} + 2 \times 5 \frac{15}{20} = 2{,}5 \text{ cm/s}$$

$$v_2' = -\,5 \frac{5 - 15}{20} + 2 \times 10 \frac{5}{20} = 7{,}5 \text{ cm/s}$$

Comprobación:

$$v_1 + v_1' = v_2 + v_2' \quad \Leftrightarrow \quad 10 + 2{,}5 = 5 + 7{,}5$$

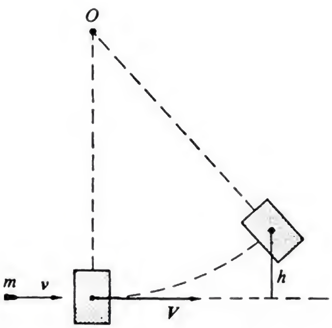
3) Choque inelástico:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = v(M_1 + M_2) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{5 \times 10 - 15 \times 5}{20} = -\,1{,}25 \text{ cm/s}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v^2 = 250 + 187{,}5 - 15{,}625 = 421{,}875 \text{ erg}$$

Esta disminución de energía se ha transformado en calor y en energía interna de los cuerpos debida a su cambio de forma.

Problema 68. Una bala de masa $m = 20$ g se lanza horizontalmente sobre un bloque de madera de masa $M = 2$ kg, suspendido por su centro de gravedad de un hilo inextensible, quedando empotrada en él. Después del impacto el bloque oscila, experimentando un desplazamiento vertical de 10 cm. Calcular la velocidad que lleva la bala en el momento del impacto.



Problema XI-68

Solución

Se conserva el momento lineal:

$$mv = (m + M)V \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m + M}{m} V$$

una vez realizado el choque la energía cinética del sistema bala-bloque se transforma en energía potencial:

$$\frac{1}{2}(m + M)V^2 = (m + M)gh \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh}$$

luego:

$$\boxed{v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gh} = \frac{2\,020}{20}\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}1} = 141{,}4 \text{ m/s}}$$

Problema 69. Sobre un saquito de arena de 4 kg de masa pendiente de un hilo se dispara un fusil cuya bala tiene una masa de 40 g. La bala atraviesa el saquito y recorre una distancia de 20 m antes de pegar en el suelo que se encuentra a 1,5 m por debajo del impacto en el saquito. El saquito oscila experimentando un desplazamiento vertical de 30 cm. Calcular la velocidad de la bala en el momento del impacto.

Solución

Conservación del momento lineal:

$$mv = MV + mv' \quad \Rightarrow \quad v = \frac{MV + mv'}{m} = \frac{M}{m}V + v'$$

Cálculo de V.—Después del choque la energía cinética de M se transforma en potencial:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh}$$

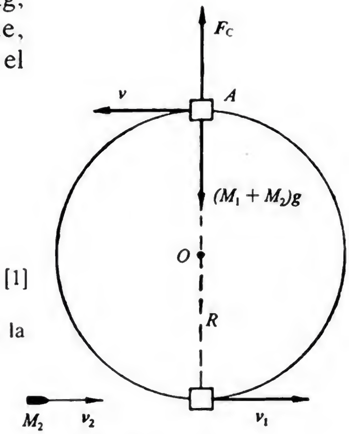
Cálculo de v'.—Tiro horizontal:

$$\left.\begin{aligned} x &= v't \\ y &= \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}\right| \; t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \quad \Rightarrow \quad v' = x\sqrt{\frac{g}{2y}}$$

luego:

$$\boxed{v = \frac{M}{m}\sqrt{2gh} + x\sqrt{\frac{g}{2y}} = \frac{4\,000}{40}\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}3} + 20\sqrt{\frac{9{,}8}{2 \times 1{,}5}} = 278{,}6 \text{ m/s}}$$

Problema 70. Un cuerpo de 1 kg de masa se halla pendiente de un hilo sin masa de 1 m de longitud y sujeto por su otro extremo. Lanzamos horizontalmente un proyectil de 20 g de masa que realiza un choque frontal con el cuerpo de 1 kg, quedando empotrado en él. Calcular la mínima velocidad del proyectil para que, realizado el choque, ambas masas describan una circunferencia completa en el plano vertical.



Problema XI-70

Solución

En el choque se conserva el momento lineal:

$$M_2 v_2 = (M_1 + M_2) v_1 \qquad [1]$$

La mínima velocidad v de $M_1 + M_2$ en el punto A para que describan una circunferencia la calculamos igualando el peso y la fuerza centrífuga:

$$Mg = F_C \quad \Rightarrow \quad M\frac{v^2}{R} = Mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{Rg}$$

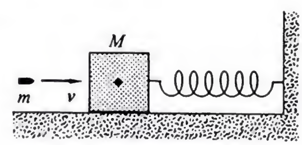
y como una vez realizado el choque la energía de $M_1 + M_2$ se transforma en potencial:

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)v_1^2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)v^2 + 2(M_1 + M_2)gR \quad \Rightarrow \quad v_1' = \sqrt{v^2 + 4gR} = \sqrt{5gR}$$

que, sustituida en [1], nos da:

$$\boxed{v_2 = \frac{M_1 + M_2}{M_2}\sqrt{5gR} = \frac{1\,020}{20}\sqrt{5 \times 9{,}8} = 357 \text{ m/s}}$$

Problema 71. Una bala de masa m se introduce en un bloque de madera de masa M que está unido a un resorte espiral de constante de recuperación K; por el impacto se comprime el resorte una longitud x, sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el suelo es μ. Calcular en función de estos datos la velocidad de la bala antes del choque.



Problema XI-71

Solución

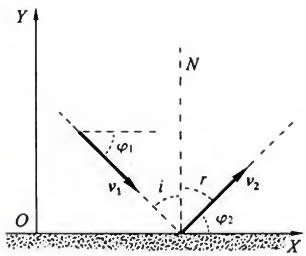
$$\left.\begin{array}{l} mv = (m + M)V \\ \frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{1}{2}Kx^2 + Rx \\ R = \mu(m + M)g \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{\frac{Kx^2 + 2Rx}{M + m}} = \sqrt{\frac{Kx^2 + 2\mu(m + M)gx}{M + m}}$$

luego:

$$\boxed{v = \frac{m + M}{m}V = \frac{m + M}{m}\sqrt{\frac{Kx^2 + 2\mu(m + M)gx}{M + m}}}$$

Problema 72. Demostrar que cuando un cuerpo, perfectamente elástico, choca oblicuamente con otro, también elástico, en reposo y de masa mucho mayor que la suya, sale con la misma velocidad que tenía antes del choque, cumpliéndose que el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales.

Solución



Problema XI-72

Sea $\boldsymbol{v}_1$ la velocidad del cuerpo antes del choque y $\boldsymbol{v}_2$ la de después, de la figura deducimos:

$$\boldsymbol{v}_1 = v_1 \cos\varphi_1 \boldsymbol{i} + v_1 \operatorname{sen}\varphi_1 \boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = v_2 \cos\varphi_2 \boldsymbol{i} + v_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \boldsymbol{j}$$

La conservación del momento lineal en el choque nos da:

$$\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{p}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{l} p_{1x} = p_{2x} \\ p_{1y} = p_{2y} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_1 \cos\varphi_1 = v_2 \cos\varphi_2 \\ v_1 \operatorname{sen}\varphi_1 = v_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \end{array} \right.$$

al ser elástica la colisión se conservará la energía cinética; por tanto:

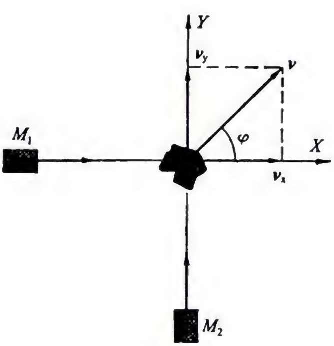
$$\frac{1}{2} M v_1^2 = \frac{1}{2} M v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$$

de las anteriores se obtiene que φ_1 y φ_2 son iguales en «valor absoluto», deduciéndose de la figura que:

$$\boxed{\hat{\imath} = \hat{r}}$$

Problema 73. Un cuerpo de 5 kg de masa se mueve sobre una mesa lisa con velocidad 10 m/s y choca con otro de 10 kg de masa que se desplaza en dirección perpendicular a la anterior con velocidad de 5 m/s. Ambos bloques, después del choque, quedan unidos y deslizan juntos. Calcular la velocidad de ambos después del choque, la dirección de ésta y la pérdida de energía cinética en el choque.

Solución



Problema XI-73

$$\boldsymbol{p} = \text{ct}^{\text{e}} \left| \begin{array}{l} p_x = M v_x = \text{ct}^{\text{e}} \\ p_y = M v_y = \text{ct}^{\text{e}} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} M_1 v_1 = (M_1 + M_2) v_x \\ M_2 v_2 = (M_1 + M_2) v_y \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} v_x = \dfrac{M_1}{M_1 + M_2} v_1 = \dfrac{5}{5 + 10} 10 = \dfrac{10}{3} \text{ m/s} \\[2ex] v_y = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} v_2 = \dfrac{10}{5 + 10} 5 = \dfrac{10}{3} \text{ m/s} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \dfrac{10\sqrt{2}}{3} \text{ m/s}} \\[2ex] \operatorname{tag}\varphi = \dfrac{v_y}{v_x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 45°} \end{array} \right.$$

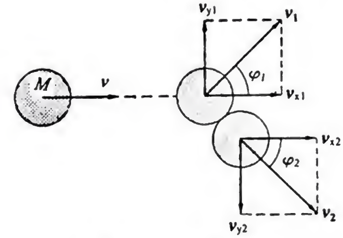
$$\Delta T = T_0 - T = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 5 \times 10^2 + \frac{1}{2} 10 \times 5^2 - \frac{1}{2} 15 \frac{200}{9} = 208{,}3 \text{ J}$$

Problema 74. Una bola de billar en reposo es golpeada por otra idéntica que se mueve inicialmente con una velocidad v, y esta última es desviada φ_1 de su dirección inicial. La bola que estaba en reposo adquiere una velocidad que forma un ángulo φ_2 con la dirección de la velocidad v. Hallar la velocidad de cada bola después del choque. Aplicación: $v = 2$ m/s, $\varphi_1 = 30°$, $\varphi_2 = -45°$. Determinar si este choque es perfectamente elástico.

Solución

$$p = Mv = \text{ct}^{\text{e}} \left| \begin{array}{l} p_x = Mv_x = \text{ct}^{\text{e}} \\ p_y = Mv_y = \text{ct}^{\text{e}} \end{array} \right.$$



Problema XI-74

$$\begin{array}{r|l} Mv = Mv_{x1} + Mv_{x2} & v_{x1} + v_{x2} = v \\ 0 = Mv_{y1} + Mv_{y2} & v_{y1} + v_{y2} = 0 \\ \text{tag}\varphi_1 = \dfrac{v_{y1}}{v_{x1}} & \text{tag}\varphi_1\, v_{x1} - v_{y1} = 0 \\ \text{tag}\varphi_2 = \dfrac{v_{y2}}{v_{x2}} & \text{tag}\varphi_2\, v_{x2} - v_{y2} = 0 \end{array}$$

Resolvemos por Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{tag}\varphi_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \text{tag}\varphi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \text{tag}\varphi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = v\,\text{tag}\varphi_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \text{tag}\varphi_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\,v\,\text{tag}\varphi_1 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{tag}\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{tag}\varphi_2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = v\,\text{tag}\varphi_1\,\text{tag}\varphi_2$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{tag}\varphi_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \text{tag}\varphi_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\,v\,\text{tag}\varphi_1\,\text{tag}\varphi_2$$

$$\begin{array}{l|l} v_{x1} = \dfrac{v\,\text{tag}\varphi_2}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1} & v_{x2} = \dfrac{-\,v\,\text{tag}\varphi_1}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1} \\ v_{y1} = \dfrac{v\,\text{tag}\varphi_1\,\text{tag}\varphi_2}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1} & v_{y2} = \dfrac{-\,v\,\text{tag}\varphi_1\,\text{tag}\varphi_2}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1} \end{array}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = \frac{v\,\text{tag}\varphi_2}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1}\sqrt{1 + \text{tag}^2\varphi_1}}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \frac{v\,\text{tag}\varphi_1}{\text{tag}\varphi_2 - \text{tag}\varphi_1}\sqrt{1 + \text{tag}^2\varphi_2}}$$

APLICACIÓN:

$$\text{tag}\varphi_1 = \text{tag}30° = 0{,}577$$

$$\text{tag}\varphi_2 = \text{tag}(-45°) = -1$$

$$\begin{array}{l|l} v_{x1} = \dfrac{-2 \times 1}{-1 - 0{,}577} = \dfrac{2}{1{,}577} = 1{,}27 \text{ m/s} & v_{x2} = \dfrac{-2 \times 0{,}577}{-1 - 0{,}577} = \dfrac{1{,}154}{1{,}577} = 0{,}73 \text{ m/s} \\ v_{y1} = \dfrac{-2 \times 0{,}577 \times 1}{-1 - 0{,}577} = \dfrac{1{,}154}{1{,}577} = 0{,}73 \text{ m/s} & v_{y2} = \dfrac{2 \times 0{,}577 \times 1}{-1 - 0{,}577} - \dfrac{1{,}154}{1{,}577} = -\,0{,}73 \text{ m/s} \end{array}$$

$$\boxed{v_1 = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{y1}^2} = 1{,}46 \text{ m/s}} \qquad \boxed{v_2 = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = 1{,}03 \text{ m/s}}$$

Si llamamos T_0 a la energía cinética inicial del sistema y T a la energía cinética después del choque, será elástico si:

$$T_0 = T \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1$$

como:

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} Mv^2 = 2M \\ T &= \frac{1}{2} Mv_1^2 + \frac{1}{2} Mv_2^2 = 1{,}6\ M \end{aligned}\right| \Rightarrow T_0 \neq T \Rightarrow \boxed{\text{El choque es inelástico}}$$

Problema 75. Una pelota cae desde una altura de 2 m y al botar contra el suelo asciende a 0,5 m. Calcular el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.

Solución

$$c = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

como las velocidades del suelo v_2' y v_2 son cero:

$$c = -\frac{v_1'}{v_1} = -\frac{\sqrt{2gh'}}{-\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{2g0{,}5}}{\sqrt{2g2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{c = 0{,}5}$$

Problema 76. Desde la azotea de un alto edificio de 64 m de altura (h = 64 m) dejamos caer una pelota cuyo coeficiente de restitución con el pavimento de la calle es $c = 1/2$. Averiguar la altura a que asciende después de botar 3 veces con el suelo.

Solución

La velocidad con que llega al pavimento es:

$$v = \sqrt{2gh}$$

El valor absoluto de la velocidad que adquiere tras chocar con él por primera vez es:

$$v_1 = c\sqrt{2gh} = \sqrt{2gh_1}$$

siendo h_1 la altura a que asciende la pelota después del primer choque; por tanto:

$$c^2 h = h_1$$

Al caer desde esta altura h_1 rebotará y llegará a una altura $h_2 = c^2 h_1$, etc. Es decir:

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= c^2 h \\ h_2 &= c^2 h_1 \\ h_3 &= c^2 h_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ h_n &= c^2 h_{n-1} \end{aligned}\right| \quad \boxed{h_n = c^{2n} h}$$

En nuestro caso, sustituyendo los datos del enunciado:

$$\boxed{h_3 = c^6 h = \frac{64}{2^6} = 1\ \text{m}}$$

Las respectivas alturas, antes y después de cada choque serían:

$$h = 64 \text{ m} \qquad h_1 = \frac{64}{2^2} = 16 \text{ m} \qquad h_2 = \frac{64}{2^4} = 4 \text{ m} \qquad h_3 = \frac{64}{2^6} = 1 \text{ m}$$

Problema 77. En el problema anterior se dedujo que la altura a que llega una pelota que choca contra el suelo, dejándola caer desde una altura h y después de botar n veces, es $h_n = c^{2n}h$, siendo c el coeficiente de restitución. Hallar una fórmula general del tiempo que transcurre entre dos choques consecutivos. Aplicarla para $h = 64$ m y $c = 1/2$ y considerar los choques primero y segundo.

Solución

El tiempo que tarda en caer, después del choque n, una vez alcanzada la máxima altura es:

$$h_n = c^{2n}h = \frac{1}{2}\, gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = c^n \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

El tiempo en subir y bajar, del choque n al $n + 1$, será el doble del anterior:

$$\boxed{t_{n\to n+1} = 2t = 2c^n \sqrt{\frac{2h}{g}}} \Rightarrow \boxed{t_{1\to 2} = 2\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2 \times 64}{9{,}8}} = \simeq 3{,}6 \text{ s}}$$

Problema 78. Una pequeña esfera de masa 100 g se halla pendiente de un hilo inextensible y sin masa, de longitud 2 m y sujeto por su otro extremo. Lanzamos horizontalmente otra pequeña esfera para que realice un choque frontal con la primera. Calcular la mínima velocidad de la esfera que lanzamos y su masa en tal caso para que, realizando el choque, la esfera pendiente del hilo describa una circunferencia completa en el plano vertical y la bola lanzada caiga verticalmente. Coeficiente de restitución: $c = 1/4$. Las esferas se consideran como masas puntuales.

Solución

Conservación del momento lineal:

$$M_1v_1 + M_2v_2 = M_1v'_1 + M_2v'_2$$

pero $v_1 = 0$ y $v'_2 = 0$, luego:

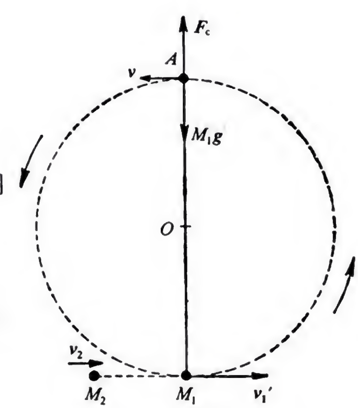
$$M_2v_2 = M_1v'_1 \tag{1}$$

Definición de coeficiente de restitución:

$$c = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{v'_1}{-v_2} = \frac{v'_1}{v_2} \tag{2}$$

por tanto, teniendo en cuenta [1], nos queda:

$$M_2 = cM_1$$



Problema XI-78

Cálculo de v_1':

La mínima velocidad v de M_1 en el punto A para que describa una circunferencia la calculamos igualando el peso y la fuerza centrífuga:

$$Mg = F_C \quad \Rightarrow \quad M\frac{v^2}{R} = Mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{Rg}$$

y como una vez realizado el choque la energía de M_1 se transformará en cinética y potencial en el punto más alto de la trayectoria, nos quedará:

$$\frac{1}{2}M_1 v_1'^2 = \frac{1}{2}M_1 v^2 + 2M_1 gR \quad \Rightarrow \quad v_1' = \sqrt{v^2 + 4gR} = \sqrt{5gR}$$

que sustituida en [2] nos da:

$$c = \frac{\sqrt{5gR}}{v_2} \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{\sqrt{5gR}}{c}$$

para $R = 2$ m y $M_1 = 100$ g obtenemos:

$$\boxed{M_2 = cM_1 = \frac{1}{4}\,100 = 25 \text{ g}} \qquad \boxed{v_2 = \frac{\sqrt{5 \times 9{,}8 \times 2}}{1/4} \simeq 40 \text{ m/s}}$$

D) CONSERVACION MOMENTO ANGULAR

FORMULARIO

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR.—Si no actúan pares exteriores, es decir:

$$\boldsymbol{N} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{J}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J} = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} J_x = I\omega_x = \text{ct}^{\text{e}} \\ J_y = I\omega_y = \text{ct}^{\text{e}} \\ J_z = I\omega_z = \text{ct}^{\text{e}} \end{array} \right.$$

Problema 79. Sobre una partícula de 1 kg de masa actúan simultáneamente dos fuerzas de valor: $\boldsymbol{F}_1 = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ N y $\boldsymbol{F}_2 = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ N. Calcular:

1. Aceleración de la partícula.

2. Si la partícula se encuentra inicialmente en el origen y en reposo, ¿cuál es el valor de su momento angular respecto al origen al cabo de 1 s?

Solución

1)

$$F = \Sigma Fi = Ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\Sigma F_i}{M} = 2i + 3j - k \text{ m/s}^2}$$

de la que obtenemos, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, los valores de v y r:

$$v = \int a dt = (2t + C_1)i + (3t + C_2)j + (-t + C_3)k$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 2ti + 3tj - tk$$

$$r = \int v dt = (t^2 + C'_1)i + \left(\frac{3}{2}t^2 + C'_2\right)j + \left(-\frac{1}{2}t^2 + C'_3\right)k$$

$$C'_1 = C'_2 = C'_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = t^2 i + \frac{3}{2}t^2 j - \frac{1}{2}t^2 k$$

2)

$$t = 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} v = 2i + 3j - k \text{ m/s} \\ r = i + \frac{3}{2}j - \frac{1}{2}k \text{ m} \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad J = r \times Mv = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

de acuerdo con el teorema de conservación del momento angular, ya que no actúan pares y J tiene que ser constantemente nula.

Problema 80. Un disco de 30 cm de diámetro y de 200 g de masa se encuentra girando alrededor de su eje con una velocidad angular de 33 rpm. En estas condiciones se adhiere una partícula de 10 g en un punto que dista 10 cm del eje de giro. Hállese la velocidad angular del conjunto disco-partícula.

Solución

$$J = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad I\omega = (I + I')\omega'$$

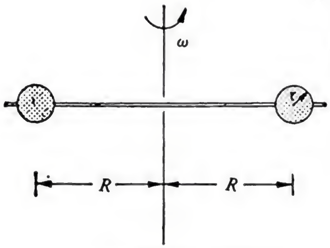
$$\left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2}MR^2 \\ \omega = 2\pi\nu \\ I' = mr^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}MR^2 2\pi\nu = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right) 2\pi\nu' \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\nu' = \frac{MR^2}{MR^2 + 2mr^2}\,\nu = \frac{200 \times 15^2}{200 \times 15^2 + 2 \times 10 \times 10^2}\,33 = 31{,}6 \text{ rpm}}$$

Problema 81. Dos esferas de masa $M = 6$ kg y radio $r = 20$ cm están montadas como indica la figura y pueden deslizar a lo largo de la barra muy delgada y homogénea de masa $M' = 2$ kg y longitud $L = 2$ m. El conjunto gira libremente con una frecuencia $\nu_0 = 120$ rpm respecto a un eje vertical que pasa por el centro del sistema. Inicialmente las esferas se encuentran fijas mediante fiadores a una distancia $R = 50$ cm del eje de giro; se sueltan los fiadores y las esferas deslizan por la barra hasta que salen por los extremos. Calcular:

1. La frecuencia con que gira el sistema cuando los centros de las esferas se encuentran en los extremos.

2. La energía cinética del sistema en cada uno de los casos.



Problema XI-81

Solución

$$N_{ex} = 0 \;\Rightarrow\; J = ct^e \;\Rightarrow\; I_0\omega_0 = I_1\omega_1$$

$$I_0 = \frac{1}{12} M'L^2 + 2\left[\frac{2}{5} Mr^2 + MR^2\right] = \frac{1}{12}\, 2 \times 4 + 2 \times 6\left[\frac{2}{5}\, 0{,}2^2 + 0{,}5^2\right] = 3{,}86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_1 = \frac{1}{12} M'L^2 + 2\left[\frac{2}{5} Mr^2 + M\frac{L^2}{4}\right] = \frac{1}{12}\, 2 \times 4 + 2 \times 6\left[\frac{2}{5}\, 0{,}2^2 + \frac{1}{4}\, 4\right] = 12{,}86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1)

$$I_0 2\pi\nu_0 = I_1 2\pi\nu_1 \;\Rightarrow\; \boxed{\nu_1 = \frac{I_0}{I_1}\,\nu_0 = \frac{3{,}86}{12{,}86}\, 120 = 36 \text{ rpm}}$$

2)

$$\boxed{T_0 = \frac{1}{2}\, I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}\, 3{,}86 \times 4\pi^2 4 = 305 \text{ J}}$$

$$\boxed{T_1 = \frac{1}{2}\, I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}\, 12{,}86 \times 4\pi^2 \left(\frac{36}{60}\right)^2 = 91 \text{ J}}$$

Problema 82. Tenemos un volante de 80 cm de diámetro y 50 kg de masa que consideramos concentrada en el aro periférico y puede girar en un plano horizontal. Queremos saber:

1. Su aceleración angular si partiendo del reposo tira de él una cuerda arrollada a su periferia, con la fuerza constante de 1 kp. La masa de la cuerda es despreciable y no existen rozamientos.

2. Velocidad angular del volante y de traslación de la cuerda al cabo de 10 s.

3. Longitud de la cuerda desarrollada en ese tiempo.

4. A los 10 s citados se rompe la cuerda y entonces colgamos del aro pesos por valor de 25 kg; ¿cuál es la nueva velocidad angular?

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ N = rF \\ I = Mr^2 \end{array}\right| \quad rF = Mr^2\alpha \;\Rightarrow\; \boxed{\alpha = \frac{F}{Mr} = \frac{9{,}8}{50 \times 0{,}4} = 0{,}49 \text{ rad/s}^2}$$

2) $\boxed{\omega = \alpha t = 0{,}49 \times 10 = 4{,}9 \text{ rad/s}}$ $\boxed{v = \omega r = 4{,}9 \times 0{,}4 = 1{,}96 \text{ m/s}}$

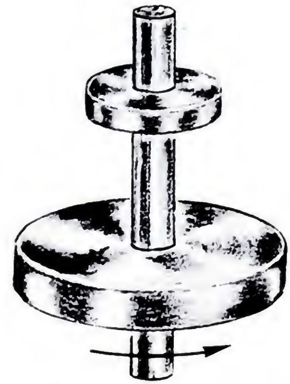
3)

$$\boxed{l = \frac{1}{2}\, vt = \frac{1}{2}\, 1{,}96 \times 10 = 9{,}8 \text{ m}}$$

4)

$$N_{\text{ex}} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad I\omega = I'\omega'$$

$$\boxed{\omega' = \frac{I}{I'}\,\omega = \frac{Mr^2}{Mr^2 + M'r^2}\,\omega = \frac{M}{M + M'}\,\omega = \frac{50}{50 + 25}\,4{,}9 = 3{,}26 \text{ rad/s}}$$



Problema XI-83

Problema 83. Un disco homogéneo que puede girar alrededor de un eje vertical pasa del reposo a 90 rpm en 10 s. Su peso son 25 kg y el diámetro 1 m. Calcular:
1. Fuerza constante capaz de producir dicho movimiento aplicada en la periferia, durante los 10 s.
2. Energía cinética del disco cuando gira a 90 rpm.
3. Cuando va girando a dicha velocidad se acopla a él otro disco coaxial de 50 kg de peso y 50 cm de diámetro. Calcular la velocidad angular del conjunto formado por ambos.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ N = Fr \\ \omega = 2\pi\nu = \alpha t \\ I = \dfrac{1}{2}\,Mr^2 \end{array}\right| \quad Fr = \frac{1}{2}\,Mr^2\,\frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{Mr\pi\nu}{t} = \frac{25 \times 0{,}5 \times \pi \times 90}{60 \times 10} = 5{,}89 \text{ N}}$$

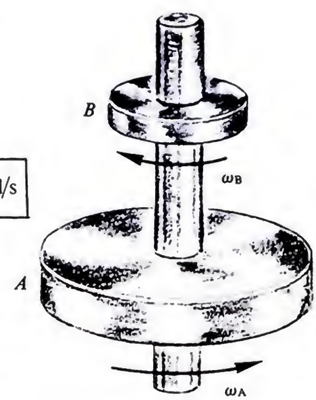
2)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\,I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,Mr^2 4\pi^2\nu^2 = Mr^2\pi^2\nu^2 = 25 \times 0{,}5^2\pi^2\left(\frac{90}{60}\right)^2 = 138{,}79 \text{ J}}$$

3)

$$I\omega = I'\omega' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,Mr^2 2\pi\nu = \left(\frac{1}{2}\,Mr^2 + \frac{1}{2}\,M'r'^2\right) 2\pi\nu'$$

$$\nu' = \frac{Mr^2}{Mr^2 + M'r'^2}\,\nu = \frac{25 \times 0{,}5^2}{25 \times 0{,}5^2 + 50 \times 0{,}25^2}\,\frac{90}{60} = 1 \text{ vuelta/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega' = 2\pi\nu' = 2\pi \text{ rad/s}}$$



Problema XI-84

Problema 84. El disco A de la figura gira con una velocidad angular ω_A. El disco B, que tiene un momento de inercia tres veces menor que el de A, gira con una velocidad angular ω_B en sentido contrario al A y dos veces mayor en módulo que ω_A. Se deja caer el disco B sobre el A y en el acoplamiento se producen 315 kgm de calor. Calcular las energías cinéticas iniciales de ambos discos.

Solución

Conservación momento angular:

$$N_{ex} = 0 \quad \Rightarrow \quad J = \mathrm{ct^e} \quad \Rightarrow \quad I_A\omega_A - I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\left.\begin{aligned} I_B &= \frac{1}{3} I_A \\ \omega_B &= 2\omega_A \end{aligned}\right| \quad \omega = \frac{I_A\omega_A - I_B\omega_B}{I_A + I_B} = \frac{I_A\omega_A - \frac{1}{3} I_A 2\omega_A}{I_A + \frac{1}{3} I_A} = \frac{1}{4}\omega_A$$

Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B\omega_B^2 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 + Q$$

$$\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} I_A 4\omega_A^2 = \frac{1}{2}\left(I_A + \frac{1}{3} I_A\right)\frac{1}{16}\omega_A^2 + Q$$

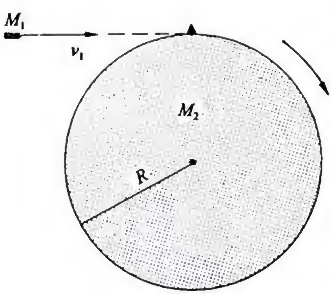
$$\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 + \frac{4}{3}\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 = \frac{1}{12}\frac{1}{2} I_A\omega_A^2 + Q$$

$$\boxed{T_A = \frac{1}{2} I_A\omega_A^2 = \frac{Q}{1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{12}} = \frac{4Q}{9} = \frac{4 \times 315}{9} = 140 \text{ kgm}}$$

$$\boxed{T_B = \frac{1}{2} I_B\omega_B^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} I_A 4\omega_A^2 = \frac{4}{3} T_A = 186{,}66 \text{ kgm}}$$

Problema 85. Una bala de masa M_1 y velocidad horizontal v_1 choca con un pequeño diente situado en la periferia de un volante de masa M_2 y radio R. Suponiendo la bala como una masa puntual, que el volante es cilíndrico, macizo y homogéneo (no se tiene en cuenta el pequeño diente) y que el choque es perfectamente elástico, realizándose en la periferia del volante, averiguar la velocidad de la bala y la angular adquirida por la rueda después del choque.

$$(M_2 = 1 \text{ kg}; \quad M_1 = 100 \text{ g}; \quad R = 10 \text{ cm}; \quad v_1 = 100 \text{ m/s})$$



Problema XI-85

Solución

Conservación del momento angular:

$$M_1 v_1 R = M_1 v_1' R + I\omega$$

Conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 R(v_1 - v_1') &= I\omega \\ M_1(v_1^2 - v_1'^2) &= I\omega^2 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_1' = \omega R$$

que sustituida en la primera:

$$M_1 v_1 R = M_1 v_1' R + I\,\frac{v_1 + v_1'}{R} \quad \Rightarrow \quad v_1\left(M_1 R - \frac{I}{R}\right) = v_1'\left(M_1 R + \frac{I}{R}\right) \quad \Rightarrow$$

$$v_1' = v_1\,\frac{M_1 R^2 - I}{M_1 R^2 + I} \qquad \omega = \frac{v_1 + v_1'}{R}$$

sustituyendo:

$$I = \frac{1}{2} M_2R^2$$

$$\boxed{v'_1 = v_1 \frac{2M_1 - M_2}{2M_1 + M_2}} \qquad \boxed{\omega = \frac{v_1}{R} \frac{4M_1}{2M_1 + M_2}}$$

Resultados numéricos:

$$\boxed{v'_1 = 100 \frac{0,2 - 1}{1,2} = - 66,66 \text{ m/s}}$$

La bala retrocede a tal velocidad.

$$\boxed{\omega = \frac{100}{0,1} \frac{0,4}{1,2} = 333,33 \text{ rad/s}}$$

Problema 86. Resolver el problema anterior, suponiendo que la bala se incruste en la periferia del volante (choque inelástico).

Solución

Conservación del momento angular:

$$M_1v_1R = M_1v'_1R + I\omega$$

(no hay conservación de la energía cinética). Al girar juntos el volante y la bala se verifica:

$$v'_1 = \omega R \quad \Rightarrow \quad M_1v_1R = M_1\omega R^2 + \frac{1}{2} M_2R^2\omega \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{\omega = \dfrac{v_1}{R} \dfrac{2M_1}{2M_1 + M_2} = \dfrac{500}{3} \text{ rad/s}} \\ \boxed{v'_1 = \omega R = v_1 \dfrac{2M_1}{2M_1 + M_2} = \dfrac{50}{3} \text{ m/s}} \end{array} \right.$$

Problema 87. Una fuerza de 2 kg actúa durante 3 s sobre un cuerpo de 9,8 g.
1. ¿Cuál es el impulso de la fuerza?
2. ¿Qué velocidad le comunica al cuerpo?
3. ¿Cuál es la energía cinética que adquiere el cuerpo?
3. Después de haber estado en movimiento un cierto tiempo choca con un aro circular fijo por su centro. El choque es tangencial y el cuerpo queda incrustado en el aro. ¿Cuál es la velocidad que adquiere el conjunto si la masa del aro es de 2 kg y 5 cm su diámetro?

Solución

1)

$$\boxed{Ft = 2 \times 3 = 6 \text{ kp} \cdot \text{s}}$$

2)

$$Ft = Mv \quad \Rightarrow \boxed{v = \frac{Ft}{M} = \frac{6 \times 9,8}{9,8 \times 10^{-3}} = 6\ 000 \text{ m/s}}$$

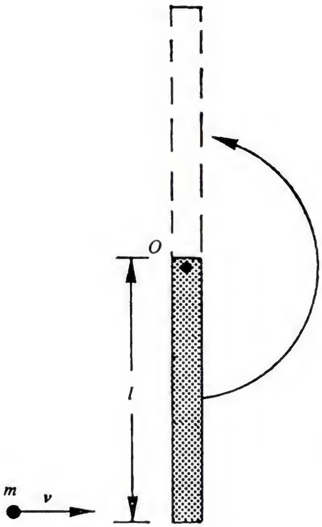
3)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \frac{9{,}8 \times 10^{-3}}{9{,}8} 36 \times 10^6 = 18\,000 \text{ kgm}}$$

4) Conservación del momento angular (M' y R', masa y radio del aro):

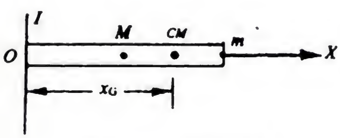
$$\left.\begin{array}{l} MvR' = I'\omega' + Mv'R' \\ I' = M'R'^2 \\ v' = \omega' R' \end{array}\right| \quad MvR' = M'R'^2 \frac{v'}{R'} + Mv'R' = v'R'(M' + M)$$

$$\boxed{v' = \frac{M}{M' + M} v = \frac{9{,}8 \times 10^{-3}}{2 + 9{,}8 \times 10^{-3}} 6\,000 = 29{,}2 \text{ m/s}}$$



Problema XI-88

Problema 88. Cuál es la mínima velocidad que tiene que llevar un proyectil, de masa m, para que al chocar e incrustarse en el extremo inferior de una barra homogénea, de longitud l y masa M, que se encuentra atravesada por el otro extremo por un eje, para que dé una vuelta completa alrededor de dicho eje, después del impacto.



Problema XI-88-1.ª

Solución

Calculemos primero la posición de x_G y el momento de inercia de barra y bala incrustada respecto al eje que pasa por O:

$$x_G = \frac{M \frac{l}{2} + ml}{M + m} = \frac{M + 2m}{M + m} \frac{l}{2} \qquad I = \frac{1}{3} Ml^2 + ml^2 = \frac{1}{3} [M + 3m] l^2$$

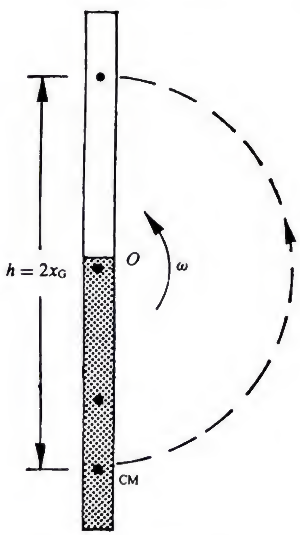
Conservación del momento angular:

$$mvl = I\omega \quad \Rightarrow \quad v = \frac{I}{ml} \omega = \frac{\frac{1}{3} [M + 3m] l^2}{ml} \omega = \frac{l}{3} \frac{M + 3m}{m} \omega$$

Después del impacto conservación de la energía:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2} I\omega^2 = (M + m) gh \\ h = 2x_G \end{array}\right| \quad \frac{1}{2} \frac{1}{3} [M + 3m] l^2 \omega^2 = (M + m) g 2 \frac{M + 2m}{M + m} \frac{l}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{l} \frac{M + 2m}{M + 3m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{l}{3} \frac{M + 3m}{m} \sqrt{\frac{6g}{l} \frac{M + 2m}{M + 3m}}}$$



Problema XI-88-2.ª

Problema 89. Una delgada varilla homogénea de longitud L y masa M_2 puede girar en torno a un eje fijo que pasa por uno de sus extremos. Soldado al eje hay un resorte que, al girar aquél, se comprime. Disparamos horizontalmente una bala de masa M_1 que choca con la varilla, incrustándose en su extremo libre. Por efecto del choque la varilla gira un ángulo φ. Calcular la velocidad v_1 de la bala. (Sabemos que por efecto de un par de momento N el sistema eje-resorte gira un ángulo β.)

$$(L = 1 \text{ m}; \quad M_2 = 1{,}2 \text{ kg}; \quad M_1 = 10 \text{ g}; \quad \varphi = 60°; \quad N = 1 \text{ N} \cdot \text{m}; \quad \beta = 60°)$$

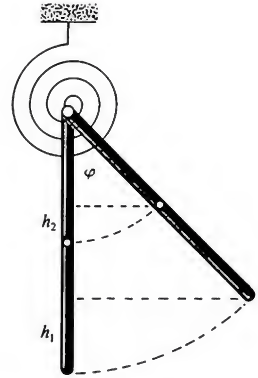
Solución

Cálculo de la constante del resorte:

$$N = K\beta \quad \Rightarrow \quad K = \frac{N}{\beta}$$

Cálculo de la velocidad angular del sistema «varilla proyectil» después del choque: conservación del momento angular:

$$\left.\begin{aligned} &M_1 v_1 L = M_1 v_1' L + I\omega \\ &I = \frac{1}{3} M_2 L^2 \\ &v_1' = \omega L \end{aligned}\right| \quad M_1 v_1 L = M_1 \omega L^2 + \frac{1}{3} M_2 L^2 \omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_1}{L} \frac{M_1}{M_1 + \frac{1}{3} M_2}$$



Problema XI-89

Cálculo de la energía de deformación acumulada en el resorte al girar un ángulo φ:

$$dW = N d\varphi = K\varphi d\varphi \quad \Rightarrow \quad W = \int_0^{\varphi} K\varphi d\varphi = \frac{1}{2} K\varphi^2 = U$$

Conservación de la energía, una vez que el sistema comienza su movimiento de giro:

$$\frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 = M_1 g h_1 + M_2 g h_2 + \frac{1}{2} K\varphi^2$$

$$I_1 = M_1 L^2 \qquad h_1 = L(1 - \cos\varphi)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} M_2 L^2 \qquad h_2 = \frac{L}{2}(1 - \cos\varphi)$$

$$\frac{1}{2}\left[M_1 L^2 + \frac{1}{3} M_2 L^2\right] \frac{v_1^2}{L^2} \frac{M_1^2}{\left[M_1 + \frac{1}{3} M_2\right]^2} = M_1 g L(1 - \cos\varphi) + M_2 g \frac{L}{2}(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2} K\varphi^2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 \frac{M_1^2}{M_1 + \frac{1}{3} M_2} = gL(1 - \cos\varphi)\left[M_1 + \frac{M_2}{2}\right] + \frac{1}{2} K\varphi^2$$

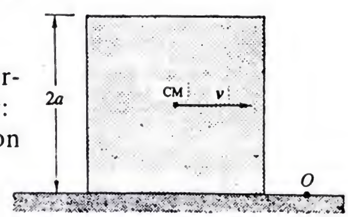
$$\boxed{v_1 = \frac{\sqrt{\left[2gL(1 - \cos\varphi)\left(M_1 + \frac{M_2}{2}\right) + K\varphi^2\right]\left(M_1 + \frac{M_2}{3}\right)}}{M_1}}$$

Aplicación numérica:

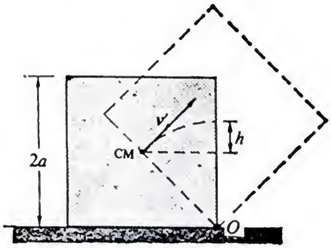
$$K = \frac{N}{\beta} = \frac{3}{\pi} \frac{\mathrm{N \cdot m}}{\mathrm{rad}}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{\sqrt{\left[2 \times 9{,}8\left(1 - \frac{1}{2}\right)(0{,}01 + 0{,}6) + \frac{3}{\pi}\frac{\pi^2}{9}\right](0{,}01 + 0{,}4)}}{0{,}01} \simeq 170 \text{ m/s}}$$

Problema 90. Un cubo de arista $2a$ resbala con una velocidad v sobre una superficie horizontal cuando tropieza con un pequeño obstáculo fijo. Determinar:
1. El momento de inercia del cubo respecto de una arista, sabiendo que con respecto a un eje de simetría, perpendicular a las caras, es $Ml^2/6$.
2. La velocidad del centro de masa justamente después del choque.
3. El valor mínimo de v para que el cubo vuelque.



Problema XI-90



Problema XI-90-1.ª

Solución

1) $I = I_G + Md^2$

$$I_G = \frac{1}{6} Ml^2 = \frac{1}{6} M 4a^2 = \frac{2}{3} Ma^2$$

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\boxed{I = \frac{2}{3} Ma^2 + 2Ma^2 = \frac{8}{3} Ma^2}$$

2) El bloque choca con el obstáculo O y gira en torno a su arista. Aplicamos el teorema de conservación del momento angular respecto a O y nos queda:

$$J = J'$$

$$J = Mva$$

$$J' = I\omega = \frac{8}{3} Ma^2\omega$$

$$Mva = \frac{8}{3} Ma^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{3}{8}\frac{v}{a}$$

$$\boxed{v' = \omega a\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{8} v}$$

3) La energía cinética del cubo tiene que ser suficiente para que el bloque quede en reposo en la posición indicada en la figura; luego la energía cinética de rotación del cubo ha de ser igual al aumento de su energía potencial:

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = Mgh$$

$$h = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1)$$

$$\frac{1}{2}\frac{8}{3} Ma^2 \left(\frac{3}{8}\frac{v}{a}\right)^2 = Mga(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{16(\sqrt{2} - 1)}{3} ga}}$$

E) PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES. MAQUINAS

FORMULARIO

PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES:

$$W_{motor} + W_{resistente} = 0$$

Problema 91. Para subir agua de un pozo se emplea un torno cuya manivela es de 50 cm de longitud y el radio del cilindro 10 cm. El pozo tiene 12,56 m de profundidad; el cubo que pende de la cuerda (supuesta sin peso) pesa 2,5 kg y su capacidad es 1 decalitro. Calcular la fuerza que hay que aplicar a la manivela, el trabajo realizado al subir el cubo lleno de agua y el número de vueltas que es necesario dar a la manivela. Se supone que no existen rozamientos.

Solución

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ decalitro} & = & 10 \text{ litros} \\ \text{Peso de 10 litros de agua} & = & 10 \text{ kp} \\ \text{Peso del cubo vacío} & = & 2{,}5 \text{ kp} \\ \text{Peso total} & = & 12{,}5 \text{ kp} \end{array}$$

$$\Sigma N = 0 \Rightarrow N_1 - N_2 = 0 \Rightarrow F50 = 12{,}5 \times 10 \Rightarrow \boxed{F = \frac{12{,}5 \times 10}{50} = 2{,}5 \text{ kp}}$$

$$\boxed{\text{Trabajo} = \text{peso} \times \text{altura} = 12{,}5 \times 12{,}56 = 157 \text{ kgm}}$$

Altura = número de vueltas × longitud de circunferencia del cilindro

$$\boxed{\text{Número de vueltas} = \frac{12{,}56}{2\pi 0{,}1} = 20 \text{ vueltas}}$$

Problema 92. Considerando los rozamientos entre las distintas partes del torno del problema anterior, hay que realizar para subir el cubo lleno un trabajo de 196,25 kgm. Calcular el rendimiento y el trabajo consumido en vencer los rozamientos.

Solución

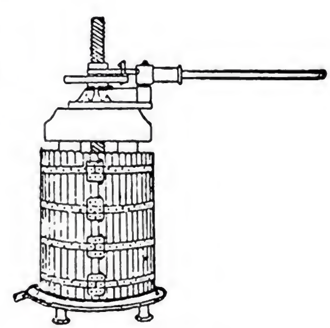
Como el trabajo teórico eran 157 kgm y hemos consumido 196,25, el rendimiento será:

$$\eta = \frac{157}{196{,}25} = 0{,}8 \Rightarrow \boxed{80\ \%}$$

El trabajo empleado en vencer los rozamientos es la diferencia entre el trabajo consumido y el teórico:

$$\boxed{\text{Trabajo} = 196{,}25 - 157 = 39{,}25 \text{ kgm}}$$

Problema 93. Una prensa de lagar consta de un tornillo cuyo paso de rosca es 5 cm, accionado por una barra de longitud 3 m. El diámetro del armazón cilíndrico donde se coloca la pasta es de 1,50 m. Hacen funcionar a la prensa tres obreros, ejerciendo cada uno de ellos una fuerza de 75 kp. El primero actúa en el extremo libre de la barra; el segundo a 50 cm del anterior, y el tercero a 50 cm del segundo. Calcular la fuerza y la presión (fuerza por unidad de superficie) que efectúan contra la materia a prensar.



Problema XI-93

Solución

$$F_1 2\pi r_1 + F_2 2\pi r_2 + F_3 2\pi r_3 = Fh \Rightarrow 2\pi \times 75(3 + 2{,}5 + 2) = F \times 0{,}05 \Rightarrow \boxed{F = 70\,650 \text{ kp}}$$

$$\boxed{P = \frac{F}{A} = \frac{70\,650}{\pi r^2} = \frac{70\,650}{3{,}14 \times 75^2} = 4 \text{ kp/cm}^2}$$

Problema 94. Disponemos de un motor cuyo eje gira a razón de 600 rpm y cuya polea tiene un diámetro de 20 cm. Queremos aumentar las revoluciones hasta 1 500 rpm. ¿Cuál es el diámetro de la polea que hay que acoplar a la anterior? ¿Y si se trata de reducir las revoluciones a 400 rpm, cuál sería tal diámetro?

Solución

1)

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores:

$$\frac{600}{1\,500} = \frac{r_2}{10} \Rightarrow r_2 = \frac{6\,000}{1\,500} = 4 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{d_2 = 8 \text{ cm}}$$

2)

$$\frac{600}{400} = \frac{r_2}{10} \Rightarrow r_2 = \frac{6\,000}{400} = 15 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{d_2 = 30 \text{ cm}}$$

Capítulo XII

EL OSCILADOR ARMONICO. PENDULO

A) CINEMATICA DEL MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMONICO

FORMULARIO

ECUACIONES:

$$\left.\begin{aligned} x &= A\,\text{sen}(\omega t + \varphi) \\ v &= A\omega\cos(\omega t + \varphi) = \omega\sqrt{A^2 - x^2} \\ a &= -A\omega^2\,\text{sen}(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{aligned}\right| \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

EXTREMOS EN VALOR ABSOLUTO:

Si $\text{sen}(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow v_{max} = \pm A\omega$
Si $\text{sen}(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow x = A \Rightarrow v = 0$
Si $\text{sen}(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow a = 0$
Si $\text{sen}(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow x = A \Rightarrow a_{max} = -\omega^2 A$

MOVIMIENTO VIBRATORIO ARMÓNICO AMORTIGUADO:

$$x = Ae^{-k(\omega t + \varphi)}\cos(\omega t + \varphi)$$

COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS VIBRATORIOS ARMÓNICOS:

Misma dirección y período:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\,\text{sen}(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2\,\text{sen}(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right| \quad x = A\,\text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\text{tag}\alpha = \frac{A_1\,\text{sen}\varphi_1 + A_2\,\text{sen}\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

PULSACIONES:

$$\nu' = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} \qquad x = A' \operatorname{sen}\left(2\pi\nu' t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\nu_p = \frac{1}{T_p} = \nu_1 - \nu_2$$

Mismo período y direcciones de vibración perpendiculares:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi$$

Problema 1. Un punto material describe uniformemente una trayectoria circular de 1 m de radio, dando 30 rpm. Expresar la ecuación del movimiento vibratorio armónico que resultaría al proyectar sobre un diámetro las posiciones del punto material en los dos casos siguientes:
1. Se comienza a contar el tiempo cuando la proyección del punto móvil es el centro de la circunferencia y el movimiento va en el sentido de las agujas de un reloj.
2. En el caso de comenzar a contar el tiempo cuando el radio ha girado desde la posición anterior un ángulo de 57,328°.

Solución

1)

$$x = A \operatorname{sen}\omega t$$

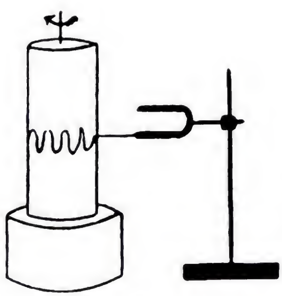
$$\left.\begin{array}{l} A = 100 \text{ cm} \\ \omega = 2\pi\nu = \pi \text{ rad/s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{x = 100 \operatorname{sen}\pi t}$$

2)

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\left.\begin{array}{l} 180° \ldots\ldots \pi \\ 57{,}328° \ldots\ldots \varphi \end{array}\right| \Rightarrow \varphi = \frac{57{,}328 \times 3{,}14}{180} = 1 \text{ rad}$$

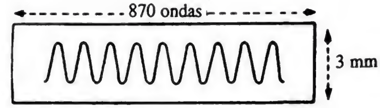
$$\boxed{x = 100 \operatorname{sen}(\pi t + 1)}$$



Problema XII-2-1.ª

Problema 2. En la experiencia correspondiente a la figura el cilindro da una vuelta en 2 s. Dada una vuelta, el dibujo que se ha realizado en el papel consta de 870 ondulaciones completas cuya máxima dimensión transversa es 3 mm. Determinar la frecuencia, el período y la ecuación del movimiento —supuesto vibratorio, armónico simple— de la punta entintada. Calcular también la elongación al cabo de 0,1 y 0,01 s de iniciado el movimiento.

Solución



Problema XII-2-2.ª

1) 870 vibraciones corresponden a 2 s, luego la frecuencia será:

$$\nu = \frac{870}{2} = 435 \text{ Hz}$$

2) El período será:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{435} \text{ s}$$

3) La amplitud de la vibración es:

$$A = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15 \text{ cm}$$

4) La pulsación será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 870\pi \text{ rad/s}$$

5) La ecuación del movimiento es:

$$x = 0{,}15 \operatorname{sen} 870\pi t$$

6) Para $t = 0{,}1$ s:

$$x_1 = 0{,}15 \operatorname{sen} 870\pi 0{,}1 = 0{,}15 \operatorname{sen} \pi = 0$$

7) Para $t = 0{,}01$ s:

$$x_2 = 0{,}15 \operatorname{sen} 870\pi 0{,}01 = 0{,}15 \operatorname{sen} 0{,}7\pi$$

que expresado en grados:

$$x_2 = 0{,}15 \operatorname{sen} 126° = 0{,}15 \operatorname{sen} 54° = 0{,}12 \text{ cm}$$

Problema 3. Un punto material oscila con movimiento vibratorio armónico simple de amplitud 2 cm y frecuencia 10 Hz. Calcular su velocidad y aceleración máximas y la velocidad y aceleración en el tiempo $t = 1/120$ s.

Solución

$$\left.\begin{aligned} A &= 2 \text{ cm} \\ \omega &= 2\pi\nu = 20\pi \text{ s}^{-1} \\ \varphi &= 0 \end{aligned}\right\| \quad \begin{aligned} x &= 2 \operatorname{sen} 20\pi t \\ v &= 40\pi \cos 20\pi t = 20\pi \sqrt{4 - x^2} \\ a &= -800\pi^2 \operatorname{sen} 20\pi t = -400\pi^2 x \end{aligned}$$

$$\text{Para } \cos 20\pi t = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = 40\pi \text{ cm/s}}$$

$$\text{Para } \operatorname{sen} 20\pi t = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{max} = -800\pi^2 \text{ cm/s}^2}$$

$$t = \frac{1}{120} \text{ s} \quad \left| \begin{aligned} &\boxed{v = 40\pi \cos \frac{20\pi}{120} = 40\pi \cos \frac{\pi}{6} = 20\pi \sqrt{3} \text{ cm/s}} \\ &\boxed{a = -800\pi^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = -400\pi^2 \text{ cm/s}^2} \end{aligned} \right.$$

Problema 4. La aceleración de un movimiento queda determinada por la expresión: $a = -16\pi^2 x$, estando a medida en cm/s^2 y x (distancia al origen) en cm. Sabiendo que el desplazamiento máximo es 4 cm y que se ha comenzado a contar el tiempo cuando la aceleración adquiere su valor absoluto máximo, en los desplazamientos positivos, determinar:

1. La ecuación del desplazamiento para cualquier instante.

2. La velocidad y aceleración máximas.

3. La velocidad y la aceleración cuando el desplazamiento es la mitad del máximo.

Solución

1)

$$A = 4 \text{ cm} \qquad \boxed{x = 4\cos 4\pi t}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad v = -16\pi \operatorname{sen} 4\pi t = -4\pi\sqrt{16 - x^2}$$

$$\omega = 4\pi \text{ s}^{-1} \qquad a = -64\pi^2 \cos 4\pi t = -16\pi^2 x$$

2) Los extremos serán los valores absolutos de las cantidades siguientes:

$$\text{Si } \operatorname{sen} 4\pi t = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = -16\pi \text{ cm/s}}$$

$$\text{Si } \cos 4\pi t = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{max} = -64\pi^2 \text{ cm/s}^2}$$

3)

$$x = \frac{A}{2} = 2 \text{ cm} \qquad \boxed{v = -4\pi\sqrt{16-4} = -8\pi\sqrt{3} \text{ cm/s}}$$

$$\boxed{a = -16\pi^2 2 = -32\pi^2 \text{ cm/s}^2}$$

Problema 5. Calcular la diferencia de fase que deben tener dos movimientos vibratorios armónicos del mismo período, dirección y amplitud, para que el movimiento resultante tenga la misma amplitud que cualquiera de ellos. Representar gráficamente los movimientos componentes y el resultante.

Solución

La amplitud del movimiento resultante es:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi$$

como es condición del problema que:

$$A_1 = A_2 = A \quad \Rightarrow \quad A^2 = 2A^2 + 2A^2\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 120° = \frac{2\pi}{3}}$$

Las ecuaciones de los dos movimientos las escribiremos de la forma:

$$x_1 = A\operatorname{sen}\omega t$$

$$x_2 = A\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

El movimiento resultante tendrá por ecuación:

$$x = A\operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

como:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{A_2 \operatorname{sen}\varphi}{A_1 + A_2\cos\varphi} = \frac{A\operatorname{sen}\varphi}{A + A\cos\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{\operatorname{sen}120}{1+\cos 120} = \sqrt{3}$$

$$\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$$

La ecuación es:

$$x = A\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

La representación gráfica de $x_1 = f_1(t)$ es una sinusoide que parte del origen.

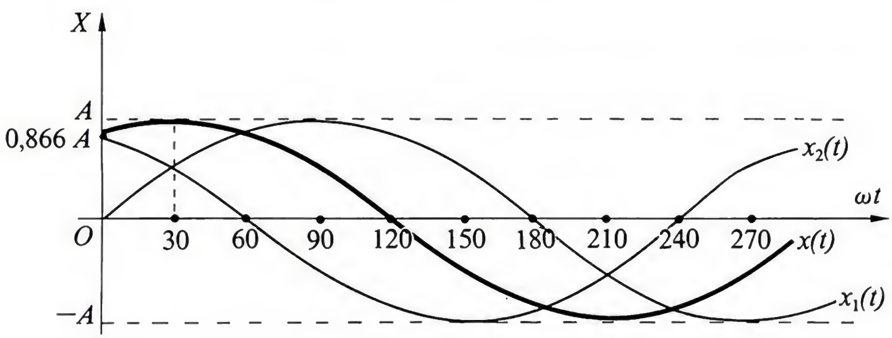
La representación de $x_2 = f_2(t)$, como:

$$x_{0_2} = A\operatorname{sen}120 = A\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866A$$

será una sinusoide con ordenada en el origen x_{0_2}, teniendo en cuenta que para $\omega t = 60°$ se anula x_2, adquiriendo, a partir de ese valor del tiempo, valores negativos.
La ordenada en el origen del movimiento resultante ($t = 0$) es:

$$x_0 = A\operatorname{sen}60 = A\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866A$$

idéntica a la anterior. El valor máximo de la elongación se encuentra para $\omega t = 30°$, y su anulación para $\omega t = 120°$.



Problema XII-5

Problema 6. Determinar la amplitud y la ecuación general del movimiento vibratorio armónico que resulta al estar sometido un cuerpo material a las vibraciones: $x_1 = 3\operatorname{sen}(8\pi t + \pi/2)$ y $x_2 = 4\operatorname{sen}8\pi t$, estando escritas en el sistema CGS.

Solución

Como son dos MVA del mismo período:

$$8\pi t = \frac{2\pi}{T}t \Rightarrow T = \frac{1}{4}\text{ s}$$

tendremos:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4\cos\frac{\pi}{2} = 25\ \text{cm}^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{25} = 5\ \text{cm}}$$

$$\text{tag}\alpha = \frac{A_1\text{sen}\varphi_1 + A_2\text{sen}\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{3\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} + 4\,\text{sen}\,0}{3\cos\frac{\pi}{2} + 4\cos 0} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\alpha \simeq 36{,}86° = \frac{36{,}86\pi}{180} \simeq 0{,}2\pi\ \text{rad}$$

La ecuación del movimiento será:

$$\boxed{x = 5\,\text{sen}(8\pi t + 0{,}2\pi) = 5\,\text{sen}\pi(8t + 0{,}2)}$$

Problema 7. Averiguar la frecuencia de la vibración y la frecuencia de las pulsaciones que se producen al estar sometido un punto material a vibraciones de la misma dirección y de frecuencias 440 y 442 Hz. Suponiendo 5 cm la amplitud de cada una de las vibraciones y que ambas están en concordancia de fase, determinar la expresión general de la elongación en función del tiempo.

Solución

La frecuencia de la vibración vendrá dada por:

$$\nu' = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \frac{440 + 442}{2} = 441\ \text{Hz}$$

La frecuencia de la pulsación será:

$$\boxed{\nu_p = \nu_2 - \nu_1 = 442 - 440 = 2\ \text{Hz}}$$

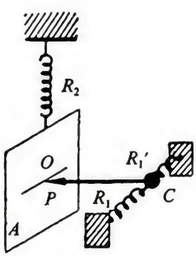
La ecuación del MVA resultante será:

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left[\pi t(\nu_1 - \nu_2) - \frac{\varphi}{2}\right]\text{sen}\left(2\pi t\,\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Como $\varphi = 0$ y $A = 5$ cm, sustituyendo los valores de $\nu_1 - \nu_2$ y $\dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}$ tendremos:

$$\boxed{x = 2 \times 5\cos(\pi t 2)\,\text{sen}(2\pi t 441) = 10\cos(2\pi t)\,\text{sen}(882\pi t)}$$

Problema 8. La punta entintada de la figura vibra horizontalmente cuando estiramos el resorte R_1, comprimiendo R_1' y soltamos el cuerpo C. Tal punta toca a la superficie A pendiente del resorte R_2. Estiramos éste y soltamos A en el instante en que P pasa por su posición de equilibrio (O). Las dos vibraciones perpendiculares son del mismo período. ¿Qué figura dibuja la punta P? Determinar la ecuación de tal trayectoria, siendo las amplitudes de los movimientos de A y P 10 y 5 cm, respectivamente.



Problema XII-8

Solución

Como son dos MVA perpendiculares y la diferencia de fase es 0, la ecuación de la trayectoria será:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} = 0 \Rightarrow \left[\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1}\right]^2 = 0 \Rightarrow \frac{y}{A_2} = \frac{x}{A_1} \Rightarrow y = \frac{A_2}{A_1}x$$

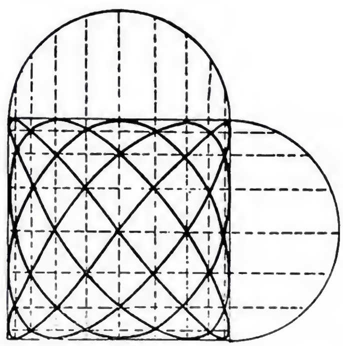
sustituyendo los valores de A_2 y A_2, tendremos:

$$\boxed{y = \frac{5}{10}\,x = \frac{1}{2}\,x}$$

Ecuación de una recta que pasa por el origen y de coeficiente angular $\frac{1}{2}$.

Problema 9. Dibujar la curva del Lissajous correspondiente a dos MVA de direcciones perpendiculares y cuyos períodos están en la relación 5/4, cuyas amplitudes son iguales y se inician ambos movimientos en el origen de coordenadas.

Solución



Problema XII-9

B) DINAMICA DEL MVA

FORMULARIO

TRASLACIÓN:

$$F = Ma = -M\omega^2 x = -Kx \quad \Rightarrow \quad K = M\omega^2 = M\,\frac{4\pi^2}{T^2} = M4\pi^2\nu^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$$

ROTACIÓN:

$$N = I\alpha = -I\omega^2\varphi = -K\varphi \quad \Rightarrow \quad K = I\omega^2 = I\,\frac{4\pi^2}{T^2} = I4\pi^2\nu^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

Problema 10. Un punto material de 40 g de masa realiza un movimiento armónico simple de período $T = 0{,}32$ s. Calcular el valor de la amplitud, sabiendo que el valor máximo de la fuerza responsable del movimiento vale 10 N.

Solución

La fuerza responsable del movimiento es máxima cuando la aceleración es máxima, o sea, cuando $x = A$, luego:

$$F = Ma = -M\omega^2 A = -M\frac{4\pi^2}{T^2}A$$

Operamos con valores absolutos:

$$\boxed{A = \frac{FT^2}{4\pi^2 M} = \frac{10 \times 0{,}32^2}{4\pi^2 40 \times 10^{-3}} = 0{,}65 \text{ m} = 65 \text{ cm}}$$

Problema 11. A una partícula material de 10 g de masa se le hace describir un movimiento vibratorio armónico simple en la dirección del eje de las X. La amplitud del movimiento es de 5 cm, y cada segundo efectúa el punto media vibración. Calcúlese:

1. La ecuación que rige el movimiento.
2. La naturaleza de la fuerza capaz de producirlo y su valor.
3. Los valores de la elongación para los que será máxima la velocidad.
4. Los valores de la elongación para los que la aceleración será nula.

Solución

$$M = 10 \text{ g} \qquad \varphi = 0 \qquad A = 5 \text{ cm}$$

$$\nu = \frac{1}{2}\text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = \pi \text{ s}^{-1}$$

1)

$$\boxed{x = 5\,\text{sen}\,\pi t}$$

$$v = 5\pi\cos\pi t = \pi\sqrt{25 - x^2}$$

$$a = -5\pi^2\,\text{sen}\,\pi t = -\pi^2 x$$

2)

$$\boxed{F = Ma = -50\pi^2\,\text{sen}\,\pi t = -10\pi^2 x}$$

3) La velocidad es máxima cuando:

$$\cos\pi t = \pm 1 \Rightarrow \pi t = K\pi \Rightarrow \text{sen}\,\pi t = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

4)

$$a = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

Problema 12. Una masa de 20 g realiza un movimiento vibratorio armónico en el extremo de un resorte que da dos oscilaciones por segundo, siendo la amplitud del mismo 5 cm. Calcular:

1. La velocidad máxima de la masa que oscila.
2. La aceleración de la masa en el extremo de su movimiento.
3. La constante K del resorte.

Solución

$$A = 5 \text{ cm} \qquad \omega = 2\pi\nu = 4\pi \text{ s}^{-1} \qquad \left| \begin{array}{l} x = 5\,\text{sen}(4\pi t + \varphi) \\ v = 20\pi\cos(4\pi t + \varphi) = 4\pi\sqrt{25 - x^2} \\ a = -80\pi^2\,\text{sen}(4\pi t + \varphi) = -16\pi^2 x \\ F = -1\,600\pi^2\,\text{sen}(4\pi t + \varphi) = -320\pi^2 x \end{array} \right.$$

1) Cuando el $\cos(4\pi t + \varphi) = 1$ la velocidad será máxima, luego:

$$\boxed{v_{max} = 20\pi \text{ cm/s}}$$

2) Cuando $x = A$ la aceleración es máxima:

$$\boxed{a_{max} = -16\pi^2 5 = -80\pi^2 \text{ cm/s}^2}$$

3)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = \frac{1}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 4\pi^2\nu^2 M = 4\pi^2 4 \times 20 = 320\pi^2 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}$$

Problema 13. El movimiento del pistón de un automóvil de 500 g de masa podemos considerarlo vibratorio armónico simple. Si la carrera del pistón (doble de la amplitud) es 10 cm y la velocidad angular del cigüeñal es de 3 600 rpm, calcular:

1. Aceleración del pistón en el extremo de la carrera.
2. Fuerza resultante que se ejerce sobre él en el extremo de la carrera.
3. Velocidad máxima del pistón.

Solución

$$2A = 10 \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}05 \text{ m}$$

$$\nu = \frac{3\,600}{60} = 60 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 120\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\varphi = 0 \qquad M = 0{,}5 \text{ kg}$$

Las ecuaciones del movimiento escritas en el SI serán:

$$x = 0{,}05\,\text{sen}\,120\pi t$$

$$v = 6\pi\cos 120\pi t = 120\pi\sqrt{2{,}5 \times 10^{-3} - x^2}$$

$$a = -720\pi^2\,\text{sen}\,120\pi t = -144 \times 10^2\pi^2 x$$

$$F = -360\pi^2\,\text{sen}\,120\pi t = -72 \times 10^2\pi^2 x$$

1)

$$x = 5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -144 \times 10^2\pi^2 0{,}05 = -720\pi^2 \text{ m/s}}$$

2)

$$x = 5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = -72 \times 10^2 \times \pi^2 \times 0{,}05 = -360\pi^2 \text{ N}}$$

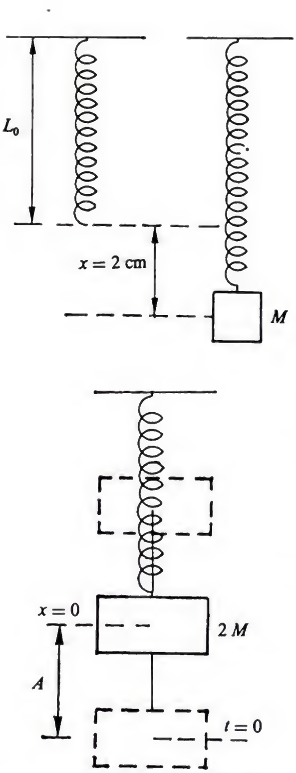
3) Para $x = 0$ la v es máxima, luego:

$$\boxed{v = 6\pi \text{ m/s}}$$

Problema 14. Un cuerpo cuya masa es de 100 g posee un movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta AB de 10 cm de longitud, con un período de 2 s. Calcular:
1. La velocidad y aceleración en el punto medio de la recta AB.
2. La velocidad y aceleración en el extremo B.
3. La fuerza recuperadora en el punto B.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} M = 100 \text{ g} \\ 2A = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad A = 5 \text{ cm} \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \text{ s}^{-1} \\ \varphi = 0 \end{array}\right\| \quad \begin{array}{l} x = 5\,\text{sen}\,\pi t \\ v = 5\pi\cos\pi t = \pi\sqrt{25 - x^2} \\ a = -5\pi^2\text{sen}\,\pi t = -\pi^2 x \\ F = -500\pi^2\text{sen}\,\pi t = -100\pi^2 x \end{array}$$



Problema XII-15

1)

$$x = 0 \left| \begin{array}{l} \boxed{v = 5\pi \text{ cm/s}} \\ \boxed{a = 0} \end{array}\right.$$

2)

$$x = A = 5 \text{ cm} \left\| \begin{array}{l} \boxed{v = 0} \\ \boxed{a = -5\pi^2 \text{ cm/s}^2} \end{array}\right.$$

3)

$$x = A = 5 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = -500\pi^2 \text{ dyn}}$$

Problema 15. A un muelle helicoidal se le cuelga un cuerpo de 10 kg y se alarga 2 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3 cm. Se desea saber:
1. La frecuencia del movimiento.
2. La velocidad, la aceleración y la fuerza recuperadora a los 2 s de haber empezado a oscilar.

Solución

1)

$$F = Kx \quad \Rightarrow \quad K = \frac{F}{x} = \frac{Mg}{x} = 5 \text{ kp/cm} = 500 \times 9{,}8 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{500 \times 9{,}8}{20}} = \frac{5}{2} \text{ Hz}}$$

2)

$$\omega = 2\pi\nu = 5\pi\ \mathrm{s}^{-1} \qquad x = 3\cos 5\pi t$$

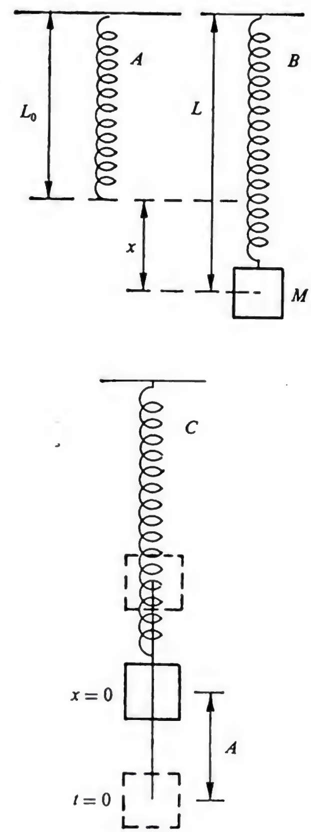
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad v = -15\pi \operatorname{sen} 5\pi t = -5\pi\sqrt{9 - x^2}$$

$$A = 3\ \mathrm{cm} \qquad a = -75\pi^2 \cos 5\pi t = -25\pi^2 x$$

$$F = -15 \times 10^5 \pi^2 \cos 5\pi t = -5 \times 10^5 \pi^2 x$$

$$t = 2\ \mathrm{s} \quad \begin{cases} x = 3\cos 10\pi = 3\ \mathrm{cm} \\ \boxed{v = 0} \\ \boxed{a = -25\pi^2 \times 3 = -75\pi^2\ \mathrm{cm/s^2}} \\ \boxed{F = -5 \times 10^5 \pi^2 \times 3 = -15 \times 10^5 \pi^2\ \mathrm{dyn}} \end{cases}$$

Problema 16. A un resorte cuya longitud natural, cuando está colgado de un punto fijo A, es de 40 cm se le pone una masa de 50 g unida a su extremo libre. Cuando esta masa está en posición de equilibrio B, la longitud del resorte es de 45 cm. La masa se impulsa 6 cm hacia abajo (punto C) y se suelta.
1. ¿Cuál será la constante del resorte?
2. ¿Cuánto vale su aceleración cuando el resorte está separado 6 cm de su posición de equilibrio?
3. ¿Cuál es su aceleración cuando ha alcanzado un punto de 2 cm encima de C?
4. ¿Cuál será la fuerza que actúa sobre él en el punto 2 cm por encima de C?
5. Dibújese un esquema con las diferentes posiciones del movimiento descrito.



Problema XII-16

Solución

1)

$$F = Kx \qquad \boxed{K = \frac{F}{x} = \frac{Mg}{L - L_0} = \frac{50 \times 980}{5} = 9{,}8 \times 10^3\ \frac{\mathrm{dyn}}{\mathrm{cm}}}$$

y como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{50}{9{,}8 \times 10^3}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\ \mathrm{s}$$

luego:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\sqrt{5}\pi\ \mathrm{s}^{-1} \qquad x = 6\cos 2\sqrt{5}\pi t$$

$$\qquad v = -12\sqrt{5}\pi \operatorname{sen} 2\sqrt{5}\pi t = -\sqrt{36 - x^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad a = -120\pi^2 \cos 2\sqrt{5}\pi t = -20\pi^2 x$$

$$A = 6\ \mathrm{cm} \qquad F = -6\,000\pi^2 \cos 2\sqrt{5}\pi t = -1\,000\pi^2 x$$

2)

$$x = A = 6\ \mathrm{cm} \quad \Rightarrow \boxed{a = -20\pi^2 6 = -120\pi^2\ \mathrm{cm/s^2}}$$

3) Cuando se encuentra a 2 cm de la posición más estirada, entonces:

$$x = 6 - 2 = 4\ \mathrm{cm} \quad \Rightarrow \boxed{a = -20\pi^2 4 = -80\pi^2\ \mathrm{cm/s^2}}$$

4) La fuerza productora del movimiento vibratorio armónico es:

$$\left.\begin{array}{l} F = -1\,000\pi^2 x \\ x = 4 \text{ cm} \end{array}\right| \quad F = -4\,000\pi^2 \text{ dyn}$$

La fuerza que actúa sobre el cuerpo es:

$$\boxed{F = Mg + Ma = 50(980 - 80\pi^2) = 9\,522 \text{ dyn}}$$

Problema 17. Un punto móvil de 0,5 kg de masa está animado de un movimiento vibratorio armónico de 10 cm de amplitud, realizando 2 oscilaciones cada segundo. Calcúlese:

1. La elongación de dicho punto, 1/6 s después de alcanzar su máxima separación.

2. La constante de recuperación del movimiento.

3. La energía cinética que poseerá el punto móvil al pasar por su posición de equilibrio.

Solución

$$M = 0{,}5 \text{ kg} \qquad A = 10 \text{ cm} \qquad \omega = 2\pi\nu = 4\pi \text{ s}^{-1} \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = 10\cos 4\pi t$$

$$v = -40\pi \operatorname{sen} 4\pi t = -4\pi\sqrt{100 - x^2}$$

$$a = -160\pi^2\cos 4\pi t = -16\pi^2 x$$

$$F = -8 \times 10^4 \cos 4\pi t = -8 \times 10^3 \pi^2 x$$

1)

$$t = \frac{1}{6} \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 10\cos\frac{4\pi}{6} = 10\cos 120° = -5 \text{ cm}}$$

2)

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = M4\pi^2\nu^2 = 0{,}5 \times 4\pi^2 \times 4 = 8\pi^2 \frac{\text{N}}{\text{m}}}$$

3)

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -40\pi \text{ cm/s} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} 500 \times 16 \times 10^2\pi^2 \text{ erg}$$

$$\boxed{T = 3\,947\,842 \text{ erg}}$$

Problema 18. El émbolo de una máquina de vapor pesa 20 kg, siendo la longitud del cilindro de 40 cm, y suponemos que se mueve con un movimiento armónico simple a razón de 120 períodos por minuto. Determinar:

1. Tiempo que tarda en recorrer 10 cm a partir del momento en que pasa por el centro del cilindro.

2. La energía cinética cuando pasa por el centro del cilindro.

3. Momento y valor de la máxima aceleración.

Solución

$M = 2 \times 10^4$ g	$x = 20 \operatorname{sen} 4\pi t$
$2A = 40 \Rightarrow A = 20$ cm	$v = 80\pi \cos 4\pi t = 4\pi \sqrt{400 - x^2}$
$\varphi = 0$	$a = -320\pi^2 \operatorname{sen} 4\pi t = -16\pi^2 x$
$\omega = 2\pi\nu = 4\pi\ s^{-1}$	$F = -64 \times 10^5 \pi^2 \operatorname{sen} 4\pi t = -32 \times 10^4 \pi^2 x$

1)

$$x = 10 \text{ cm} \Rightarrow 10 = 20 \operatorname{sen} 4\pi t \Rightarrow \operatorname{sen} 4\pi t = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\pi t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{24} \text{ s}}$$

2)

$$x = 0 \Rightarrow v = 80\pi \text{ cm/s} \Rightarrow T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} 2 \times 10^4 (80\pi)^2 \text{ erg}$$

$$\boxed{T = 6{,}4\pi^2 \text{ J}}$$

3) La aceleración es máxima cuando:

$$x = A = 20 \text{ cm} \Rightarrow \operatorname{sen} 4\pi t = 1 \Rightarrow 4\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{8} \text{ s}}$$

Para $x = A = 20$ cm $\Rightarrow$ $\boxed{a_{max} = -16\pi^2 20 = -320\pi^2 \text{ cm/s}^2}$

Problema 19. Demostrar que la energía total (cinética más potencial) en cualquier punto del trayecto de una partícula de masa M que tiene MVA de amplitud A y frecuencia ν es: $W = 2\pi^2 MA^2\nu^2$.

Solución

Como:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$F = Ma = -Ma\omega^2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -M\omega^2 x$$

La energía cinética en cualquier punto del trayecto será:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} MA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

La energía potencial es igual y de signo contrario al trabajo realizado por las fuerzas productoras del MVA al trasladarse el punto material desde la posición de equilibrio a la posición considerada:

$$dU = -dW = -Fdx = M\omega^2 x dx$$

$$U = \int_0^x M\omega^2 x dx = \frac{1}{2} M\omega^2 x^2 = \frac{1}{2} MA^2\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

La energía total, suma de la cinética y la potencial, es en cualquier punto del trayecto:

$$W = T + U = \frac{1}{2} MA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} MA^2\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

$$W = \frac{1}{2} MA^2\omega^2$$

$$\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \boxed{W = 2\pi^2 MA^2\nu^2}$$

Problema 20. Un resorte espiral tiene una longitud de 15 cm. Cuando de él pende una masa de 50 g queda en reposo con una longitud de 17 cm. Calcular:
1. La constante de recuperación del resorte, en unidades del sistema CGS.
2. La frecuencia de las oscilaciones verticales que realiza cuando se cuelga una masa de 90 g.
3. El trabajo realizado por el resorte para elevar la anterior masa desde el punto más bajo al más alto de su recorrido total de 6 cm.

Solución

1) La fuerza que estira el resorte es:

$$F = Kx \quad \Rightarrow \boxed{K = \frac{F}{x} = \frac{Mg}{L - L_0} = \frac{50 \times 980}{17 - 15} = 24\,500 \,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}$$

2)

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Mg}{(L - L_0)M'}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50 \times 980}{2 \times 90}} = 2{,}62 \text{ Hz}}$$

3)

$$\boxed{W = Mgh = 90 \times 980 \times 6 = 529\,200 \text{ erg}}$$

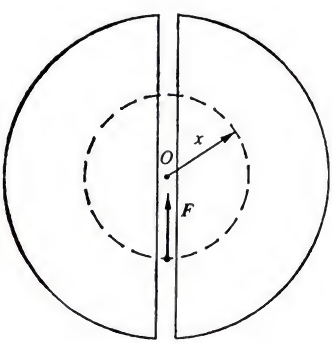
Este resultado coincide con el que obtenemos al considerar el trabajo de las fuerzas de recuperación. Al cargar 90 g el resorte se estira:

$$x = \frac{M'g}{K} = \frac{90 \times 980}{24\,500} = 3{,}6 \text{ cm}$$

$$\boxed{W = \int_{3,6+3}^{3,6-3} - Kxdx = -\frac{1}{2}K\left[x^2\right]_{6,6}^{0,6} = \frac{1}{2}\,24\,500(6{,}6^2 - 0{,}6^2) = 529\,200 \text{ erg}}$$

Problema 21. Si la Tierra fuese homogénea y se hiciese un conducto recto de polo a polo, al dejar caer por él un cuerpo desde uno de los polos adquiriría un MVA. ¿Por qué? Calcular el período de este movimiento.

Solución



Problema XII-21

La ley de gravitación universal nos dice:

$$F = -G\frac{MM'}{r^3}r$$

en módulo:

$$F = -G\frac{MM'}{x^2}$$

el signo menos nos indica que F va dirigida hacia O. En nuestro problema M' es la masa encerrada dentro del círculo de puntos de la figura (ver «Variaciones del peso con la profundidad». Física General). Si llamamos ρ a la densidad de la Tierra, tendremos:

$$M' = V\rho = \frac{4}{3}\pi x^3 \rho$$

luego:

$$F = -\frac{4\pi\rho GM}{3}x = -Kx \quad \Rightarrow \quad K = \frac{4\pi\rho GM}{3}$$

el movimiento es, por tanto, vibratorio armónico de período:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}}$$

Problema 22. Un volante cuyo eje está sujeto a un muelle elástico oscila con una frecuencia de 0,5 Hz. El volante es de masa 5 g y radio 1 cm. Determinar la constante de elasticidad del resorte.

Solución

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}} = \frac{1}{\nu}$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$K = I4\pi^2\nu^2 = \frac{1}{2}MR^2 4\pi^2\nu^2 = 2MR^2\pi^2\nu^2$$

$$\boxed{K = 2 \times 5\pi^2\frac{1}{4} = 2{,}5\pi^2\,\frac{\text{dyn}\cdot\text{cm}}{\text{rad}}}$$

Problema 23. Calcular el período del movimiento para el sistema de la figura. $M = 250$ g, $K_1 = 30$ N/m, $K_2 = 20$ N/m y no existe rozamiento.

Solución

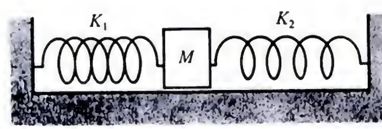
Para un desplazamiento x a partir de la posición de equilibrio uno de los resortes se alargará x y el otro se contraerá x; por tanto, la fuerza sobre la masa debida a cada uno de ellos que irá en sentido contrario al desplazamiento será:

$$F = F_1 + F_2 = -K_1x - K_2x = -(K_1 + K_2)x = -Kx$$

$$\boxed{K = K_1 + K_2}$$

luego:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K_1 + K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}25}{55}}\text{ s} = 0{,}42\text{ s}}$$



Problema XII-23

Problema 24. Calcular la relación existente entre los períodos de oscilación de un mismo cuerpo que apartamos de la posición de equilibrio al colgarlo de dos muelles iguales de constante de recuperación K, al colocar éstos en serie y en paralelo.

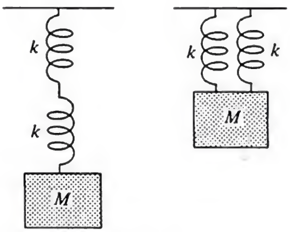
Solución

Para un muelle, si la fuerza que lo deforma, x, vale:

$$F = Kx \quad \Rightarrow \quad K = \frac{F}{x}$$

En serie:

Una fuerza F provocará en cada muelle un alargamiento $x_1 = 2x$, puesto que cada uno aumenta x; por tanto:



Problema XII-24

$$F = K_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{F}{x_1} = \frac{F}{2x} = \frac{K}{2}$$

y el período de oscilación valdrá, en este caso:

$$\boxed{T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{2M}{K}}}$$

En paralelo:

Para provocar un alargamiento x habrá que actuar con una fuerza doble, $2F$; por tanto:

$$F_2 = K_2 x \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{2F}{x} = 2K$$

y el período de oscilación en estas condiciones será:

$$\boxed{T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{M}{2K}}}$$

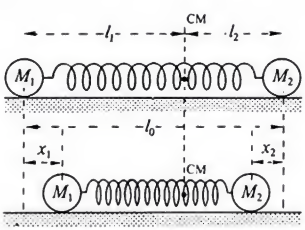
luego:

$$\boxed{\eta = \frac{T_1}{T_2} = 2}$$

Problema 25. Dos cuerpos de masas $M_1 = 400$ g y $M_2 = 600$ g se unen con un muelle de constante $K = 0{,}1$ kp/m y se colocan en una superficie horizontal sin rozamiento. Los cuerpos los acercamos entre sí y después se sueltan. Determinar el período de oscilación de los cuerpos.

Solución

Después de soltar al sistema no existen fuerzas externas y, por tanto, no habrá modificación de la posición del CM, que inicialmente se encuentra en reposo y permanecerá en el mismo lugar. Llamando l_0 a la longitud natural del resorte y l_1 y l_2 las distancias del CM a los cuerpos cuando el sistema se encuentra en un instante determinado en esta posición:



Problema XII-25

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \dfrac{M_2 l_0}{M_1 + M_2} \\ l_0 = l_1 + l_2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad M_1 l_1 = M_2 l_2$$

por la misma razón, en una posición cualquiera en que los desplazamientos de los cuerpos son x_1 y x_2 cuando el muelle está comprimido:

$$M_1(l_1 - x_1) = M_2(l_2 - x_2) \quad \Rightarrow \quad M_1 x_1 = M_2 x_2$$

el muelle estará comprimido:

$$x = x_1 + x_2 = x_1 \frac{M_1 + M_2}{M_2} = x_2 \frac{M_1 + M_2}{M_1}$$

Sobre los cuerpos el muelle actuará con la misma fuerza de valor:

$$F = -Kx = -K\frac{M_1 + M_2}{M_2}x_1 = -K\frac{M_1 + M_2}{M_1}x_2$$

luego sobre M_1:

$$F_1 = -K_1x_1 = -K\frac{M_1 + M_2}{M_2}x_1$$

y sobre M_2:

$$F_2 = -K_2x_2 = -K\frac{M_1 + M_2}{M_1}x_2$$

con lo que el período para las oscilaciones para ambos cuerpos es el mismo y toma el valor:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M_1}{K_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M_2}{K_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{M_1M_2}{K(M_1 + M_2)}}}$$

luego:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{0,4 \times 0,6}{9,8}} = 1 \text{ s}}$$

C) PENDULO

FORMULARIO

PÉNDULO SIMPLE:

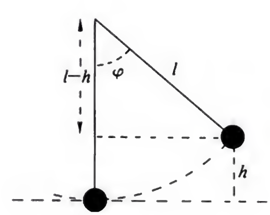
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

PÉNDULO FÍSICO:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

Problema 26. Tenemos un péndulo simple, formado por una esfera de 100 g suspendida de un hilo de un metro de longitud. Separamos la esfera de su posición de equilibrio hasta formar un ángulo de 30° y luego la soltamos para que oscile libremente. Se pide:

1. La energía potencial cuando la elongación es máxima.
2. La velocidad máxima que alcanzará.
3. La energía cinética máxima que adquirirá.
4. El tiempo que empleará en 10 oscilaciones completas.
Se supone que los rozamientos son despreciables.



Problema XII-26

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} U &= Mgh \\ h &= l(1 - \cos\varphi) \end{aligned}\right| \boxed{U = Mgl(1 - \cos\varphi) = 0,1 \times 9,8(1 - 0,866) = 0,131 \text{ J}}$$

2)

$$\boxed{v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{2 \times 9{,}8(1 - 0{,}866)} = 1{,}62 \text{ m/s}}$$

3)

$$\boxed{U = T = 0{,}131 \text{ J}}$$

4)

$$\boxed{t = 10T = 20\pi \sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 20 \text{ s}}$$

Problema 27. Un péndulo que base segundos (semiperíodo = 1 s) tiene de longitud 1 m. Calcular la longitud del péndulo que en el mismo lugar de la Tierra tiene un período de oscilación de 10 s.

Solución

Para el primer péndulo:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{100}{g}}$$

Para el segundo péndulo:

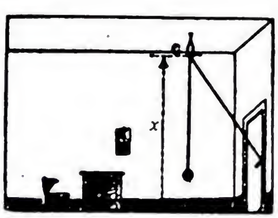
$$5 = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

por división:

$$\frac{1}{5} = \sqrt{\frac{100}{l'}} \Rightarrow \boxed{l' = 100 \times 25 = 2\,500 \text{ cm} = 25 \text{ m}}$$

Problema 28. De un fino cordel pendiente del techo de una habitación colgamos una masa de plomo, siendo la distancia entre su centro de gravedad y el suelo 14,2 cm. La hacemos oscilar y observamos que 50 oscilaciones completas se realizan en 5 minutos 45,4 segundos. Hacemos que el centro de gravedad de la bola de plomo esté a 2,20 m del suelo, observando que otras 50 oscilaciones completas se realizan en 5 minutos 14 segundos. Calcular la altura del techo y la aceleración de la gravedad del lugar.

Solución



Problema XII-28

1) La aplicación de la fórmula del período del péndulo nos da, en los dos casos, para las 50 oscilaciones:

$$50T = 50 \times 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad 50T' = 50 \times 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

siendo:

$$\begin{array}{ll|l} 50T & = 345{,}4 \text{ s} & l = x - 14{,}2 \\ 50T' & = 314 \quad \text{s} & l' = x - 220 \end{array}$$

Luego por división de las dos primeras obtenemos:

$$\frac{345{,}4}{314} = \sqrt{\frac{x - 14{,}2}{x - 220}} \Rightarrow \boxed{x = 1\,200 \text{ cm} = 12 \text{ m}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} l' = 1\,200 - 220 = 980 \text{ cm} \\ T' = \dfrac{314}{50} = 6{,}28 \text{ s} \end{array}\right| T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \Rightarrow \boxed{g = \frac{4\pi^2 l'}{T'^2} = 981 \text{ cm/s}^2}$$

Problema 29. Un reloj de péndulo compensado que bate segundos en el ecuador se traslada al polo. Calcular el retraso o adelanto del reloj en un día. (El valor de g en el ecuador es 978 cm/s^2 y en el polo 983 cm/s^2. En los péndulos compensados la temperatura no ejerce influencia sobre la longitud del péndulo.)

Solución

Para el ecuador:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l}{978}}$$

Para el polo:

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{983}}$$

dividiendo:

$$\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{978}{983}} = 0{,}9974 \text{ s}$$

El péndulo en el ecuador da 84 600 semioscilaciones diarias (número de segundos del día); en el polo el número de semioscilaciones es:

$$\frac{86\,400}{0{,}9974} = 86\,625$$

En el polo la saeta del reloj recorrerá así: 86 625 − 86 400 = 225 divisiones (que marcan segundos) más que las divisiones correspondientes a un día, adelantándose 225 segundos.

Problema 30. La masa de la Luna es aproximadamente $6{,}7 \times 10^{22}$ kg, y su radio, 16×10^5 m.

1. ¿Qué distancia recorrerá un cuerpo en un segundo, en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a la superficie de aquélla?

2. ¿Cuál será el período de oscilación, en la superficie lunar, de un péndulo cuyo período en la Tierra es de 1 s?

3. En la superficie terrestre, al colocar un cuerpo en el platillo de una balanza y en el otro platillo 23,15 g se consigue el equilibrio. ¿Qué pesas tendríamos que utilizar para equilibrar, igualmente, el mismo cuerpo en la superficie lunar?

Solución

1) El valor de g en la Luna vendrá dado por:

$$g = G\frac{M}{r^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 6{,}7 \times 10^{22}}{16^2 \times 10^{10}} = 1{,}74 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\,1{,}74 = 0{,}87 \text{ m}}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_T}} \\ T' &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_L}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{T' = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{1{,}74}} = 2{,}37 \text{ s}}$$

3) Como la balanza determina masas, *las mismas*.

Problema 31. Un ascensor funciona de manera que un cable le imprime un movimiento uniformemente acelerado con una aceleración 20 veces menor que la de gravedad. Al cabo de 29 segundos el movimiento se hace uniformemente retardado, con una aceleración diez veces menor que la de la gravedad, llegando así sin velocidad al lugar de su destino. Dentro del ascensor se dispone de un dinamómetro (un resorte) del que pende una masa de 1 kg, y que ha sido graduado en el sitio del que parte el ascensor. También se dispone de un péndulo de 1 m de longitud. Calcular:

1. Las indicaciones del dinamómetro en las dos fases del movimiento.
2. Los períodos batidos por el péndulo en las mismas dos fases.

Solución

1)

$$F = Mg + Ma = M\left(g + \frac{g}{20}\right) = \frac{21}{20}Mg = \frac{21}{20} \text{ kp}$$

$$F' = Mg - Ma' = M\left(g - \frac{g}{10}\right) = \frac{9}{10}Mg = \frac{9}{10} \text{ kp}$$

2)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8 + \frac{9{,}8}{20}}} = 2\pi\sqrt{\frac{20}{21 \times 9{,}8}} = 1{,}958 \text{ s}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8 - \frac{9{,}8}{10}}} = 2\pi\sqrt{\frac{10}{9 \times 9{,}8}} = 2{,}115 \text{ s}$$

Problema 32. Mediante un cable subimos desde el fondo de un pozo de 672 m de profundidad una cabina que pesa 800 kp. Los primeros 320 m de subida los realiza con una aceleración constante de 40 cm/s^2. Los 192 m siguientes los sube conservando constante la velocidad adquirida y, por fin, los 160 m últimos los recorre con movimiento uniformemente decelerado, hasta llegar a la superficie con velocidad nula. Calcular:

1. La duración de cada una de las tres etapas del movimiento de subida, indicando el valor de la velocidad máxima.

2. Las indicaciones de un dinamómetro intercalado en el cable, en cada etapa.

3. Si la cabina lleva un péndulo cuyo período es exactamente 2 s, calcular el período para cada una de las tres etapas.

Solución

1) Llamemos v a la velocidad máxima:

$h_1 = 320$ m

$$\boxed{t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \times 320}{0{,}4}} = 40 \text{ s}}$$

$a_1 = 40 \text{ cm/s}^2 = 0{,}4 \text{ m/s}^2$

$$\boxed{v = \sqrt{2a_1h_1} = \sqrt{2 \times 0{,}4 \times 320} = 16 \text{ m/s}}$$

$h_2 = 192$ m

$$\boxed{t_2 = \frac{h^2}{v} = \frac{192}{16} = 12 \text{ s}}$$

$h_3 = 160$ m

$$\boxed{t_3 = \frac{2h_3}{v} = \frac{2 \times 160}{16} = 20 \text{ s}}$$

$$a_3 = \frac{v}{t_3} = \frac{16}{20} = 0{,}8 \text{ m/s}^2$$

2)

$$\boxed{F_1 = Mg + Ma_1 = M(g + a_1) = \frac{800}{9{,}8}(9{,}8 + 0{,}4) = 832{,}6 \text{ kp}}$$

$$\boxed{F_2 = Mg = 800 \text{ kp}}$$

$$\boxed{F_3 = Mg - Ma_3 = M(g - a_3) = \frac{800}{9{,}8}(9{,}8 - 0{,}8) \simeq 734{,}7 \text{ kp}}$$

3)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow 2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{9{,}8}} \Rightarrow l \simeq 1 \text{ m}$$

$$\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8 + 0{,}4}} = 1{,}967 \text{ s}}$$

$$\boxed{T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T = 2 \text{ s}}$$

$$\boxed{T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a_3}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9{,}8 - 0{,}8}} = 2{,}094 \text{ s}}$$

Problema 33. Un péndulo está constituido por una pequeña esfera, de dimensiones que consideraremos despreciables, cuya masa es $M = 200$ g, suspendida en un hilo inextensible y sin peso apreciable, de 2 m de largo.

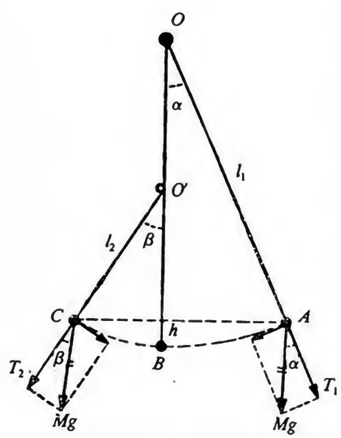
1. Calcular el período para pequeñas amplitudes.

2. Supongamos que en el momento de su máxima elongación la esfera se ha elevado 20 cm por encima del plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Calcular su velocidad y su energía cinética cuando pase por la vertical.

3. Supongamos que al pasar por la vertical el hilo encuentra un clavo O' situado 1 m por debajo del punto de suspensión O y normal al plano de oscilación. Describir el movimiento ulterior de la esfera. Calcular la relación de las tensiones del hilo cuando el péndulo alcanza sus posiciones extremas.

4. Calcular el período de este péndulo, tal como se describe en el apartado 3, para pequeñas amplitudes.

Solución



Problema XII-33

1)
$$\boxed{T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9{,}8}} = 2\sqrt{2}\ \text{s}}$$

2) Si T = energía cinética:

$$U = T \Rightarrow \boxed{T = Mgh = 0{,}2 \times 9{,}8 \times 0{,}2 = 0{,}4\ \text{J}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 0{,}2} = 2\ \text{m/s}}$$

3) Hemos elevado la masa M a una altura h (20 cm) sobre el plano horizontal; al soltarla irá de A a B, describiendo un arco de centro O; después ascenderá la misma altura h (conservación de la energía), describiendo el arco BC, con centro en O', y luego volverá de C a A.

$$T_1 = Mg\cos\alpha \quad \Bigg| \quad \cos\alpha = \frac{l_1 - h}{l_1} \qquad l_2 = \frac{l_1}{2}$$

$$T_2 = Mg\cos\beta \quad \Bigg| \quad \cos\beta = \frac{l_2 - h}{l_2} = \frac{\frac{l_1}{2} - h}{\frac{l_1}{2}} = \frac{l_1 - 2h}{l_1}$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{l_1 - h}{l_1 - 2h} = \frac{2 - 0{,}2}{2 - 2 \times 0{,}2} = \frac{1{,}8}{1{,}6} = \frac{9}{8} = 1{,}12}$$

4)
$$T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$T_1 = 2\sqrt{2}\ \text{s}$$

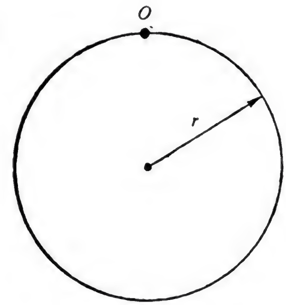
$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9{,}8}} = 2\ \text{s}$$

$$\boxed{T = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2} = \sqrt{2} + 1 = 2{,}4\ \text{s}}$$

Problema 34. El aro de la figura, de radio 1 m, oscila con pequeña amplitud alrededor del punto O. Calcular:

1. Período de oscilación.

2. Longitud del péndulo simple equivalente.



Problema XII-34

Solución

1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

$$I = Mr^2 + Mr^2 = 2Mr^2$$

$$d = r$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{2Mr^2}{Mgr}} = 2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}} = 2\sqrt{2}\ \text{s}}$$

2)

$$2\pi \sqrt{\frac{2r}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \boxed{L = 2r = 2\ \text{m}}$$

Problema 35. Una varilla cilíndrica, homogénea, de longitud 1 m, oscila como un péndulo pendiente de uno de sus extremos. Su masa es 100 g y el valor de $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$. Determinar:

1. El momento de inercia de la varilla.

2. Período de oscilación del péndulo.

3. Longitud del péndulo simple equivalente.

Solución

1)

$$\boxed{I = \frac{1}{3} Ml^2 = \frac{0{,}1}{3} = 0{,}0333\ \text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

2)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

$$d = \frac{l}{2}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{2Ml^2}{3Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3 \times 9{,}8}} = 1{,}64\ \text{s}}$$

3)

$$2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{2l}{3} = \frac{2}{3}\ \text{m}}$$

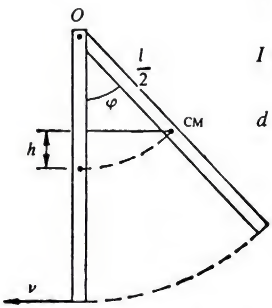
Problema 36. Una varilla de 1 m de longitud pesa 10 g y oscila como un péndulo colgado de uno de los extremos; la varilla es de densidad uniforme y su sección es constante. Determinar:

1. Período de oscilación de la varilla.

2. Longitud del péndulo simple equivalente.

3. Si la varilla se separa 30° de su posición vertical, ¿cuál es la velocidad del extremo inferior de la varilla, al pasar por la posición vertical? No hay rozamientos.

Solución



Problema XII-36

1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \qquad I = \frac{1}{3} Ml^2 \qquad d = \frac{l}{2}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{2Ml^2}{3Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3 \times 9{,}8}} = 1{,}64 \text{ s}}$$

2)

$$2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{2l}{3} = \frac{2}{3} \text{ m}}$$

3) La energía potencial de la varilla en su posición extrema la calcularemos suponiendo toda su masa concentrada en el centro de gravedad, y tal centro se encuentra a una altura:

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Tal energía se transforma en energía cinética de rotación de la varilla, cuando ésta pasa por su posición de equilibrio.

$$Mg\frac{l}{2}(1 - \cos\varphi) = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} Ml^2\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g(1 - \cos\varphi)}{l}}$$

Conocida ω, estamos en condiciones de conocer la velocidad de cualquier punto de la varilla. La de su extremo libre es:

$$\boxed{v = \omega l = \sqrt{3gl(1 - \cos\varphi)} = \sqrt{3 \times 9{,}8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 2 \text{ m/s}}$$

Problema 37. Una barra cilíndrica de 2 m de longitud y una masa de 1 000 g oscila suspendida por un eje horizontal que pasa por uno de sus extremos. Calcular:

1. Período de las oscilaciones.

2. Longitud del péndulo simple del mismo período.

3. Momento de inercia de la barra respecto a un eje paralelo al anterior, pero que atraviesa la barra a un cuarto de su longitud de su extremo superior.

4. Período de las oscilaciones si la barra está suspendida por este último eje.

Solución

1)

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{4}{3 \times 9{,}8}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \mathrm{s}}$$

2)

$$2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \boxed{L = \frac{2l}{3} = \frac{4}{3}\ \mathrm{m}}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} I &= I_G + Md^2 \\ I' &= I_G + Md'^2 \\ d &= \frac{l}{2} \\ d' &= \frac{l}{4} \end{aligned}\right| \quad I' - I = M(d'^2 - d^2)$$

$$\boxed{I' = I + M(d'^2 - d^2) = \frac{1}{3} Ml^2 + M\left(\frac{l^2}{16} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{7}{48} Ml^2 = \frac{7 \times 4}{48} = 0{,}58\ \mathrm{kg \cdot m^2}}$$

4)

$$\left.\begin{aligned} T' &= 2\pi \sqrt{\frac{I'}{Mgd'}} \\ I' &= \frac{7}{48} Ml^2 \\ d' &= \frac{l}{4} \end{aligned}\right| \quad \boxed{T' = 2\pi \sqrt{\frac{28Ml^2}{48Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{7l}{12g}} = 2\pi \sqrt{\frac{14}{12 \times 9{,}8}} = 2{,}16\ \mathrm{s}}$$

Problema 38. Dos esferas de plomo de 4 cm de diámetro penden de un alambre rígido sin peso; el centro de la primera dista 1 m del punto de suspensión del alambre, y el de la segunda está a 50 cm del centro de la anterior y más lejos del centro de suspensión. Calcular el período de oscilación del sistema.

Solución

El momento de inercia de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro es $2Mr^2/5$. El momento de inercia de cada una de las esferas con respecto a un eje horizontal que pase por el punto de suspensión se calcula por el teorema de Steiner:

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{2}{5} Mr^2 + Ml_1^2 \\ I_2 &= \frac{2}{5} Mr^2 + Ml_2^2 \end{aligned}\right| \quad I = I_1 + I_2 = M\left[\frac{4}{5} r^2 + l_1^2 + l_2^2\right]$$

La distancia del centro de gravedad del sistema al centro de suspensión es:

$$d = \frac{\Sigma M_i y_i}{M} = \frac{M + 1{,}5M}{2M} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25\ \mathrm{m}$$

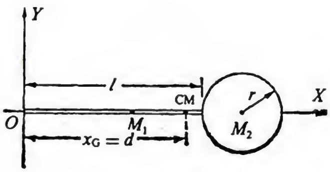
luego:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{5}\,r^2 + l_1^2 + l_2^2}{gd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{4}{5}\,0{,}02^2 + 1^2 + 1{,}5^2}{9{,}8 \times 1{,}25}} = 3{,}24 \text{ s}}$$

Problema 39. El péndulo de un reloj de pared está constituido por una varilla homogénea de 1 m de longitud y de masa M_1 en cuyo extremo hay soldada una «lenteja» en forma de cilindro macizo y homogéneo de masa tres veces mayor que la varilla. Calcúlese el valor del radio de la «lenteja» para que el reloj de péndulo funcione con período dos segundos (tómese $g = \pi^2$).

Solución

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_T g d}} = 2 \text{ s}$$



Problema XII-39

Cálculo de la distancia d:

$$d = \frac{\Sigma M_i x_i}{M} = \frac{M_1 \frac{l}{2} + M_2(l + r)}{M_1 + M_2} \qquad d = \frac{\frac{l}{2}\,M + (l + r)3M}{4M} = \frac{7l + 6r}{8}$$

$$M_2 = 3M_1 = 3M$$

Cálculo del momento de inercia:

$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{3}\,M_1 l^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,M_2 r^2 + M_2(l + r)^2$$

$$I = \frac{1}{3}\,Ml^2 + 3M\left[\frac{r^2}{2} + (l + r)^2\right] = M\left[\frac{l^2}{3} + \frac{3}{2}\,r^2 + 3(l + r)^2\right]$$

luego, como $M_T = 4M$, nos queda:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M\left[\frac{l^2}{3} + \frac{2}{3}\,r^2 + 3(l + r)^2\right]}{4Mg\,\frac{7l + 6r}{8}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{[l^2 + 2r^2 + 9(l + r)^2]}{g(7l + 6r)}} = 2$$

$$2[l^2 + 2r^2 + 9(l + r)^2] = 3[7l + 6r]$$

para $l = 1$ m queda la ecuación de segundo grado:

$$22r^2 + 18r - 1 = 0$$

que tomando la solución positiva nos da:

$$\boxed{r = 5{,}2 \text{ cm}}$$

Capítulo XIII

ELASTICIDAD

FORMULARIO

LEY DE HOOKE:

$$F = Kx \qquad N = K\varphi$$

COEFICIENTE DE RUPTURA (R): «Es la fuerza por unidad de sección capaz de ocasionar la ruptura.»

COEFICIENTE DE SEGURIDAD (S): «Es el cociente entre la carga máxima por unidad de sección y el coeficiente de ruptura.»

TRACCIÓN: $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{1}{E}\dfrac{F}{A}$ E: módulo de Young

Variación de la dimensión transversal:

$$\frac{\Delta l'}{l'} = -\frac{\sigma}{E}\frac{F}{A}$$ σ: módulo de Poissón

Variación sección transversal: $\dfrac{\Delta A}{A} = -2\dfrac{\sigma}{E}\dfrac{F}{A}$

Variación volumen: $\dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{1-2\sigma}{E}\dfrac{F}{A}$

COMPRESIBILIDAD:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p \qquad E = 3B(1 - 2\sigma) \qquad B\text{: módulo de compresibilidad}$$

DESLIZAMIENTO O CIZALLADURA:

$$\varphi = \frac{1}{G} \frac{F}{A} \qquad G = \frac{1}{2} \frac{E}{1 + \sigma}$$

TORSIÓN:

$$\varphi = \frac{1}{G} N \frac{2l}{\pi r^4} \qquad G\text{: módulo de cizalladura o torsión}$$

FLEXIÓN: Barra apoyada en un extremo:

$$d = \frac{4F}{E} \frac{l^3}{ah^3} \qquad d\text{: flecha}$$

Barra apoyada en dos puntos: $d = \dfrac{F}{4E} \dfrac{l^3}{ah^3}$

Problema 1. Deducir la ecuación de dimensiones y las unidades de medida en los sistemas CGS, GIORGI y TECNICO de los módulos de Young, de deslizamiento y de compresibilidad.

Solución

Módulo de Young:

$$E = \frac{Fl}{A\Delta l} \qquad \boxed{[E] = \frac{MLT^{-2}L}{L^2L} = ML^{-1}T^{-2}}$$

Módulo de deslizamiento:

$$G = \frac{F}{\varphi A} \qquad \boxed{[G] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}}$$

(un ángulo = arco/radio, tiene por ecuación de dimensiones $L/L = 1$).

Módulo de compresibilidad:

$$\Delta V = \frac{pV}{B} \qquad \boxed{[B] = \frac{ML^{-1}T^{-2}L^3}{L^3} = ML^{-1}T^{-2}}$$

Los tres módulos tienen la ecuación de dimensiones de fuerza/superficie, por lo que su ecuación dimensional en el sistema técnico es F/L^2.
Las unidades de medida de los tres son, en los diversos sistemas:

$$\boxed{\text{dyn/cm}^2\ (\text{CGS});\ \text{N/m}^2\ (\text{GIORGI});\ \text{kp/m}^2\ (\text{TECNICO})}$$

Problema 2. Calcular la anchura (l) que habría que dar a una correa sin fin de espesor $e = 1$ cm y de coeficiente de rotura $R = 10^3$ N/cm^2 si se acopla a un motor que funciona a la potencia de 50 CV, que le comunica una velocidad de 3 m/s. El coeficiente de seguridad se quiere que sea $S = 6$.

Solución

$$R = 10^3 \text{ N/cm}^2 = 10^7 \text{ N/m}^2$$

$$P = 50 \text{ CV} = 50 \times 75 \times 9{,}8 \text{ W} = 36\,750 \text{ W}$$

$$e = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} P = Fv \quad \Rightarrow \quad F = \dfrac{P}{v} \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{F}{A} = \dfrac{R}{S} \\ A = le \end{array}\right| \Rightarrow \quad F = \dfrac{Rle}{S} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{P}{v} = \frac{Rle}{S} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = \frac{PS}{vRe} = \frac{36\,750 \times 6}{3 \times 10^7 \times 10^{-2}} \text{ m} = 73{,}5 \text{ cm}}$$

Problema 3. De un alambre de cobre de 1,5 m de longitud y 2 mm de diámetro se cuelga un peso de 8 kg. Se pregunta:

1. ¿Hemos rebasado el límite de elasticidad?
2. ¿Se romperá el alambre?
3. En caso de ser negativas las respuestas a las preguntas anteriores, ¿cuál es su alargamiento?

(Módulo de Young = 12×10^3 kp/mm^2; límite de elasticidad = 3 a 12 kp/mm^2; límite de ruptura = 20 a 50 kp/mm^2.)

Solución

1) y 2) La sección del alambre es:

$$A = \pi r^2 = 3{,}14 \text{ mm}^2$$

la fuerza que corresponde a cada mm^2 de sección es:

$$\boxed{\frac{F}{A} = \frac{Mg}{A} = \frac{8}{3{,}14} = 2{,}54 \text{ kp/mm}^2}$$

que no llega ni al límite inferior de elasticidad ni al de ruptura.

3)

$$\boxed{\Delta l = \frac{Fl}{EA} = \frac{8 \times 1\,500}{12 \times 10^3 \times 3{,}14} = 0{,}3 \text{ mm}}$$

Problema 4. A un alambre de acero de 3 m de longitud y 2 mm de radio le colgamos un peso de 350 kg y se produce un alargamiento de 4 mm. Calcular el módulo de Young de ese acero.

Solución

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{A} \qquad F = Mg \qquad A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{Mgl}{\pi r^2 \Delta l} = \frac{350 \times 9{,}8 \times 3}{\pi 4 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-3}} 10^{-6} = 205 \times 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}$$

Problema 5. Se somete a un cuerpo de cobre de forma cúbica y de 1 dm de arista a una fuerza de 1 t tangencialmente a la superficie de una de sus caras. Averiguar el ángulo de deslizamiento. (Módulo de deslizamiento: $1{,}6 \times 10^3$ kp/mm^2.)

Solución

$$\varphi = \frac{F}{GA} = \frac{10^3}{1{,}6 \times 10^3 \times 10^4} = 6{,}25 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

Si a $180 \times 60 \times 60''$ .... π rad

x .... $6{,}25 \times 10^{-5}$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13''}$$

Problema 6. Al mismo cubo del problema anterior se le somete a una compresión uniforme, perpendicularmente a cada una de sus caras, actuando sobre cada una de ellas la fuerza de 1 t. Determinar la variación de volumen. (Módulo de compresibilidad: $13{,}8 \times 10^3$ kp/mm^2.)

Solución

$$p = \frac{F}{A} = 1\,000 \text{ kp/dm}^2 = \frac{1\,000}{10\,000} \text{ kp/mm}^2 = 0{,}1 \text{ kp/mm}^2$$

$$V = 1 \text{ dm}^3 = 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{pV}{B} = \frac{0{,}1 \times 10^6}{13{,}8 \times 10^3} = 7{,}25 \text{ mm}^3}$$

Problema 7. Con los datos de los problemas anteriores expresar los módulos de Young, de deslizamiento y de compresibilidad del cobre en las unidades de los sistemas CGS, GIORGI y TECNICO.

Solución

Módulo de Young:

$$E = 12 \times 10^3 \text{ kp/mm}^2$$

(CGS) $$\frac{12 \times 10^3 \times 980\,000}{10^{-2}} \text{ dyn/cm}^2 = 117{,}6 \times 10^{10} \text{ dyn/cm}^2$$

(GIORGI) $$\frac{12 \times 10^3 \times 9{,}8}{10^{-6}} \text{ N/m}^2 = 117{,}6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

(TECNICO) $\dfrac{12 \times 10^3}{10^{-6}}$ kp/m² $= 12 \times 10^9$ kp/m²

Módulo de deslizamiento:

$$G = 1{,}6 \times 10^3 \text{ kp/mm}^2$$

(CGS) $\dfrac{1{,}6 \times 10^3 \times 980\,000}{10^{-2}}$ dyn/cm² $= 15{,}68 \times 10^{10}$ dyn/cm²

(GIORGI) $\dfrac{1{,}6 \times 10^3 \times 9{,}8}{10^{-6}}$ N/m² $= 15{,}68 \times 10^9$ N/m²

(TECNICO) $\dfrac{1{,}6 \times 10^3}{10^{-6}}$ kp/m² $= 1{,}6 \times 10^9$ kp/m²

Módulo de compresibilidad:

$$B = 13{,}8 \times 10^3 \text{ kp/mm}^2$$

(CGS) $\dfrac{13{,}8 \times 10^3 \times 980\,000}{10^{-2}}$ dyn/cm² $= 135{,}24 \times 10^{10}$ dyn/cm²

(GIORGI) $\dfrac{13{,}8 \times 10^3 \times 9{,}8}{10^{-6}}$ N/m² $= 135{,}24 \times 10^9$ N/m²

(TECNICO) $\dfrac{13{,}8 \times 10^3}{10^{-6}}$ kp/m² $= 13{,}8 \times 10^9$ kp/m²

Problema 8. El módulo de Young del bronce es 9×10^{11} dyn/cm² y el de torsión es $3{,}5 \times 10^3$ kp/mm². Calcular:

1. El módulo de Poissón.

2. El módulo de compresibilidad.

Solución

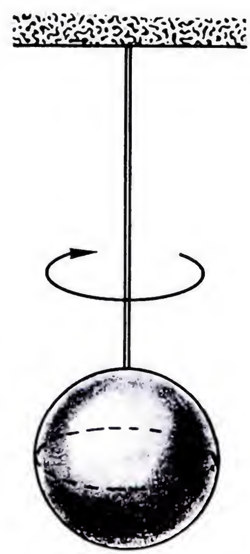
$$E = 9 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2 = 9{,}2 \times 10^3 \text{ kp/mm}^2$$

1)

$$G = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{E}{2G} - 1 = \frac{9{,}2 \times 10^3}{2 \times 3{,}5 \times 10^3} - 1 = 0{,}31}$$

2)

$$E = 3B(1-2\sigma) \Rightarrow \boxed{B = \frac{E}{3(1-2\sigma)} = \frac{9{,}2 \times 10^3}{3(1 - 2 \times 0{,}31)} = 8{,}1 \times 10^3 \text{ kp/mm}^2}$$



Problema XIII-9

Problema 9. Un péndulo de torsión está formado por una esfera de 10 cm de radio y 10 kg de masa que cuelga de un alambre cilíndrico de 2 mm de radio y 1 m de longitud; si el período de oscilación es 2 s, calcúlese el módulo de torsión G del alambre.

Solución

El ángulo de torsión del alambre es:

$$\alpha = \frac{1}{G}\,N\,\frac{2l}{\pi r^4} \Rightarrow N = \frac{\pi G r^4}{2l}\,\alpha = K\alpha$$

y como cuando actúa un momento de valor $N = K\alpha$ se produce un movimiento de período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{K}}$$

siendo:

$$\left.\begin{array}{l} K = \dfrac{\pi G r^4}{2l} \\ \\ I = \dfrac{2}{5} MR^2 \end{array}\right| \Rightarrow T = \frac{4\pi R}{r^2} \sqrt{\frac{Ml}{5\pi G}} \Rightarrow$$

$$\boxed{G = \frac{16\pi R^2 Ml}{5 r^4 T^2} = \frac{16\pi 10^{-2}\, 10}{5 \times 2^4 \times 10^{-12}\, 2^2} 10^{-6} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = 15{,}7 \times 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}}$$

Problema 10. Una barra de acero de sección cuadrada de 5 cm de lado tiene una longitud de 3 m. El módulo de Young de ese acero es 20×10^3 kp/mm^2. Calcular la flecha cuando se le suspende un cuerpo de 80 kg:

1. En un extremo, estando la barra horizontal y fija por el otro.

2. Del punto medio, estando la barra horizontal y fija, apoyándose en sus extremos.

Solución

$$E = 20 \times 10^3\ \mathrm{kp/mm^2} = 20 \times 9{,}8 \times 10^9\ \mathrm{N/m^2}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} d = \dfrac{4F}{E} \dfrac{l^3}{ah^3} \\ F = Mg \\ a = h \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{d = \frac{4Mgl^3}{Ea^4} = \frac{4 \times 80 \times 9{,}8 \times 3^3}{20 \times 9{,}8 \times 10^9 \times 5^4 \times 10^{-8}}\ \mathrm{m} \simeq 7\ \mathrm{cm}}$$

2)

$$\boxed{d' = \frac{Fl^3}{4Eah^3} = \frac{Mgl^3}{4Ea^4} = \frac{d}{16} = 0{,}44\ \mathrm{cm}}$$

Capítulo XIV

HIDROSTATICA

A) DENSIDAD. PRESION. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTATICA

FORMULARIO

DENSIDAD: $\rho = \frac{M}{V}$

PRESIÓN: $p = \frac{F}{A}$

PRESIÓN HIDROSTÁTICA: $p = \rho g h$

FUERZA SOBRE EL FONDO O PARED PLANOS:

$$F = A h_G \rho g \qquad h_G = \frac{\int_A h\,dA}{A}$$

CENTRO DE EMPUJE EN UNA PARED:

$$h_E = \frac{\int_A y^2\,dA}{A h_G} = \frac{I}{A h_G}$$

I: momento de inercia del área respecto de un eje.

Problema 1. Se desea obtener un litro de jarabe de densidad con relación al agua 1,3, mezclando otros dos de densidades 1,2 y 1,5. ¿Qué volumen de cada uno de ellos se debe emplear?

Solución

La masa resultante es:

$$M = V\rho = 10^3 \times 1{,}3 = 1\,300 \text{ g}$$

esta masa ha de ser suma de la de las componentes de la mezcla; si el volumen del primero lo llamamos x (en cm^3), el del segundo es $(10^3 - x)$ y sus masas:

$$M_1 = 1{,}2x \qquad M_2 = (10^3 - x)1{,}5$$

y como:

$$M = M_1 + M_2 \;\Rightarrow\; 1\,300 = 1{,}2x + (10^3 - x)1{,}5 \;\Rightarrow\; \boxed{x = \frac{200}{0{,}3} = 666{,}67 \text{ cm}^3}$$

el volumen del segundo jarabe será:

$$\boxed{x' = 10^3 - x = 333{,}33 \text{ cm}^3}$$

Problema 2. ¿Qué volumen de agua se debe añadir a un litro de lejía de sosa de densidad con relación al agua 1,3 para que su densidad sea 1,2?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \text{masa de lejía} \\ M_2 = \text{masa de agua} \\ V = \text{volumen total} \end{array}\right| \; M_1 + M_2 = 1{,}2V \;\Rightarrow\; 10^3 \times 1{,}3 + x = (10^3 + x)1{,}2 \;\Rightarrow\; \boxed{x = \frac{100}{0{,}2} = 500 \text{ cm}^3}$$

Problema 3. 100 g de latón están formados por 30 g de Zn y 70 de Cu, cuyas densidades respectivas son 7 y 9 g/cm^3. Calcular la densidad del latón.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} V = \text{volumen del latón} \\ V_1 = \text{volumen del Zn} \\ V_2 = \text{volumen del Cu} \end{array}\right| \; V = V_1 + V_2$$

y como:

$$V = \frac{M}{\rho}$$

tendremos:

$$\frac{M}{\rho} = \frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2} \;\Rightarrow\; \frac{100}{\rho} = \frac{30}{7} + \frac{70}{9} = \frac{760}{63} \;\Rightarrow\; \boxed{\rho = \frac{63 \times 100}{760} = 8{,}3 \text{ g/cm}^3}$$

Problema 4. Calcular la presión que ejerce sobre su base un cilindro de oro de 20 cm de alto y 10 cm^2 de base. Densidad del oro: 19,3 g/cm^3.

Solución

$$p = \frac{Mg}{A} = \frac{V\rho g}{A} = \frac{Ah\rho g}{A} = h\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 20 \times 19{,}3 \times 980 \text{ b} = 0{,}37 \text{ atm}}$$

Problema 5. Calcular la presión debida al agua a una profundidad de 20 m.

Solución

$$P = \rho_a gh = 980 \times 2 \times 10^3 \text{ b} = \frac{980 \times 2 \times 10^3}{13{,}6 \times 980 \times 76} \text{ atm} = 1{,}93 \text{ atm}$$

Problema 6. Si la presión manométrica del agua en la tubería a nivel del depósito de un edificio es de 500 kPa, ¿a qué altura se elevará el agua?

Solución

$$p = \rho_a gh \quad \Rightarrow \boxed{h = \frac{p}{\rho_a g} = \frac{5 \times 10^5}{10^3 \times 9{,}8} = 51 \text{ m}}$$

Problema 7. En unos vasos comunicantes hay agua y mercurio. La diferencia de alturas de los niveles del mercurio en los vasos es h = 1 cm. Calcular la altura de aceite que se debe añadir por la rama de mercurio para que el nivel de éste en los dos vasos sea el mismo. Densidad del mercurio = 13,6 g/cm^3. Densidad del aceite = 0,9 g/cm^3.

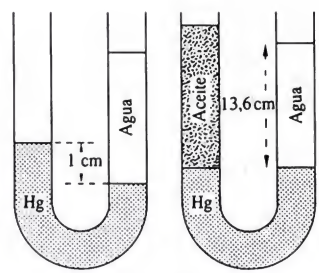
Solución

La ley de los vasos comunicantes nos da para valor de la altura del agua:

$$\frac{h}{h'} = \frac{\rho}{\rho'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{h'} = \frac{1}{13{,}6} \quad \Rightarrow \quad h' = 13{,}6 \text{ cm}$$

una vez añadido el aceite los líquidos quedarán en la disposición de la figura segunda. Las presiones en las superficies de separación deben ser iguales y, por tanto:

$$\rho' gh' = \rho'' gh'' \quad \Rightarrow \boxed{h'' = h' \frac{\rho'}{\rho''} = \frac{13{,}6}{0{,}9} = 15{,}11 \text{ cm}}$$

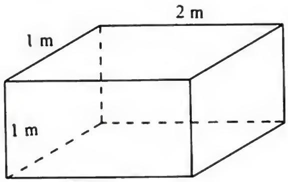


Problema XIV-7

Problema 8. Una compuerta rectangular vertical de 1 × 0,5 m cierra el desagüe de un embalse, siendo horizontales sus lados mayores. La distancia del borde superior de la compuerta a la superficie libre del agua es 10 m. Calcular la fuerza que actúa sobre la compuerta.

Solución

$$\boxed{F = A\rho g h_G = 1 \times 0{,}5 \; \frac{1\,000}{9{,}8} \; 9{,}8 \times 10{,}25 = 5\,125 \text{ kp}}$$



Problema XIV-9

Problema 9. Un depósito de la forma y dimensiones de la figura está lleno de un líquido de masa específica 0,8 g/cm^3. Calcular la fuerza que actúa sobre cada una de las paredes y el fondo.

Solución

$$F = Ah_G\rho g$$

Sobre el fondo:

$$\boxed{F_1 = 2 \times 1 \times 1 \ \frac{800}{9,8} \ 9,8 = 1\,600 \text{ kp}}$$

Sobre la pared anterior:

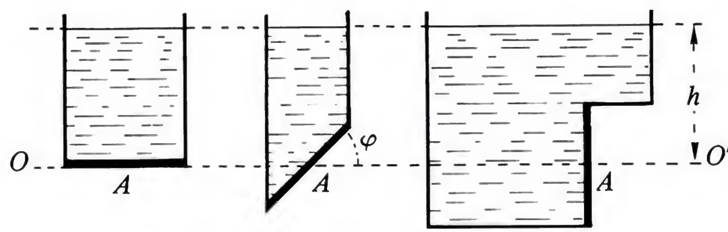
$$\boxed{F_2 = 2 \times 1 \times 0,5 \ \frac{800}{9,8} \ 9,8 = 800 \text{ kp}}$$

Sobre la pared alteral:

$$\boxed{F_3 = 1 \times 1 \times 0,5 \ \frac{800}{9,8} \ 9,8 = 400 \text{ kp}}$$

Problema 10. Supongamos tres recipientes de la forma indicada en la figura en los que las superficies A son todas rectangulares e idénticas, y la línea OO' pasa por el centro de ellas. Calcular:

1. La fuerza que actúa sobre cada una de ellas.
2. Las componentes horizontal y vertical de dichas fuerzas.



Problema XIV-10

Solución

1) Como la fuerza ejercida por un líquido en el fondo o pared de una vasija es igual al peso de una columna de líquido que tiene por base el área del fondo o pared y por altura la contada desde el centro de gravedad de la superficie a la superficie libre del líquido, y puesto que a las tres superficies le corresponde los mismos valores de que depende esta fuerza, ésta será la misma en los tres casos:

$$\boxed{F = Ah_G\rho g}$$

2) La fuerza calculada es normal a estas superficies y, por tanto, para el primer recipiente:

$$\boxed{\begin{array}{c} F_x = 0 \\ F_y = F \end{array}}$$

para el segundo:

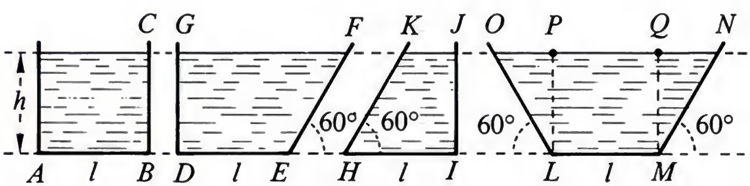
$$\boxed{\begin{array}{l} F_x = F\cos\varphi \\ F_y = F\operatorname{sen}\varphi \end{array}}$$

y para el tercero:

$$\boxed{\begin{array}{l} F_x = F \\ F_y = 0 \end{array}}$$

Problema 11. Supongamos los recipientes de la forma indicada en la figura. El primer recipiente es cúbico, de 10 cm de arista; los otros tres recipientes tienen la misma base e igual altura y están llenos de agua. Calcular:

1. El peso del agua en cada recipiente.
2. La fuerza sobre el fondo de cada uno.
3. La fuerza sobre las caras BC, EF y HK.
4. La fuerza sobre la cara $LMNO$ del cuarto recipiente.

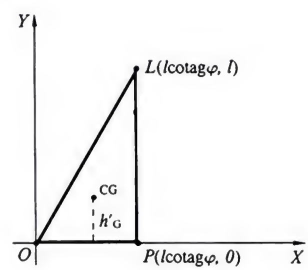


Problema XIV-11

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = l^3 \\ V_2 = l^3\left(1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{cotag}\varphi\right) \\ V_3 = l^3\left(1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{cotag}\varphi\right) \\ V_4 = l^3(1 + \operatorname{cotag}\varphi) \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} P_1 = l^3\rho_a g \\ P_2 = l^3\left(1 + \dfrac{1}{2}\operatorname{cotag}\varphi\right)\rho_a g \\ P_3 = l^3\left(1 - \dfrac{1}{2}\operatorname{cotag}\varphi\right)\rho_a g \\ P_4 = l^3(1 + \operatorname{cotag}\varphi)\rho_a g \end{array}\right.$$



Problema XIV-11-1.ª

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 = 1\,000 \text{ g} \cdot \text{f} \\ P_2 = 1\,000\left(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) \text{g} \cdot \text{f} = 1\,288{,}7 \text{ g} \cdot \text{f} \\ P_3 = 1\,000\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right) \text{g} \cdot \text{f} = 711{,}3 \text{ g} \cdot \text{f} \\ P_4 = 1\,000\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{g} \cdot \text{f} = 1\,577{,}4 \text{ g} \cdot \text{f} \end{array}}$$

2) La fuerza sobre el fondo es la misma (paradoja hidrostática) y su valor es:

$$\boxed{F = Agh_G\rho_a g = l^3\rho_a g = 1\,000 \text{ g} \cdot \text{f}}$$

3) En los cuatro casos:

$$h_G = \frac{h}{2}$$

y siendo:

$$A_{BC} = l^2$$
$$A_{EF} = A_{HK} = l^2 \operatorname{cosec}\varphi$$

tendremos:

$$\boxed{F_{BC} = A_{BC}h_G\rho_a g = \frac{1}{2}\,l^3\rho_a g = 500 \text{ g} \cdot \text{f}}$$

Las fuerzas sobre las superficies A_{EF} y A_{HK} serán normales a éstas, y su módulo será el mismo:

$$\boxed{F_{EF} = F_{HK} = \frac{1}{2}\,l^3\rho_a g \operatorname{cosec}\varphi = 577{,}3 \text{ g} \cdot \text{f}}$$

4) La distancia h'_G del centro de masa del triángulo OLP a la superficie libre del líquido será la misma que para el triángulo QMN, y su valor es:

$$h'_G = \frac{0 + 0 + l}{3} = \frac{l}{3}$$

con lo que para la cara $LMNO$ el valor de h_G será:

$$h_G = \frac{\Sigma A_i h_i}{A} = \frac{l^2 \frac{l}{2} + 2\frac{1}{2}(l\operatorname{cotag}\varphi)l\frac{l}{3}}{l^2 + 2\frac{1}{2}(l\operatorname{cotag}\varphi)l} = l\,\frac{3 + 2\operatorname{cotag}\varphi}{6(1 + \operatorname{cotag}\varphi)}$$

luego:

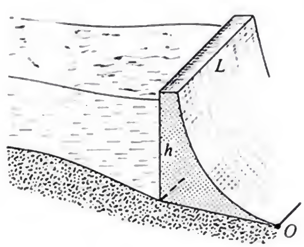
$$F = Ah_G\rho_a g = l^2(1 + \operatorname{cotag}\varphi)l\,\frac{3 + 2\operatorname{cotag}\varphi}{6(1 + \operatorname{cotag}\varphi)}\,\rho_a g = \frac{l^3}{6}(3 + 2\operatorname{cotag}\varphi)\rho_a g$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{F = \frac{1\,000}{6}\left(3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \text{g} \cdot \text{f} = 692{,}4 \text{ g} \cdot \text{f}}$$

Problema 12. La figura nos representa el dique de un embalse en el que el agua alcanza una profundidad $h = 60$ m en la pared vertical, y tiene una longitud $L = 250$ m. Calcular:

1. La fuerza resultante que actúa sobre el dique.
2. Momento de la fuerza que tiende a hacer girar el dique alrededor de O.
3. Posición de la línea de acción de la resultante.



Problema XIV-12

Solución

1) El valor de la fuerza sobre un elemento de área dA será:

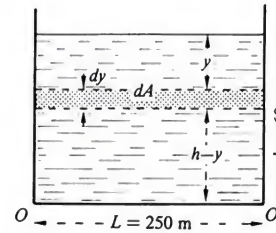
$$dF = pdA \left| \begin{array}{l} p = \rho_a g y \\ dA = Ldy \end{array} \right| \Rightarrow dF = \rho_a g y L dy$$

y la fuerza resultante es, por tanto:

$$F = \int_0^h dF = \rho_a g L \int_0^h y dy = \frac{1}{2} \rho_a g L h^2$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \frac{1\,000}{9{,}8} 9{,}8 \times 250 \times 60^2 = 45 \times 10^7 \text{ kp}}$$



Problema XIV-12-1.ª

2) El momento de la fuerza dF respecto del eje OO' es:

$$dN = (h - y)dF = \rho_a g L y (h - y) dy$$

y el momento resultante es:

$$N = \int_0^h dN = \rho_a g L \int_0^h y(h - y)dy = \frac{1}{6} \rho_a g L h^3$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{N = \frac{1}{6} \frac{1\,000}{9{,}8} 9{,}8 \times 250 \times 60^3 = 9 \times 10^9 \text{ kp} \cdot \text{m}}$$

3) Llamando H a la distancia por encima de O a la fuerza F para producir el momento N calculado en 2), se tendrá:

$$N = FH \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \rho_a g L h^2 H = \frac{1}{6} \rho_a g L h^3 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{h}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{60}{3} = 20 \text{ m}}$$

Problema 13. Sobre una superficie horizontal apoyamos boca abajo un recipiente de 9 kg de peso que tiene forma de semiesfera abierto por su plano diametral. En la parte superior tiene un agujero por el que se introduce agua. Hallar la altura máxima que puede alcanzar el agua para que la semiesfera no se despegue del plano. Suponemos que el plano cierra herméticamente al recipiente.

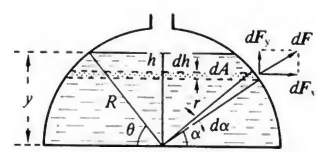
Solución

La suma de las componentes verticales de las fuerzas debidas a la presión harán que para una altura y el recipiente se despegue, lo que ocurrirá cuando sea igual al peso $P = 9$ kg. El valor de la fuerza sobre un elemento de área dA será:

$$dF = pdA \quad \Rightarrow \quad dF_y = pdA \operatorname{sen}\alpha$$

siendo dA una banda de radio $r = R\cos\alpha$ y de altura $dh = Rd\alpha$, luego:

$$dA = 2\pi R^2 \cos\alpha d\alpha$$



Problema XIV-13

por otro lado, el valor de p será:

$$p = \rho g h = \rho_a g(y - R\operatorname{sen}\alpha)$$

y, por tanto, cuando el recipiente comienza a despegarse:

$$P = \int_0^\theta dF_y = 2\pi R^2 \rho_a g \int_0^\theta (y - R\operatorname{sen}\alpha)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha d\alpha$$

Integrando:

$$P = 2\pi R^2 \rho_a g \left[y \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} - R \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3} \right]$$

y teniendo en cuenta que:

$$y = R\,\text{sen}\,\theta$$

nos queda:

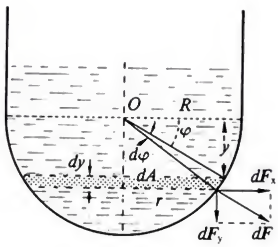
$$P = \frac{\pi}{3}\rho_a g R^3 \text{sen}^3\theta = \frac{\pi}{3}\rho_a g y^3 \Rightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{\frac{3P}{\pi\rho_a g}} = \sqrt[3]{\frac{3 \times 9 \times 10^3 \times 980}{980\pi}} = 20{,}5 \text{ cm}}$$

Problema 14. Un depósito lleno de agua está formado por un cilindro de 2 m de radio y 3 m de altura y una base en forma semiesférica. Calcular la fuerza que actúa sobre la base semiesférica.

Solución

La forma de proceder será: calcularemos primeramente la fuerza ejercida en el fondo de un depósito cilíndrico de las mismas características que el enunciado y le sumaremos la fuerza que actúa sobre un depósito lleno de agua de forma semiesférica de 2 m de radio.
La fuerza en el fondo de un depósito cilíndrico de $R = 2$ m y $h = 3$ m es:

$$F_1 = Ah\rho_a g = \pi R^2 h\rho_a g = \pi 200^2\ 300 \times 980 \text{ dyn} = 37\ 699 \text{ kp}$$



Problema XIV-14

La fuerza que actúa sobre un depósito lleno de agua de forma semiesférica de $R = 2$ m se calcula considerando solamente la suma (integral) de las componentes verticales de las fuerzas debidas a la presión sobre cada elemento de área dA, puesto que todos los pares de fuerzas horizontales que actúen sobre elementos opuestos son iguales en módulo y dirección, pero de signo contrario, de manera que la resultante horizontal es nula. Luego:

$$dF = p\,dA \Rightarrow dF_y = p\,dA\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow F_2 = \int_A p\,dA\,\text{sen}\,\alpha$$

y como:

$$p = \rho_a g y = \rho_a g R\,\text{sen}\,\alpha \qquad dA = 2\pi r\,dy = 2\pi R^2 \cos\alpha\, d\alpha$$

nos queda:

$$F_2 = \int_0^{\pi/2} 2\pi\rho_a g R^3 \cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha\, d\alpha = 2\pi\rho_a g R^3 \left[\frac{\text{sen}^3\alpha}{3}\right]_0^{\pi/2} \Rightarrow$$

$$F_2 = \frac{2}{3}\pi\rho_a g R^3 = \frac{2}{3}\pi 980 \times 200^3 \text{ dyn} = 16\ 755 \text{ kp}$$

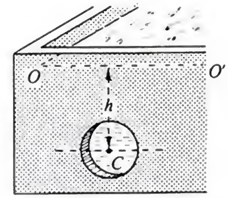
luego la fuerza debida al agua que actúa sobre la base semiesférica será:

$$\boxed{F = F_1 + F_2 = 54\ 454 \text{ kp}}$$

Problema 15. Hallar el centro de empuje de una compuerta circular de radio R cuyo centro está a una altura h de la superficie de un líquido, sabiendo que el momento de inercia del área de la compuerta respecto a un eje diametral es $I_G = AR^2/4$.

Solución

El momento de inercia del área de la compuerta respecto de OO' se calculará aplicando el teorema de Steiner:



Problema XIV-15

$$I = \frac{1}{4}AR^2 + Ah^2$$

luego:
$$h_E = \frac{\frac{1}{4}AR^2 + Ah^2}{Ah} = \frac{\frac{1}{4}R^2 + h^2}{h} \Rightarrow \boxed{h_E = h + \frac{R^2}{4h}}$$

B) TEOREMAS DE PASCAL Y ARQUIMEDES. EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS FLOTANTES

FORMULARIO

EMPUJE: $E = V\rho g$

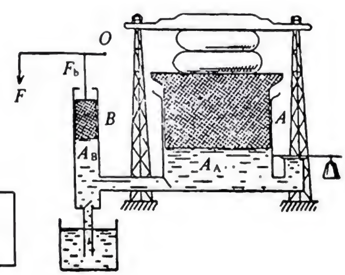
V = volumen sumergido, ρ = densidad del líquido.

CONDICIÓN DE FLOTACIÓN: $M = V\rho$

M = masa del cuerpo flotante, V = volumen de cuerpo sumergido, ρ = densidad del líquido.

Problema 16. Las secciones de los émbolos de una prensa hidráulica son circulares y de radio r_b = 5 cm y r_a = 50 cm. La longitud total de la palanca que acciona al émbolo pequeño es de 1 m, y la distancia entre el punto de aplicación de la potencia al de la resistencia, 75 cm. Aplicando a la palanca una fuerza de un kilopondio, ¿qué fuerza se transmite al émbolo mayor?

Solución



Problema XIV-16

La ley de la palanca conduce a:

$$1 \times 100 = F_b 25 \Rightarrow F_b = \frac{100}{25} = 4 \text{ kp}$$

$$\frac{F_a}{A_a} = \frac{F_b}{A_b} \Rightarrow \frac{F_a}{\pi r_a^2} = \frac{F_b}{\pi r_b^2} \Rightarrow \frac{F_a}{r_a^2} = \frac{F_b}{r_b^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_a = \frac{r_a^2}{r_b^2} F_b = \frac{2\,500}{25} 4 = 400 \text{ kp}}$$

Problema 17. Los dos pistones de una prensa hidráulica tienen por secciones $A = 5 \text{ cm}^2$ y $A' = 2 \text{ dm}^2$; la palanca de segundo género que sirve para maniobrar la bomba tiene por brazos longitudes de 10 cm y 1 m. Se ejerce en el extremo de la palanca una fuerza de 1 kp. Se pide:

1. ¿Qué peso podrá levantar la prensa?

2. ¿Cuál es el desplazamiento del pistón mayor cuando el pequeño se baja 10 cm?

3. ¿Cuál es la relación entre el trabajo motor y el trabajo resistente?

Solución

1) Fuerza transmitida por la palanca:

$$1 \times 1 = 0{,}1F \quad \Rightarrow \quad F = 10 \text{ kp}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{F'}{A'} \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{5} = \frac{F'}{2 \times 10^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F' = \frac{2 \times 10^3}{5} = 400 \text{ kp}}$$

2) Principio de trabajos virtuales:

$$Fh + F'h' = 0 \quad \Rightarrow \boxed{h' = -\frac{F}{F'}h = -\frac{10}{400}10 = -0{,}25 \text{ cm}}$$

Mientras el émbolo pequeño *desciende* 10 cm, el mayor *asciende* 0,25 cm.

3) Si no hay rozamientos, y teniendo que ser cero la suma de los trabajos:

$$W_{\text{motor}} + W_{\text{resistente}} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{W_{\text{resistente}}}{W_{\text{motor}}} = -1}$$

El trabajo motor lo consideramos positivo y el resistente negativo.

Problema 18. Calcular el peso aparente de una piedra de 10 kg cuando se encuentra sumergida en agua. Densidad de la piedra: $2{,}6 \text{ g/cm}^3$.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} P_a = P - E = Mg - V\rho_a g \\ \rho_p = \dfrac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \dfrac{M}{\rho_p} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_a = Mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right) = 10\left(1 - \frac{1}{2{,}6}\right) = 6{,}15 \text{ kp}}$$

Problema 19. Una esfera metálica hueca de densidad 7 g/cm^3 pesa en el aire 1 kg y sumergida en agua 0,8 kg. Calcular:

1. El volumen de la esfera.

2. El volumen de su cavidad interior.

Solución

1)

$$P_a = P - E \quad \Rightarrow \quad P_a = P - V\rho_a g \quad \Rightarrow \boxed{V = \frac{P - P_a}{\rho_a} = \frac{1 - 0{,}8}{1} 10^3 \text{ cm}^3 = 200 \text{ cm}^3}$$

2) El volumen que tiene el metal sin hueco será:

$$V' = \frac{M}{\rho} = \frac{10^3}{7} = 142{,}86\ \text{cm}^3$$

luego el hueco ocupa un volumen:

$$\boxed{V'' = V - V' = 200 - 142{,}86 = 57{,}14\ \text{cm}^3}$$

Problema 20. Para medir la densidad de un cuerpo se pesa en el aire y en el agua y da 130 g y 97 g, respectivamente. ¿Cómo se procede al cálculo de ésta? ¿Cuál es su volumen?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} P = Mg = V\rho g \\ \\ P_a = P - E = V\rho g - V\rho_a g \end{array}\right| \Rightarrow \frac{P}{P_a} = \frac{\rho}{\rho - \rho_a} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{\rho = \rho_a \dfrac{P}{P - P_a} = \dfrac{130}{130 - 97} = 3{,}94\ \text{g/cm}^3} \\ \boxed{V = \dfrac{P}{\rho g} = \dfrac{130 \times 980}{3{,}94 \times 980} = 33\ \text{cm}^3} \end{array}\right.$$

Problema 21. El peso aparente de un cuerpo en el agua es $P_1 = 4$ kg y en un aceite de densidad $\rho_2 = 0{,}8\ \text{g/cm}^3$ es $P_2 = 4{,}4$ kg. Calcular el peso real P del cuerpo.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = P - E_1 \\ \\ P_2 = P - E_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} V\rho g - V\rho_1 g = P_1 \\ \\ V\rho g - V\rho_2 g = P_2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = \frac{P_1}{P_2} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{\rho_1 P_2 - \rho_2 P_1}{P_2 - P_1} = \frac{4{,}4 - 0{,}8 \times 4}{4{,}4 - 4} = 3\ \text{g/cm}^3$$

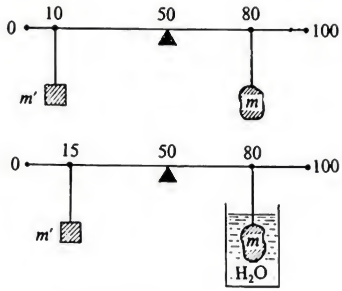
y como:

$$V = \frac{P_1}{g(\rho - \rho_1)} = \frac{4 \times 10^3}{3 - 1} = 2 \times 10^3\ \text{cm}^3$$

tendremos:

$$\boxed{P = Mg = V\rho g = 2 \times 10^3 \times 3 \times 980\ \text{dyn} = 6\ \text{kp}}$$

Problema 22. Una barra homogénea y de sección constante de 1 m de longitud, dividida en centímetros, se apoya por la división 50 sobre una cuña, en la cual se mantiene en equilibrio. Colgada una masa metálica en la división 80, hay que colocar un determinado contrapeso en la división 10 para que se siga manteniendo el equilibrio. Introducida la masa metálica en agua, para seguir manteniendo el equilibrio hay que colocar el mismo contrapeso en la división 15. ¿Cuál es la densidad de la sustancia metálica?



Problema XIV-22

Solución

Primer equilibrio:

$$30mg - 40m'g = 0 \quad \Rightarrow \quad 30V\rho = 40m'$$

Segundo equilibrio:

$$30V\rho - 30V\rho_a = 35m'$$

por división:

$$\frac{\rho - \rho_a}{\rho} = \frac{35}{40} \quad \Rightarrow \quad 40(\rho - 1) = 35\rho \quad \Rightarrow \boxed{\rho = 8 \text{ g/cm}^3}$$

Problema 23. ¿Qué fracción de volumen de un iceberg sobresale del agua? Densidad del agua del mar: 1,03 g/cm^3. Densidad del hielo: 0,92 g/cm^3.

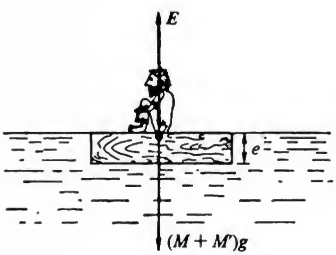
Solución

$$P = E \quad \Rightarrow \quad M = V_s\rho_a \quad \Rightarrow \quad V\rho_h = V_s\rho_a$$

luego la fracción de volumen sumergido será:

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_h}{\rho_a} = \frac{0{,}92}{1{,}03} = 0{,}89 \quad \Rightarrow \quad 89\ \%$$

con lo que la fracción de volumen que sobresale del agua será el $\boxed{11\ \%.}$

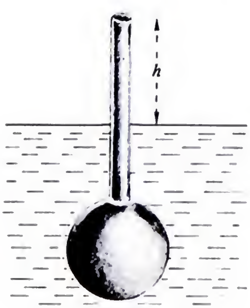


Problema XIV-24

Problema 24. Disponemos de una plancha de corcho de 1 dm de espesor; calcular la superficie mínima que se debe emplear para que flote en agua, sosteniendo a un náufrago de 70 kg. Masa específica del corcho: 0,24 g/cm^3.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} E = (M + M')g \\ E = Ae\rho_a g \\ M' = Ae\rho_c \end{array}\right| \Rightarrow \quad Ae\rho_a g = (M + Ae\rho_c)g \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{M}{e(\rho_a - \rho_c)} = \frac{70 \times 10^3}{10(1 - 0{,}24)} = 9\,210 \text{ cm}^2}$$



Problema XIV-25

Problema 25. Un palo cilíndrico de densidad 0,7 g/cm^3, de 4 cm^2 de sección y 1 m de largo se sumerge en el agua hasta que sobresalen h = 10 cm lastrando su parte inferior con una bola de cobre de densidad 8,8 g/cm^3. Hállese el volumen de la bola.

Solución

Llamando M y M' a las masas de la bola y del palo, respectivamente:

$$P = E \left| \begin{array}{l} P = Mg + M'g = V\rho g + Sl\rho' g \\ E = V_s\rho_a g = [V + S(l - h)]\rho_a g \end{array} \right| \quad \Rightarrow$$

$$V\rho + Sl\rho' = V\rho_a + S(l - h)\rho_a \quad \Rightarrow \boxed{V = S\,\frac{(l - h)\rho_a - l\rho'}{\rho - \rho_a}}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{V = 4\,\frac{(100 - 10) - 100 \times 0{,}7}{8{,}8 - 1}\ \text{cm}^3 = 10{,}26\ \text{cm}^3}$$

Problema 26. Un buque tiene una masa total de 2 000 t cuando lleva su carga máxima en el mar. ¿Qué masa debe quitarse al navegar por un río? Densidad del agua del mar: 1,03 g/cm^3. Tener en cuenta que, en los dos casos, el volumen sumergido debe ser el mismo.

Solución

$$M = V\rho \quad \left|\ \begin{array}{l} M = \text{masa del cuerpo que flota} \\ V = \text{volumen sumergido} \\ \rho = \text{densidad del líquido} \end{array}\right.$$

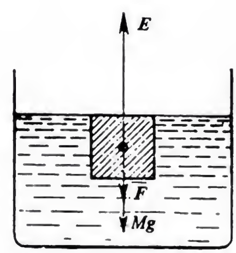
(Trabajamos en el SI.)

$$\left.\begin{array}{r} 2 \times 10^6 = V\,1\,030 \\ M' = V\,1\,000 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{2 \times 10^6}{M'} = \frac{103}{100} \Rightarrow M' = \frac{2 \times 10^8}{103} = 1{,}942 \times 10^6\ \text{kg} = 1\,942\ \text{t}$$

$$\boxed{x = M - M' = 2\,000 - 1\,942 = 58\ \text{t}}$$

Problema 27. Con una madera de densidad 0,7 g/cm^3 se talla un cubo de 1 dm de arista. Este cubo flota en el agua y en un aceite de densidad 0,9 g/cm^3. ¿Qué altura tiene la porción sumergida en cada caso? ¿Qué fuerza hay que ejercer sobre el cubo, cuando está en el aceite, para que se sumerja por completo?

Solución



Problema XIV-27

1) $$Mg = E_1 \left|\ \begin{array}{l} M = lA\rho_m \\ E_1 = x_1 A\rho_a g \end{array}\right| \Rightarrow l\rho_m = x_1\rho_a \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{l\rho_m}{\rho_a} = 7\ \text{cm}}$$

2) $$\left.\begin{array}{l} Mg = E_1 \\ E_2 = x_2 A\rho_{ac} g \end{array}\right| \Rightarrow l\rho_m = x_2\rho_{ac} \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{\rho_m}{\rho_{ac}}\, l = \frac{0{,}7}{0{,}9}\,10 = 7{,}8\ \text{cm}}$$

3) $$\left.\begin{array}{l} F + Mg = E \\ E = V\rho_{ac} g \end{array}\right| \Rightarrow F = V\rho_{ac} g - V\rho_m g = Vg(\rho_{ac} - \rho_m)$$

$$\boxed{F = 10^3 \times 980(0{,}9 - 0{,}7) = 196\,000\ \text{dyn} = 1{,}96\ \text{N}}$$

Problema 28. Una esfera metálica hueca de 30 cm de diámetro flota en un aceite de densidad 0,9 g/cm^3 y se encuentra sumergida hasta su plano diametral. Determínese:

1. Peso de la esfera.

2. Peso de lastre que hay que poner dentro para que la esfera quede totalmente sumergida.

Solución

1)

$$P = E = V_s \rho_{ac} g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_{ac} g = \frac{2}{3}\pi 15^3\ 0{,}9 \times 980 \text{ dyn} = 6{,}36 \text{ kp}$$

2)

$$P + P' = E' \quad \Rightarrow \quad P' = E' - P = E' - E \quad \Rightarrow$$

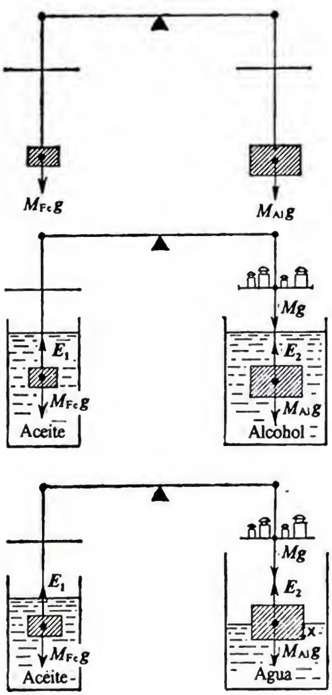
$$P' = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{ac} g - \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_{ac} g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_{ac} g = P = 6{,}63 \text{ kp}$$

Problema 29. **1.** Del platillo A de una balanza hidrostática se suspende un cubo macizo de hierro de 7 cm de arista, y del platillo B se suspende un cubo macizo de aluminio de 10 cm de arista. En estas condiciones la balanza está en equilibrio. Calcúlese la densidad del aluminio.

2. Sumergimos ahora el cubo de hierro en aceite y el cubo de aluminio en alcohol. En estas condiciones es preciso añadir al platillo B 496 g para equilibrar la balanza. Calcúlese la densidad del aceite.

3. En una tercera experiencia sustituimos el alcohol de la experiencia anterior por agua, dejando en el platillo B los 496 g, como antes. Vamos añadiendo el agua poco a poco hasta que se restablece el equilibrio, de manera que en el lado A el cubo de hierro estará sumergido en el aceite, mientras que en el B el cubo de aluminio flotará en el agua. Se pide calcular la relación entre el volumen de aluminio sumergido y el volumen total.

DATOS: Densidad del hierro = 7,8 g/cm^3.
Densidad del alcohol = 0,81 g/cm^3.



Problema XIV-29

Solución

1)

$$M_{Fe} = M_{Al} \quad \Rightarrow \quad 7^3 \times 7{,}8 = 10^3 \rho_{Al} \quad \Rightarrow \boxed{\rho_{Al} = 2{,}67 \text{ g/cm}^3}$$

2)

$$M_{Fe}g - E_1 = M_{Al}g - E_2 + Mg$$

y como según la primera experiencia:

$$M_{Fe}g = M_{Al}g$$

obtenemos:

$$E_1 = E_2 - Mg \quad \Rightarrow \quad 7^3 \rho_{ac} = 10^3 \times 0{,}81 - 496 \quad \Rightarrow \boxed{\rho_{ac} = 0{,}91 \text{ g/cm}^3}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} M_{Fe}g - E_1 = M_{Al}g + Mg - E_3 \\ M_{Fe}g = M_{Al}g \end{array}\right| \Rightarrow E_3 = E_1 + Mg \left| \begin{array}{l} E_3 = V_s\rho_a g \\ E_1 = V\rho_{ac}g \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$V_s\rho_a g = V\rho_{ac}g + Mg \Rightarrow V_s = 7^3 \times 0{,}91 + 496 = 808{,}13 \text{ cm}^3$$

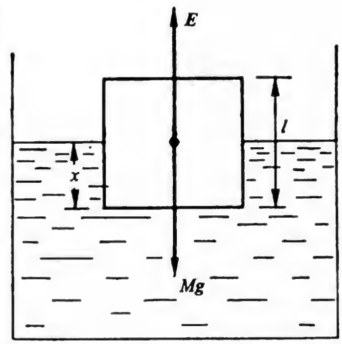
la relación de volumen de Al sumergido al volumen total será:

$$r = \frac{V_s}{V} = \frac{808{,}13}{10^3} = 0{,}80 \Rightarrow \boxed{80\ \%}$$

Problema 30. Un bloque cúbico de acero flota sobre mercurio. Siendo la densidad del acero $\rho_{ac} = 7{,}8$ g/cm^3 y la densidad del mercurio $\rho_m = 13{,}6$ g/cm^3, calcular:

1. ¿Qué fracción del volumen del bloque sobresale del mercurio?

2. Si vertemos agua sobre el mercurio, ¿qué fracción de arista cubrirá el agua si el bloque queda justamente cubierto por el agua?



Problema XIV-30-1.ª

Solución

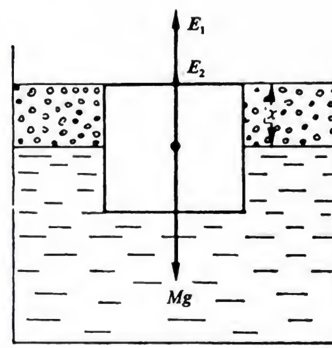
1)

$$E = Mg \left| \begin{array}{l} E = xA\rho_m g \\ \\ M = lA\rho_{ac} \end{array}\right| \Rightarrow xA\rho_m g = lA\rho_{ac}g \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{\rho_{ac}}{\rho_m}$$

Llamando V' al volumen sumergida y V al volumen total:

$$\frac{V'}{V} = \frac{xA}{lA} = \frac{x}{l} = \frac{\rho_{ac}}{\rho_m} = \frac{7{,}8}{13{,}6} = 0{,}57$$

luego la fracción sumergida es el 57 %, y la fracción flotante será $\boxed{43\ \%.}$



Problema XIV-30-2.ª

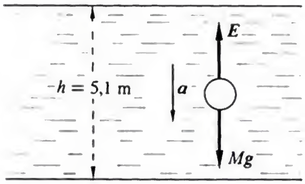
2)

$$E_1 + E_2 = Mg \left| \begin{array}{l} E_1 = (l - x)A\rho_m g \\ E_2 = xA\rho_a g \end{array}\right| \Rightarrow (l - x)A\rho_m g + xA\rho_a g = lA\rho_{ac}g$$

$$l\rho_m - x\rho_m + x\rho_a = l\rho_{ac} \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{\rho_m - \rho_{ac}}{\rho_m - \rho_a} = \frac{13{,}6 - 7{,}8}{13{,}6 - 1} = 0{,}46$$

El $\boxed{46\ \%}$ de la arista está sumergida en agua.

Problema 31. Dentro del agua y a una altura sobre el fondo de 5,1 m soltamos un cuerpo de masa 100 g. Calcular la velocidad, la energía cinética y el tiempo que tarda en la caída, suponiendo que la densidad del cuerpo es 2,75 g/cm^3. (Se desprecia toda influencia de rozamiento y sólo se tendrá en cuenta el empuje de Arquímedes.)



Problema XIV-31

Solución

Llamamos ρ_c a la densidad del cuerpo y ρ_a a la del agua:

$$Mg - E = Ma \left| \begin{array}{l} M = V\rho_c \\ E = V\rho_a g \end{array} \right| \Rightarrow V\rho_c g - V\rho_a g = V\rho_c a \Rightarrow a = g \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}} = \sqrt{2 \times 980 \times 510 \frac{2{,}75 - 1}{2{,}75}} \text{ cm/s} = 8 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} 100 \times 800^2 \text{ erg} = 3{,}2 \text{ J}}$$

$$h = \frac{1}{2} vt \Rightarrow \boxed{t = \frac{2h}{v} = \frac{2 \times 510}{800} = 1{,}3 \text{ s}}$$

Problema 32. Un cuerpo cae desde una altura de 6 m. Calcular la velocidad con que llega al suelo en los siguientes casos:
1. Cae libremente en el aire, perdiendo en rozamiento una cuarta parte de la energía inicial.
2. Cae por un plano inclinado 45°, con coeficiente de rozamiento 0,5.
3. Cae verticalmente dentro del agua, siendo su densidad 3. (Sólo se tendrá en cuenta el empuje de Arquímedes; se desprecia el rozamiento con el agua.)

Solución

1)

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} Mgh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{6}{4} gh} = \sqrt{\frac{3}{2} 9{,}8 \times 6} = 9{,}4 \text{ m/s}}$$

2)

$$\left. \begin{array}{l} Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \mu Mgl\cos\varphi \\ l = \frac{h}{\text{sen}\varphi} \end{array} \right| \Rightarrow Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{\mu Mgh}{\text{tag}\varphi}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\text{tag}\varphi}\right)} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 6(1 - 0{,}5)} = 7{,}7 \text{ m/s}}$$

3) Según el problema anterior:

$$a = g \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh \frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 6 \frac{3 - 1}{3}} = 8{,}8 \text{ m/s}}$$

Problema 33. Un objeto de corcho se deja caer desde una altura de 5 m sobre la superficie de un lago. Considerando que sólo se opone al movimiento el empuje del agua y que la densidad del corcho es 0,2 g/cm^3, calcular:
1. ¿Cuánto se hunde el objeto en el agua?
2. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a esa profundidad y volver a la superficie?

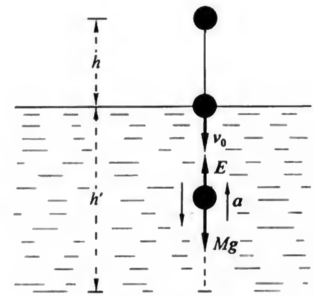
Solución

1) El movimiento del cuerpo dentro del agua es decelerado:

$$E - Mg = Ma \left| \begin{array}{l} M = V\rho_c \\ E = V\rho_a g \end{array} \right| \Rightarrow V\rho_a g - V\rho_c g = V\rho_c a \Rightarrow a = g\,\frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c}$$

La velocidad que tiene el cuerpo al llegar a la superficie del agua es:

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2|a|h'} \Rightarrow \boxed{h' = \frac{g}{a}\,h = \frac{\rho_c h}{\rho_a - \rho_c} = \frac{0{,}2 \times 5}{1 - 0{,}2} = 1{,}25 \text{ m}}$$



Problema XIV-33

2)

$$v_0 = at \Rightarrow t = \frac{v_0}{a} = \frac{\rho_c\sqrt{2gh}}{g(\rho_a - \rho_c)} = \frac{0{,}2\sqrt{2 \times 10 \times 5}}{10(1 - 0{,}2)} = 0{,}25 \text{ s}$$

el tiempo total desde que llegó a la superficie hasta que vuelve a ella es el doble del anterior, o sea, 0,5 s.

Si queremos calcular el tiempo de todo el proceso, habrá que sumarle el que empleó el objeto en caer 5 m en el aire:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}} = 1 \text{ s}$$

$$\boxed{t_{\text{total}} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5 \text{ s}}$$

Problema 34. Desde un punto situado a una altura de 10 m sobre la superficie de un estanque lleno de agua y de profundidad 5 m se deja caer una esferita de 0,2 cm de radio. Considerando que sólo se opone al movimiento el empuje del agua.

1. La esferita es de hierro de densidad 7,5. Calcular: a) Lo que tarda en llegar al fondo del estanque. b) La energía cinética con que llega al fondo.

2. La esferita es de madera de densidad 0,7. Calcular: a) La profundidad hasta la que llega a hundirse en el estanque. b) La velocidad con que emerge a la superficie.

Solución

1) En los problemas anteriores hemos obtenido:

$$v_0 = \sqrt{2gh} \qquad a = g\,\frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}$$

a)

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = t\sqrt{2gh} + \frac{1}{2}\,g\,\frac{\rho_c - \rho_a}{\rho_c}\,t^2$$

$$5 = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10}\; t + \frac{1}{2}\,9{,}8\,\frac{7{,}5 - 1}{7{,}5}\,t^2 \Rightarrow 4{,}25t^2 + 14t - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 0{,}32 \text{ s}}$$

(hemos considerado la solución positiva).

b)

$$v = v_0 + at = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 10} + 9{,}8\,\frac{7{,}5 - 1}{7{,}5}\,0{,}32 = 16{,}71 \text{ m/s}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,\pi r^3\rho_c v^2 = \frac{2}{3}\,\pi 0{,}2^3 \times 7{,}5 \times 1\,671^2 \text{ erg} = 350\,883 \text{ erg}}$$

2) El movimiento del cuerpo en el interior del agua es decelerado, con una deceleración:

$$|a| = g \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c} = 9{,}8 \frac{1 - 0{,}7}{0{,}7} = 4{,}2 \text{ m/s}^2$$

a)

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2|a|s} \quad \Rightarrow \boxed{s = \frac{g}{|a|} h = \frac{9{,}8 \times 10}{4{,}2} = 23 \text{ m}}$$

($\sqrt{2gh}$ es la velocidad con que el cuerpo penetra en el agua, que es la velocidad inicial en el seno de ella e igual a $\sqrt{2|a|s}$, siendo s el valor del espacio y $|a|$ el valor absoluto de la deceleración.)

Si hubiese profundidad suficiente, bajaría la esferita 23 m. No puede descenderlos, pues a los 5 m encuentra el fondo. En el siguiente apartado supondremos que el cuerpo parte del reposo desde el fondo al quedar retenido por el lodo y luego despegarse de él por el empuje.

b) Ascendiendo con la misma aceleración que descendió, la velocidad adquirida al llegar a la superficie es:

$$\boxed{v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 4{,}2 \times 5} = 6{,}5 \text{ m/s}}$$

Problema 35. Un trozo de madera de 1 kg de peso y densidad 0,6 se lanza verticalmente hacia abajo con una velocidad de $\sqrt{2}$ m/s desde un punto situado a 5 m de altura sobre la superficie de un depósito de aceite de densidad 0,9. Si se desprecian las resistencias del aire y del aceite, calcular:

1. La velocidad con que llega a la superficie del líquido.
2. El empuje que sufre una vez sumergido.
3. La aceleración con que se mueve en el interior del líquido.
4. La profundidad a que desciende y el tiempo invertido en dicho descenso.

Solución

Llamaremos ρ_m a la densidad de la madera y ρ_{ac} a la del aceite.

1)

$$Mgh + \frac{1}{2} Mv_0^2 = \frac{1}{2} Mv^2 \qquad \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{2 + 2 \times 9{,}8 \times 5} = 10 \text{ m/s}}$$

2)

$$\boxed{E = V\rho_{ac}g = \frac{M}{\rho_m} \rho_{ac}g = 1 \frac{0{,}9}{0{,}6} 9{,}8 \text{ N} = 1{,}5 \text{ kp}}$$

3) El movimiento es decelerado y el cálculo de la celeración es:

$$\left.\begin{array}{l} E - Mg = Ma \\ M = V\rho_m \\ E = V\rho_{ac}g \end{array}\right| \begin{array}{l} V\rho_{ac}g - M\rho_m g = V\rho_m a \quad \Rightarrow \\ \boxed{a = g \frac{\rho_{ac} - \rho_m}{\rho_m} = 9{,}8 \frac{0{,}9 - 0{,}6}{0{,}6} = 4{,}9 \text{ m/s}^2} \end{array}$$

4)

$$v = \sqrt{2|a|s} \quad \Rightarrow \boxed{s = \frac{v^2}{2|a|} = \frac{100}{2 \times 4{,}9} = 10{,}2 \text{ m}}$$

$$v = |a|t \quad \Rightarrow \boxed{t = \frac{v}{|a|} = \frac{10}{4{,}9} \simeq 2 \text{ s}}$$

Problema 36. Calcular el trabajo que se realiza al subir en el interior de un estanque lleno de agua un cuerpo de 100 kg de masa y 2 g/cm^3 de densidad, desde 10 m a 1 m de profundidad. Se desprecia la resistencia del agua.

Solución

El trabajo que hemos de realizar para subir el cuerpo un desnivel dh dentro del agua será:

$$dW = Fdh = (Mg - E)dh = Vg(\rho - \rho_a)dh$$

y como:

$$\rho = \frac{M}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{M}{\rho}$$

nos queda:

$$dW = Mg\,\frac{\rho - \rho_a}{\rho}\,dh = Mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)dh$$

en definitiva, es el producto del «peso aparente» por el espacio dh. En nuestro caso:

$$\boxed{W = \int_1^{10} dW = Mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right)[h]_1^{10} = 100\left(1 - \frac{1}{2}\right) 9 \text{ kgm} = 450 \text{ kgm}}$$

exactamente la mitad del trabajo que nos cuesta elevar al cuerpo 9 m en el aire.

Problema 37. Se sumerge en el agua un cubo de madera de densidad 0,7 g/cm^3 y 30 cm de arista, hasta que queda totalmente sumergido, de modo que la superficie libre del líquido coincide con una de las caras del cubo. Soltamos el cuerpo y después de realizado un movimiento armónico amortiguado queda en reposo, flotando en el líquido. Calcular el trabajo realizado por el cubo desde que se soltó hasta que queda en reposo.

Solución

Calculamos primero el valor h de la arista sumergida en el equilibrio:

$$M = V_s\rho_a \quad \Rightarrow \quad l^3\rho = l^2h\rho_a \quad \Rightarrow \quad h = l\,\frac{\rho}{\rho_a} = 30\,\frac{0{,}7}{1}\text{ cm} = 21 \text{ cm}$$

El trabajo realizado por el cuerpo es igual a la energía potencial que posee cuando está sumergido, que viene medida por el trabajo realizado al introducir el cuerpo dentro del líquido. Para introducir el cubo dx, estando las aristas sumergidas x, se realiza un trabajo:

$$dW = Fdx = (E - Mg)dx = l^2g(\rho_a x - \rho l)dx$$

luego:

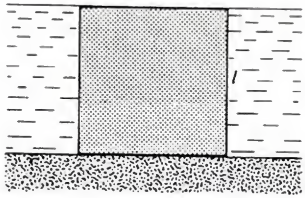
$$W = \int_h^l dW = \int_h^l l^2g[\rho_a x - \rho l]dx = l^2g\left[\frac{\rho_a}{2}x^2 - \rho l x\right]_h^l \quad \Rightarrow$$

$$W = l^2g\left[\frac{\rho_a}{2}(l^2 - h^2) - \rho l(l - h)\right] = l^2g(l - h)\left[\frac{\rho_a}{2}(l + h) - \rho l\right]$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{W = 30^2\,980(30 - 21)\left[\frac{30 + 21}{2} - 0{,}7 \times 30\right] \text{erg} \simeq 3{,}6 \text{ J}}$$

Problema 38. Un bloque cúbico de piedra de 1 m de lado y densidad 2,7 g/cm^3 está justamente sumergido en agua, como se indica en la figura. Calcular el trabajo que se realiza al sacarlo hasta que su cara inferior coincida con el nivel del agua.



Problema XIV-38

Solución

El trabajo que hemos de realizar para sacar el cuerpo dx estando las aristas sumergidas x es:

$$dW = Fdx = (Mg - E)dx = l^2 g(\rho l - \rho_a x)dx$$

luego:

$$W = \int_0^l l^2 g(\rho l - \rho_a x)dx = l^2 g \left[\rho l x - \frac{\rho_a}{2} x^2\right]_0^l = l^4 g \left[\rho - \frac{\rho_a}{2}\right]$$

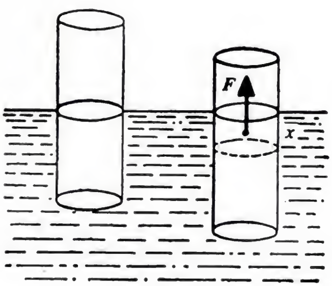
Sustituyendo valores:

$$\boxed{W = 10^4\ 980 \left(2{,}7 - \frac{1}{2}\right) \text{erg} = 2{,}156 \text{ J}}$$

Problema 39. Un cuerpo cilíndrico de radio 1 cm flota verticalmente en el agua. Ejerciendo una fuerza vertical sobre la base situada en el aire, lo introducimos un poco más que en la posición de equilibrio.

1. Demostrar que al soltar el cuerpo adquiere un movimiento vibratorio armónico y determinar la ecuación del movimiento.

2. Si el período de la vibración es 1 s, hallar la masa del cuerpo.



Problema XIV-39

Solución

1) La fuerza productora del movimiento es el exceso de empuje con respecto al del equilibrio del cuerpo flotante. Si consideramos una posición en que el cuerpo está introducido una longitud x, tal fuerza es:

$$F = -\pi r^2 x \rho g$$

el signo menos indica que si el desplazamiento es hacia abajo, la fuerza actúa hacia arriba:

$$F = -Kx$$

el movimiento es, por tanto, vibratorio armónico:

$$K = M\omega^2 = \pi r^2 \rho g$$

la ecuación del movimiento será:

$$\boxed{y = A\cos\omega t = A\cos\sqrt{\frac{\pi r^2 \rho g}{M}}\, t}$$

siendo A la amplitud (longitud máxima que introducimos a partir de la posición de equilibrio).

2)

$$\boxed{M = \frac{\pi r^2 \rho g}{\omega^2} = \frac{\pi r^2 \rho g}{4\pi^2} T^2 = \frac{r^2 \rho g}{4\pi} T = \frac{980}{4\pi} = 78 \text{ g}}$$

Capítulo XV

FENOMENOS MOLECULARES DE LOS LIQUIDOS

FORMULARIO

TENSIÓN SUPERFICIAL:

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

ENERGÍA SUPERFICIAL:

$$dW = \sigma dA$$

FÓRMULA DE LAPLACE:

$$p = \sigma \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

SUPERFICIE CILÍNDRICA:

$$p = \frac{\sigma}{r}$$

PRESIÓN DEL GAS INTERIOR EN UNA BURBUJA:

$$p_{\text{gas}} = H + \frac{4\sigma}{r}$$

LEY DE JURIN:

Tubos:

$$h = \frac{2\sigma \cos\varphi}{r\rho g}$$

Láminas paralelas a distancia d:

$$h = \frac{2\sigma \cos\varphi}{d\rho g}$$

LEY DE TATE:

$$Mg = Kr\sigma \simeq 2\pi r\sigma$$

Problema 1. ¿Qué fuerza se necesita para sacar del agua (σ = 72 dyn/cm) un alambre de 5 cm de longitud y 0,2 g de masa?

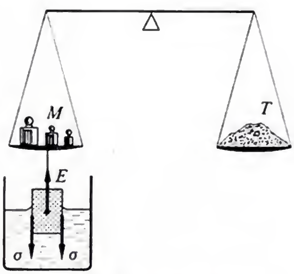
Solución

La fuerza necesaria será la suma del peso y la fuerza debida a la tensión superficial:

$$\boxed{F = Mg + 2l\sigma = 0{,}2 \times 980 + 2 \times 5 \times 72 = 916 \text{ dyn}}$$

Problema 2. Del platillo de una balanza se cuelga un cuerpo cilíndrico de vidrio cerrado por su base inferior de 1 cm de radio y 4 cm de altura, y se pone tara en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio. Se sumerge el cuerpo en agua destilada a 4° C hasta la mitad de su altura exactamente. Para restablecer el equilibrio hace falta poner en el platillo del cuerpo pesas por valor de 5,8 g. Calcular la tensión superficial del agua. El ángulo de conjunción se supone de cero grados, es decir, que el menisco es tangente a la superficie lateral del cilindro.

Solución



Problema XV-2

La tensión superficial actúa a lo largo del contacto del líquido con el cilindro. La fuerza hacia abajo debida a ella es:

$$F = 2\pi R\sigma$$

El empuje vale:

$$E = V_s \rho_a g = \pi R^2 \frac{h}{2} \rho_a g$$

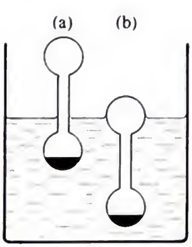
este empuje tendrá que anular a las pesas colocadas en el platillo (Mg) y a la fuerza F:

$$E = F + Mg \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 \frac{h}{2} \rho_a g = 2\pi R\sigma + Mg \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = \frac{\pi R^2 h \rho_a g - 2Mg}{4\pi R} = \frac{\pi 4 \times 980 - 2 \times 5{,}8 \times 980}{4\pi} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}} = 75{,}36 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}}}$$

Problema 3. Tenemos unas ampollitas de vidrio de paredes muy estrechas, en la forma indicada en la figura. La ampollita va lastrada en su parte inferior con mercurio para que se mantenga en la posición de la figura (a) al dejarla sobre el nivel de un recipiente con agua. Sumergimos el sistema hasta la posición de la figura (b). Debería recobrar la posición *a*, pero se queda en la *b*. ¿Por qué?

Solución



Problema XV-3

Llamamos r y R los radios de la parte cilíndrica y de la esferita, respectivamente:

$$R > r$$

En la posición (a) el valor de la tensión superficial es:

$$F = 2\pi r\sigma$$

y al estar en equilibrio, el empuje ha de ser igual al peso más la fuerza correspondiente a la tensión superficial:

$$E = P + 2\pi r\sigma$$

Al sumergir la ampollita la fuerza debida a la tensión superficial es:

$$F' = 2\pi R\sigma$$

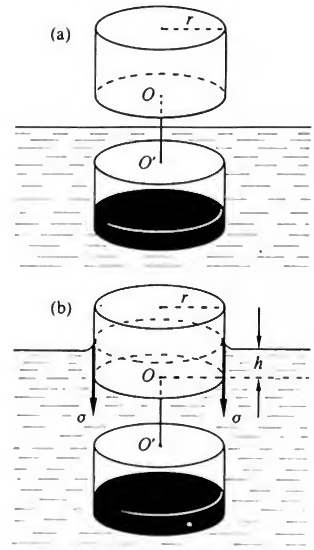
y se habrá de verificar:

$$E' = P + 2\pi R\sigma$$

y como el peso es el mismo, nos queda:

$$E - 2\pi r\sigma = E' - 2\pi R\sigma \quad \Rightarrow \quad V\rho g - 2\pi r\sigma = V'\rho g - 2\pi R\sigma \quad \Rightarrow \quad \frac{V' - V}{R - r} = \frac{2\pi\sigma}{\rho g}$$

Condición que se debe cumplir para que exista el segundo equilibrio.



Problema XV-4

Problema 4. Los cilindros huecos y cerrados de la figura son de vidrio y están unidos por la varilla OO'; el inferior se ha lastrado con el mercurio necesario para que el sistema flote en un líquido, con el cilindro inferior sumergido. Sumergimos el sistema hasta que quede también flotando en la forma de la figura (b), sin recobrar la primitiva posición (a). Demostrar que se debe cumplir:

$$rh = \frac{2\sigma}{\rho g}$$

(σ y ρ, tensión superficial y masa específica del líquido, respectivamente.) Se supone la varilla OO' infinitamente delgada, que el líquido moja al vidrio y que el ángulo de contacto es nulo.

Solución

En el primer equilibrio:

$$Mg = V\rho g$$

[V = volumen del cilindro inferior.]

En el segundo equilibrio:

$$Mg + 2\pi r\sigma = V\rho g + \pi r^2 h\rho g$$

luego, sustituyendo la primera, nos queda:

$$2\pi r\sigma = \pi r^2 h\rho g \quad \Rightarrow \quad \boxed{rh = \frac{2\sigma}{\rho g}}$$

Problema 5. Ocho gotas de mercurio de radio r se unen para formar una sola. ¿Qué relación existe entre las energías superficiales antes y después de la unión?

Solución

El volumen de la gota formada, que tendrá por radio R, será ocho veces mayor que el volumen de una de las gotas pequeñas:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 8\,\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad R^3 = 8r^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r} = 2$$

La energía superficial de las ocho gotas será ocho veces la energía de una sola:

$$W = 8 \times 2\sigma 4\pi r^2 = 64\pi\sigma r^2$$

y la de la gota resultante:

$$W' = 2\sigma 4\pi R^2 = 8\pi\sigma R^2$$

dividiendo:

$$\boxed{\frac{W}{W'} = 8\,\frac{r^2}{R^2} = 8\,\frac{1}{4} = 2}$$

Problema 6. El aceite de oliva tiene una tensión superficial respecto del aire de 32 dyn/cm. Una gota esférica tiene un diámetro de 4 mm. Calcular:
1. Presión a que está sometida.
2. Fuerza total a la que está sometida, debida a la tensión superficial, que actúa sobre su superficie.
3. Energía potencial de superficie.

Solución

1)

$$p = \frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \times 32}{0{,}2} = 320 \text{ b}$$

2)

$$F = pA = p4\pi r^2 = 320 \times 4\pi 0{,}2^2 = 160{,}85 \text{ dyn}$$

3)

$$W = \sigma A = \sigma 4\pi r^2 = 32 \times 4\pi 0{,}2^2 = 16{,}08 \text{ erg}$$

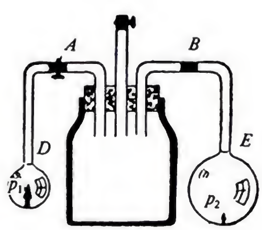
Problema 7. Calcular la energía superficial de una pompa de agua jabonosa de 1 cm de radio y la presión debida a su curvatura. Consideramos el espesor de la película líquida como despreciable. Tensión superficial = 35 dyn/cm.

Solución

$$W = 2\sigma A = 2\sigma 4\pi r^2 = 2 \times 35 \times 4\pi = 879{,}6 \text{ erg}$$

$$p = 2\,\frac{2\sigma}{r} = \frac{4 \times 35}{1} = 140 \text{ b}$$

Problema 8. En un dispositivo como el de la figura se han conseguido dos pompas de agua jabonosa en los extremos D y E de los tubos. La llave A incomunica el aire interior de las dos pompas. Abierta tal llave, la pequeña se achica y la grande aumenta de volumen. ¿Por qué?



Problema XV-8

Solución

Las presiones del gas interior de las pompas pequeña y grande, respectivamente, excede a la atmósfera en:

$$p_1 = 2\,\frac{2\sigma}{r} \qquad p_2 = 2\,\frac{2\sigma}{R}$$

Al ser $r < R$, se ha de verificar que $p_1 > p_2$, y el aire pasa de la pompa pequeña a la grande.

Problema 9. Sabiendo que la tensión superficial del agua es 75 dyn/cm, calcular la altura a que asciende el agua en un tubo capilar de 1 mm de diámetro y en unas láminas paralelas cuya distancia es 0,05 mm. Se supone el ángulo de conjunción igual a cero.

Solución

1) Aplicando la ley de Jurin:

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2 \times 75}{0{,}05 \times 980} = 3{,}1 \text{ cm}}$$

2) La altura alcanzada entre dos láminas paralelas es:

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{d\rho g} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2 \times 75}{0{,}005 \times 980} = 31 \text{ cm}}$$

Problema 10. El tubo de un barómetro de mercurio (tensión superficial, 547 dyn/cm; ángulo de conjunción, 125°) tiene 3 mm de diámetro. ¿Qué error introduce en las medidas la tensión superficial?

Solución

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g} = \frac{2 \times 547\cos 125°}{0{,}15 \times 13{,}6 \times 980} = -\ 0{,}3 \text{ cm} = -\ 3 \text{ mm}$$

el signo menos nos indica que la medida es inferior a la correcta.

Problema 11. Sabiendo que la tensión superficial del mercurio es 547 dyn/cm y que el ángulo de conjunción con un tubo capilar de 1 mm de diámetro y con unas láminas paralelas separadas 0,05 mm es de 125°, calcular la altura que desciende el mercurio al introducir tubo y láminas en una cubeta con dicho líquido.

Solución

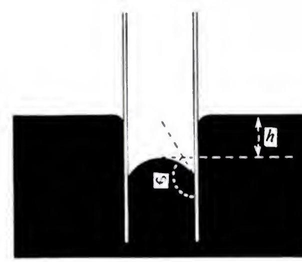
1) En el tubo:

$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g} = \frac{2 \times 547\cos 125°}{0{,}05 \times 13{,}6 \times 980} = -\ 1 \text{ cm}$$

2) En las láminas:

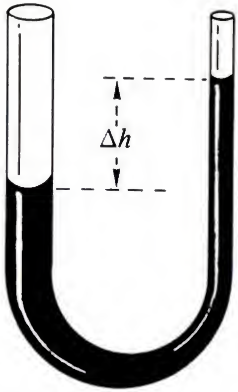
$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{d\rho g} = \frac{2 \times 547\cos 125°}{0{,}005 \times 13{,}6 \times 980} = -\ 10 \text{ cm}$$

el signo menos indica el *descenso*.



Problema XV-11

Problema 12. En un tubo en U cuyas ramas son de 0,6 mm y 0,6 cm de diámetro se introduce un líquido de densidad 1,8 g/cm^3 y de 32 dyn/cm de tensión superficial. ¿Cuál será la diferencia de nivel del líquido en las dos ramas del tubo, si éste se encuentra en posición vertical y el ángulo de conjunción es 32°?



Problema XV-12

Solución

$$\Delta h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{\rho g}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right] = \frac{2\times 32\cos 32°}{1{,}8\times 980}\left[\frac{1}{0{,}06}+\frac{1}{0{,}6}\right] = 0{,}5\ \text{cm}$$

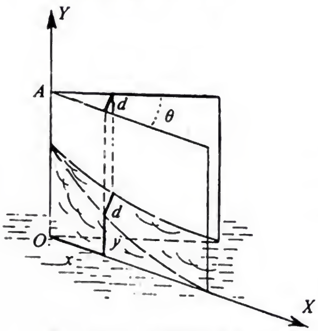
Problema 13. En un experimento para calcular el ángulo de conjunción entre un líquido y el vidrio se han obtenido los siguientes datos: densidad del líquido, 0,8 g/cm^3; radio del capilar, 0,5 mm; elevación en el tubo capilar, 1,2 cm; tensión superficial del líquido, 28 dyn/cm. Calcular éste.

Solución

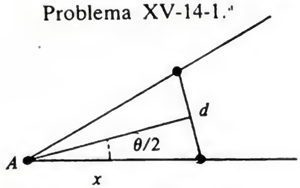
$$h = \frac{2\sigma\cos\varphi}{r\rho g} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{r\rho g h}{2\sigma} = \frac{0{,}05\times 0{,}8\times 980\times 1{,}2}{2\times 28} = 0{,}84$$

$$\boxed{\varphi = 32°51'36''}$$

Problema 14. Demostrar que la línea de contacto de un líquido con dos láminas de vidrio verticales que forman entre sí un ángulo diedro muy pequeño es una hipérbola equilátera.



Problema XV-14-1.ª



Problema XV-14-2.ª

Solución

Tomaremos los ejes sobre una de las láminas:

$$y = \frac{2\sigma\cos\varphi}{d\rho g} \qquad d = 2x\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

luego:

$$y = \frac{\sigma\cos\varphi}{x\rho g\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \boxed{xy = \frac{\sigma\cos\varphi}{\rho g\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}} = \text{constante}} \quad \text{c.q.d.}$$

Problema 15. El estalagmómetro, aparato destinado a la medida de tensiones superficiales, es una pipeta de la que se vierte gota a gota, en una primera experiencia, el líquido problema, contándose el número de gotas n correspondientes a un determinado volumen; se repite el recuento para el mismo volumen de agua, obteniéndose n' gotas. Determinar la tensión superficial del líquido (σ) conocida la del agua (σ') y las masas específicas (ρ y ρ') de ambos líquidos.

Solución

Las masas de una gota de líquido y de agua son:

$$M = \frac{V\rho}{n} \qquad M' = \frac{V\rho'}{n'}$$

por división, y teniendo en cuenta la ley de Tate:

$$\frac{M}{M'} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{n'}{n} = \frac{\sigma}{\sigma'} \Rightarrow \boxed{\sigma = \sigma'\,\frac{\rho}{\rho'}\,\frac{n'}{n}}$$

Problema 16. En el platillo izquierdo de una balanza se coloca una tara; en el derecho, un vasito y pesas de masa M_1 hasta equilibrarla. Se quitan las pesas y se vierte en el vaso, con un cuentagotas, n gotas de un líquido; se vuelve a equilibrar la balanza (la misma tara) con pesas de masa M_2. Se quitan éstas y se vierten en el vasito, sobre el líquido, n gotas de agua. Se consigue de nuevo el equilibrio con pesas de masa M_3. Conocida la constante de tensión superficial del agua σ', determinar la del líquido (σ).

Solución

Masa de n gotas de líquido:

$$nM = M_1 - M_2$$

Masa de n gotas de agua:

$$nM' = M_2 - M_3$$

por división obtenemos:

$$\frac{M}{M'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}$$

aplicando la fórmula de Tate al líquido y al agua, nos da:

$$\left.\begin{array}{l} P = Mg = Kr\sigma \\ \\ P' = M'g = Kr\sigma' \end{array}\right| \Rightarrow \frac{M}{M'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$$

por igualación:

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3} \quad \Rightarrow \boxed{\sigma = \sigma' \frac{M_1 - M_2}{M_2 - M_3}}$$

Capítulo XVI

AEROSTATICA

FORMULARIO

PRESIÓN DE UN GAS EN CONDICIONES NORMALES:

$$P = H_0 = 1 \text{ atm} = 76 \times 13{,}6 \times 980 \text{ b} = 1{,}0336 \text{ kp/cm}^2$$

LEY DE BOYLE-MARIOTTE ($T = \text{ct}^{\text{e}}$) *: $\quad pV = \text{ct}^{\text{e}}$

VARIACIÓN DE LA MASA ESPECÍFICA CON LA PRESIÓN ($T = \text{ct}^{\text{e}}$):

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Problema 1. Calcular la fuerza debida a la presión armosférica ($H = 1$ atm) que soporta un hombre que tiene una superficie de 1,5 m^2.

Solución

$$\boxed{F = pA = \frac{76 \times 13{,}6 \times 980}{10^5 \times 9{,}8 \times 10^{-4}}\, 1{,}5 = 15\,504 \text{ kp}}$$

Problema XVI-2

Problema 2. Una cámara en la que se ha hecho un vacío perfecto está cerrada por una puerta cuadrada que ajusta herméticamente, cuyo lado es 1/2 m. Calcular el número de hombres que, ejerciendo una fuerza de 80 kp, son necesarios para abrir la puerta.

Solución

Siendo la presión normal:

$$H = 76 \text{ cm de Hg} = 1\,033{,}6 \text{ g-f/cm}^2$$

* En el capítulo XX se verán más problemas relativos a esta cuestión.

y la superficie de la puerta:

$$A = 50 \times 50 = 2\,500 \text{ cm}^2$$

la fuerza necesaria para abrirla es:

$$F = pA = 1\,033{,}6 \times 2\,500 \text{ g-f} = 2\,584 \text{ kp}$$

luego:

$$n = \frac{2\,584}{80} = 32{,}3$$

es decir: $\boxed{\text{32 hombres y un niño que ejerciese 24 kp.}}$

Problema 3. Un alumno quiso reproducir en su casa la experiencia de Torricelli, con un tubo de 1 m de longitud; al no tener mercurio, llenó el tubo de agua y, una vez invertido sobre una cubeta con agua, observó que ésta no bajaba en el tubo. ¿Por qué? ¿Qué longitud mínima debería tener el tubo si la presión exterior era la normal?

Solución

La altura de una columna de agua equivalente a la de mercurio viene dada por:

$$76 \times 13{,}6 = h \times 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 1\,033{,}6 \text{ cm}}$$

El tubo debería tener más de 10,336 m.

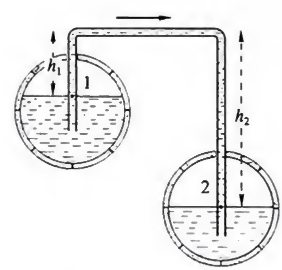
Problema 4. Para «trasegar el vino» (pasarlo de un recipiente a otro en un nivel más bajo, ver figura) se emplea una goma que hace de «sifón». Explicar este proceso.

Solución

El «sifón» funciona gracias a la presión atmosférica H; la fuerza debida a ésta actuará en las secciones 1 y 2 hacia arriba. Si $p_1 = \rho g h_1$ es la presión debida al vino en el punto 1 y $p_2 = \rho g h_2$ es la presión en 2, entonces la presión eficaz en el brazo corto será $H - p_1$ y en el largo $H - p_2$, y como:

$$h_1 < h_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 < p_2 \quad \Rightarrow \quad H - p_1 > H - p_2$$

las fuerzas debidas a estas presiones van dirigidas hacia arriba, por lo que el vino descenderá por el brazo largo.



Problema XVI-4

Problema 5. Calcular la altura que tendría la atmósfera si no variase la densidad del aire con la altura.

Solución

El peso de la columna de mercurio de 76 cm de altura es igual al peso de la columna de aire cuya altura es la de la atmósfera. Si la densidad del aire fuera constante, se verificaría:

$$h\rho g = h'\rho' g \quad \Rightarrow \quad \boxed{h' = \frac{\rho}{\rho'}\, h = \frac{13{,}6}{0{,}001293}\, 76 \times 10^{-5} \text{ km} \simeq 8 \text{ km}}$$

Problema 6. Un avión bombardero tiene una velocidad de 700 km/h; si tenemos en cuenta que el barómetro del avión registra una presión atmosférica que es inferior en 13 cm de Hg a la que hay en ese instante en la superficie terrestre, y en el supuesto de que el aire tuviese una densidad constante e igual a 0,001293 g/cm^3, en la capa del mismo comprendida entre el avión y el suelo. Calcular:

1. La altura a la que se encuentra el avión.

2. La energía total de una bomba en el instante de su lanzamiento, sabiendo que pesa 500 kg, de los cuales 420 son de explosivo, cuya potencia explosiva es de 4 400 kcal/kg.

3. ¿A qué distancia de la posición actual del avión, según la horizontal, tocará la bomba el suelo?

Solución

1)

$$\rho g h = \rho' g h' \quad \Rightarrow \quad 13{,}6 \times 13 = 0{,}001293 h' \quad \Rightarrow \boxed{h' = 1\ 367 \text{ m}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} W_{\text{explosiva}} = 4\ 400 \times 420 \text{ kcal} = 4\ 400 \times 420 \times 427 \text{ kgm} \\ T = \dfrac{1}{2} M v^2 = \dfrac{1}{2}\ \dfrac{500}{9{,}8} \left(\dfrac{700\ 000}{3\ 600}\right)^2 \text{ kgm} \\ U = Mgh = \dfrac{500}{9{,}8}\ 9{,}8 \times 1\ 367 \text{ kgm} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{W_{\text{total}} = W_{\text{exp}} + T + U \simeq 791 \times 10^6 \text{ kgm}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} x = vt \\ y = \dfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right| \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow \boxed{x = v \sqrt{\frac{2y}{g}} = \frac{700}{3{,}6} \sqrt{\frac{2 \times 1\ 367}{9{,}8}} = 3\ 248 \text{ m}}$$

Problema 7. Demostrar que la diferencia de altura h que existe entre dos lugares de observación en los que las alturas barométricas para el más bajo y más alto son H_1 y H_2, respectivamente, viene dada por la fórmula:

$$h = 18\ 400 \log \frac{H_2}{H_1}$$

en metros. No considerar la variación de g con la altura. La densidad del aire en condiciones normales es $1{,}293 \times 10^{-3}$ g/cm^3.

Solución

En efecto: la variación de la altura barométrica dH en cm de Hg y la altura ascendida en el aire dh vienen ligadas por:

$$\rho dh = -\ 13{,}6 dH$$

indicando el signo menos que a un aumento de h (altura) corresponde una disminución de H (presión atmosférica). La densidad del aire varía con la presión (suponiendo que la temperatura no varía con la altura):

$$\frac{\rho}{1{,}293 \times 10^{-3}} = \frac{H}{76}$$

y, por tanto:

$$\frac{H 1{,}293 \times 10^{-3}}{76} dh = -13{,}6 dH \quad \Rightarrow \quad dh = -\frac{13{,}6 \times 76}{1{,}293 \times 10^{-3}} \frac{dH}{H}$$

integrando de la altura h_1 a h_2, a las que corresponden presiones H_1 y H_2, se obtiene:

$$h = h_2 - h_1 = \frac{13{,}6 \times 76}{1{,}293 \times 10^{-3}} \ln \frac{H_1}{H_2} = \frac{13{,}6 \times 76}{1{,}293 \times 10^{-3}} 2{,}3025 \log \frac{H_1}{H_2} \simeq 1\,840\,000 \log \frac{H_1}{H_2} \text{ cm} = 18\,400 \log \frac{H_1}{H_2} \text{ m}$$

Problema 8. Un avión vuela a 9 000 m de altura sobre el nivel del mar, donde la presión es de 1 000 mbar, igual a la existente en el interior del aparato. Calcular la fuerza normal sobre una ventana de 1 200 cm^2 de superficie, debida a la diferencia de presiones existente entre el interior y el exterior del avión. Utilizar la fórmula obtenida en el problema anterior.

Solución

La presión interior del avión en kp/cm^2 será:

$$H_1 = 10^6 \text{ dyn/cm}^2 = \frac{10^6}{10^5 \times 9{,}8} \text{ kp/cm}^2 = 1{,}02 \text{ kp/cm}^2$$

La presión externa será:

$$h = 18\,400 \log \frac{H_1}{H_2} \quad \Rightarrow \quad \log \frac{H_1}{H_2} = \frac{9\,000}{18\,400} \quad \Rightarrow \quad H_2 = 0{,}33 \text{ kp/cm}^2$$

luego:

$$\boxed{F = \Delta p A = (1{,}02 - 0{,}33)\, 1\,200 \text{ kp} = 828 \text{ kp}}$$

Problema 9. Se trata de construir un globo cuya masa, prescindiendo del gas interior, sea de 300 kg; el gas interior es helio, cuya masa específica es 0,000196 g/cm^3, y la del aire, 0,001293 g/cm^3. Calcular:

1. El mínimo volumen del aeróstato.

2. La fuerza ascensional si tuviese un volumen de 300 m^3.

Solución

Peso del globo + peso del gas = empuje

1)

$$Mg + V\rho g = V\rho_0 g \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{M}{\rho_0 - \rho} = \frac{300}{1{,}293 - 0{,}196} = 273{,}47 \text{ m}^3}$$

2)

$$F = E - P = V\rho_0 g - (Mg + V\rho g) = V(\rho_0 - \rho)g - Mg$$

Operando en el sistema técnico, obtenemos:

$$\boxed{F = 300 \left[\frac{1{,}293}{9{,}8} - \frac{0{,}196}{9{,}8} \right] 9{,}8 - \frac{300}{9{,}8} 9{,}8 = 29{,}1 \text{ kp}}$$

Problema 10. Conforme un globo asciende la masa específica del aire (ρ_a) disminuye, haciéndose también menor la fuerza ascensional, hasta que llega un momento en que el aeróstato se detiene. Demostrar que el valor de la masa del globo sin gas (M) cuando esto ocurre toma el valor: $M = V(\rho_a - \rho)$, siendo V el volumen del gas que llena el globo y ρ la densidad de dicho gas.

Solución

Para que un aeróstato se eleve es necesario que su peso sea menor que el empuje del aire. Se llama *fuerza ascensional* a la diferencia entre el empuje y el peso de un globo:

$$F = E - P$$

y como:

$$P = V\rho g + Mg$$

Considerando que V es prácticamente el volumen total, el empuje es:

$$E = V\rho_a g$$

En consecuencia, la fuerza ascensional viene expresada por:

$$F = V\rho_a g - (V\rho g + Mg) = Vg(\rho_a - \rho) - Mg$$

Conforme se asciende, la masa específica del aire (ρ_a) disminuye y, por consiguiente, la fuerza ascensional se hace menor; cuando llega a ser cero el globo se detiene. Entonces se verifica:

$$Vg(\rho_a - \rho) - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad V(\rho_a - \rho) = M \qquad \text{c.q.d.}$$

Para descender se disminuye el volumen, por salida de gas, haciéndose entonces la fuerza ascensional negativa (fuerza descensional).

Problema 11. Encontrar una fórmula general que nos dé la expresión de la masa real de un cuerpo (M_c) pesado en el aire (o en el interior de cualquier otro fluido) en función de la masa de las pesas (M_p) y de las densidades del cuerpo (ρ_c), de las pesas (ρ_p) y del aire (ρ_a).

Solución

Al efectuar una pesada en el aire o en el seno de cualquier fluido no se igualan el peso del cuerpo P_c y el de las pesas P_p, sino las diferencias entre el peso y el empuje que el fluido efectúa:

$$P_c - E_c = P_p - E_p$$

Llamaremos V_c y V_p a los volúmenes del cuerpo y las pesas; M_c y M_p a sus masas y ρ_c y ρ_p a sus masas específicas; ρ_a es la masa específica del fluido en cuyo seno se realiza la pesada.

El empuje que experimenta el cuerpo es:

$$E_c = V_c \rho_a g = \frac{M_c}{\rho_c} \rho_a g$$

Análogamente, el empuje que experimentan las pesas es:

$$E_p = V_p \rho_a g = \frac{M_p}{\rho_p} \rho_a g$$

Por sustitución en la primera, obtenemos:

$$M_c g - M_c \frac{\rho_a}{\rho_c} g = M_p g - M_p \frac{\rho_a}{\rho_p} g \quad \Rightarrow \quad M_c \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) = M_p \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_p}\right)$$

La masa real del cuerpo es:

$$\boxed{M_c = M_p \frac{1 - \dfrac{\rho_a}{\rho_p}}{1 - \dfrac{\rho_a}{\rho_c}}}$$

Problema 12. Un tubo cilíndrico graduado, de 1 m de longitud y abierto por sus dos extremos, se introduce verticalmente hasta la mitad de su altura, en un líquido. Se tapa su extremo libre con el dedo y se saca, observando que el líquido se vierte hasta quedar ocupando una altura de 25 cm. Calcular con estos datos la densidad del líquido. Presión exterior = 76 cm de mercurio.

Solución

Una vez sacado el tubo del líquido, en la parte superior (75 cm de su altura) queda encerrado aire a una presión p que calculamos por la fórmula de Boyle:

$$76 \times 50A = p75A \quad \Rightarrow \quad p = \frac{76 \times 50}{75} \text{ cm de Hg} = \frac{76 \times 50}{75} 13{,}6 \times 980 = 675\,285 \text{ b}$$

Además, se ha de verificar:

$$H = p_h + p$$

siendo p_h la presión hidrostática (debida al líquido). Luego:

$$76 \times 13{,}6 \times 980 = \rho 980 \times 25 + 675\,285 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 13{,}7 \text{ g/cm}^3}$$

Problema 13. Un globo de goma tiene de masa 10 g. Se llena de gas helio (densidad a 1 atm: 0,18 g/l) hasta que para una presión interior de 2 atm el globo alcanza un diámetro de 40 cm. Al globo se le ata un cordel muy largo que tiene una masa de 1,5 g/m. Si la densidad del aire es de 1,30 g/l, ¿qué altura alcanzará la parte inferior del globo?

Solución

Cálculo de la densidad del He a 2 atm:

Una determinada masa de gas, en dos distintas condiciones de presión y volumen, tiene por valor:

$$M = V\rho = V'\rho' \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{V'}{V} = \frac{p}{p'} \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}18}{\rho'} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \rho' = 0{,}36 \text{ g/l}$$

Llamemos λ a la densidad lineal del cordel:

$$\lambda = \frac{m}{l} = 1{,}5 \text{ g/m}$$

PESO GOMA + PESO HELIO + PESO CORDEL = EMPUJE DEL AIRE:

$$M'g + V\rho'_{\text{He}}g + \lambda lg = V\rho_{\text{aire}}g \quad \Rightarrow \quad l = \frac{V(\rho_{\text{aire}} - \rho'_{\text{He}}) - M'}{\lambda}$$

Tomaremos el volumen en litros y las masas en g, ya que las densidades están expresadas en g/l:

$$\boxed{l = \frac{\frac{4}{3}\pi \times 2^3(1{,}3 - 0{,}36) - 10}{1{,}5}\ \text{m} = 14{,}3 \text{ m}}$$

Problema 14. Un cilindro vertical, AB, de 40 cm de longitud y 10 cm^2 de sección interior contiene un pistón horizontal de cierre hermético resbalando sin rozamiento, de espesor despreciable y de peso igual a 5 kg. Las bases del cilindro tiene sendas llaves para comunicar con el exterior. Tomamos la presión atmosférica igual a 1 kg/cm^2 y el peso del litro de aire bajo esta presión igual a 1,3 g.
1. Se encuentra el pistón a la mitad del recorrido y las llaves están abiertas. Se cierra la llave correspondiente a la base inferior y el pistón desciende. ¿Qué longitud desciende?
2. Partiendo de la misma posición anterior, se cierran simultáneamente las dos llaves. ¿Cuál es el desplazamiento en este caso?
3. Resuelto el primer caso, en la posición de equilibrio se inyecta aire por la llave inferior. ¿Qué masa de aire es preciso inyectar para que el pistón se coloque nuevamente en la mitad de la altura del cilindro?

Solución

1) La presión que corresponde al peso del émbolo es:

$$p_{\text{E}} = \frac{5}{10} = 0{,}5 \text{ kg/cm}^2$$

Si llamamos H a la presión atmosférica y p la presión del gas de la parte inferior del cilindro, se habrá de verificar:

$$H + p_{\text{E}} = p$$

Aplicamos la ley de Boyle-Mariotte al gas del depósito cerrado (llamamos l a la longitud del cilindro):

$$HA\frac{l}{2} = pA\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x}$$

sustituyendo en la anterior, obtenemos:

$$H + p_{\text{E}} = \frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{p_{\text{E}}l}{2(H + p_{\text{E}})} = \frac{0{,}5 \times 40}{2(1 + 0{,}5)} = \frac{20}{3} \text{ cm}}$$

2) Llamamos p_1 y p_2 a las presiones del gas en los recintos superior e inferior. En el equilibrio se habrá de verificar:

$$p_1 + p_E = p_2$$

por la aplicación de la ley de Boyle-Mariotte se obtiene:

$$HA\frac{l}{2} = p_1 A\left(\frac{l}{2} + x'\right) \Rightarrow p_1 = \frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} + x'}$$

$$HA\frac{l}{2} = p_2 A\left(\frac{l}{2} - x'\right) \Rightarrow p_2 = \frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x'}$$

sustituyendo en la primera:

$$\frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} + x'} + p_E = \frac{H\frac{l}{2}}{\frac{l}{2} - x'} \Rightarrow 4p_E x'^2 + 4Hlx' - p_E l^2 = 0$$

Trabajando en un sistema en que la unidad de fuerza sea el kp y de longitud el cm, obtenemos:

$$x'^2 + 80x' - 400 = 0$$

cuya solución positiva es: $\boxed{x' = 4{,}72 \text{ cm}}$

3) La masa será la correspondiente a un volumen $V = Ax$, a la presión $H + p_E$. La densidad del gas en estas condiciones es:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{H + p_E}{H} = 1{,}5 \Rightarrow \rho = 1{,}5\rho_0 = 1{,}5 \times 1{,}3 \text{ g/l}$$

$$\boxed{M = V\rho = Ax\rho = 0{,}1\,\frac{2}{3}\,1{,}3 \times 1{,}5 = 0{,}13 \text{ g}}$$

(La superficie y la longitud se han expresado en dm^2 y dm, para obtener el volumen en dm^3.)

Problema 15. Se dan cuatro emboladas de extracción al pistón de una máquina neumática, cuyo cilindro tiene una capacidad de 2 l, siendo la presión del aire en la vasija donde se quiere hacer el vacío de 1 atm y la final, en este mismo recipiente, de 1/81 de atm. Se pide:

1. Calcular el volumen de la vasija en que se hace el vacío.

2. Las masas de aire al comenzar la extracción y al final de ella, o sea, después de las cuatro emboladas.

Masa específica del aire a la temperatura de la experiencia: 0,001293 g/cm^3.

Solución

1)

1.ª embolada:

$$pV = p_1(v + V) \Rightarrow p_1 = p\frac{V}{V + v}$$

2.ª embolada:

$$p_1 V = p_2(v + V) \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 \frac{V}{V+v} = p\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$$

n embolada:

$$p_n = p\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

para $n = 4$:

$$\frac{1}{81} = 1\left(\frac{V}{V+2}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{V}{V+2} \quad \Rightarrow \boxed{V = 1\ \text{l}.}$$

2)

$$M = V\rho \quad \Rightarrow \boxed{M_1 = 1\,000 \times 0{,}001293 = 1{,}293\ \text{g}}$$

$$\boxed{M_2 = 1\,000\,\frac{0{,}001293}{81} = 0{,}016\ \text{g}}$$

Problema 16. En un tubo cilíndrico de 4 mm de radio, en el que el mercurio marcaba 740 mm de altura, quedando 15 cm de cámara barométrica, ha entrado aire, y como consecuencia ha bajado la columna a 715 mm. Calcular:
1. El volumen de aire que ha entrado a la presión atmosférica.
2. Si se pone ahora la cámara en comunicación con un globo vacío de litro y medio de volumen, ¿cuál es la nueva presión del aire y la altura marcada por el mercurio?

Solución

1) Altura del tubo:

$$h = 740 + 150 = 890\ \text{mm}$$

Volumen del gas:

$$V = (890 - 715)\pi 16\ \text{mm}^3 = 2\,800\pi\ \text{mm}^3$$

Presión del gas:

$$p = 740 - 715 = 25\ \text{mm de Hg}$$

El volumen del gas a 740 mm de mercurio se obtendrá por aplicación de la ley de Boyle-Mariotte:

$$25 \times 2\,800\pi = 740\ V' \quad \Rightarrow \boxed{V' = 297\ \text{mm}^3}$$

2) El mercurio asciende en el tubo h mm. Nuevo volumen del gas:

$$V'' = [(890 - 715 - h)\pi 16 + 1{,}5 \times 10^6]\ \text{mm}^3 \simeq (1{,}51 \times 10^6 - 16\pi h)\ \text{mm}^3$$

Nueva presión del gas:

$$p'' = [740 - 715 - h] = (25 - h)\ \text{mm de Hg}$$

aplicando la ley de Boyle-Mariotte, se obtiene:

$$25 \times 28\,000\pi = (25 - h)\,(1{,}51 \times 10^6 - 16\pi h) \quad \Rightarrow \quad h = 23{,}5\ \text{mm}$$

La altura H marcada por el mercurio será:

$$\boxed{H = 715 + 23{,}5 = 738{,}5\ \text{mm}}$$

La presión p del gas es ahora:

$$\boxed{p = 740 - 738{,}5 = 1{,}5\ \text{mm de Hg}}$$

Problema 17. El tubo de un barómetro tiene 1 m de longitud por encima del mercurio de la cubeta y 1 cm^2 de sección interior. Contiene una columna de mercurio de 0,760 m de altura y cuya temperatura es 0°. Se introduce en la cámara de este barómetro 1 cm^3 de aire medido en las condiciones normales de temperatura y de presión, y sabiendo que el peso específico del aire en condiciones normales es 1,293 g/l. Se pide:

1. ¿Cuál será la densidad absoluta y relativa de la atmósfera que coronará la columna de mercurio?

2. ¿Cuál será la altura barométrica observada?

3. ¿Cuánto habrá que introducir el tubo barométrico en la cubeta para que la densidad del aire que contiene sea igual a la del aire exterior?

Solución

1) y 2) La columna barométrica quedará después de introducir el gas a una altura h y el volumen ocupado por el gas es:

$$V = (100 - h)\ \text{cm}^3$$

Considerando un punto exterior al tubo y otro interior de la superficie del mercurio en la cubeta, se ha de verificar:

$$76 = h + p \quad \Rightarrow \quad h = 76 - p$$

p = presión del gas.
Aplicando la ley de Boyle-Mariotte, nos queda:

$$76 = p(100 - h) = 100p - hp$$

sustituyendo h, nos queda:

$$76 = 100p - (76 - p)p \quad \Rightarrow \quad p^2 + 24p - 76 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 2{,}8 \text{ cm de Hg}$$

luego la altura barométrica observada será:

$$h = 76 - 2{,}8 = 73{,}2 \text{ cm}$$

el volumen que corona la columna barométrica es:

$$\boxed{V = 100 - h = 26{,}8\ \text{cm}^3}$$

con lo que:

$$\boxed{\rho = \rho_0\ \frac{p}{p_0} = 1{,}293\ \frac{2{,}8}{76} = 0{,}048 \text{ g/l}}$$

3) Para que el gas tenga la misma densidad ha de ocupar 1 cm^3, por lo que el tubo barométrico habrá que introducirlo hasta que quede al exterior 1 cm. Entonces el gas tendra la misma presión inicial (76 cm) y el mercurio exterior y el interior estarán al mismo nivel.

Capítulo XVII

HIDRODINAMICA Y AERODINAMICA

A) DINAMICA DE FLUIDOS EN REGIMEN DE BERNOUILLI. ENERGIA HIDRAULICA

FORMULARIO

LEY DE CONTINUIDAD:	$v_1A_2 = v_2A_2$
TEOREMA DE BERNOUILLI:	$p + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$
TEOREMA DE TORRICELLI:	$v = \sqrt{2gh}$
COEFICIENTE DE VELOCIDAD:	$v_r = kv = k\sqrt{2gh}$
GASTO TEÓRICO:	$G = Av = A\sqrt{2gh}$
GASTO PRÁCTICO:	$G = 0{,}61Av = 0{,}61A\sqrt{2gh}$
LEY DE GRAHAM Y BUNSEN:	$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$

Problema 1. **1.** Calcular en CV la potencia de un salto de agua cuyo caudal es 375 l/s y la altura 20 m.
2. ¿Cuál es el número de lámparas de 100 W que podrían ser alimentadas por el salto de agua, suponiendo que ha habido una pérdida de 30 % de la energía en

forma de calor, en las distintas transformaciones sufridas, así como en la conducción de la energía eléctrica?

3. Si el salto de agua mueve una turbina cuyo rendimiento es 0,4 (es decir, se aprovecha el 40 % de la energía del salto), la turbina, a su vez, mueve unas máquinas, siendo el nuevo rendimiento de la transformación 0,7. Calcular en kW · h la energía aprovechada en 8 h de trabajo.

Solución

1)

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Mgh}{t} = \frac{V\rho gh}{t} = G\rho gh \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 0{,}375\ \frac{1\,000}{9{,}8}\ 9{,}8 \times 20 = 7\,500 \text{ kgm/s} = 100 \text{ CV}}$$

2) La potencia teórica del salto en W es:

$$P = 7\,500 \times 9{,}8 \text{ W}$$

Como hay una pérdida de un 30 %, se aprovecha el 70 % de la potencia; o sea:

$$P_a = 7\,500 \times 9{,}8 \times 0{,}7 \text{ W}$$

El número de lámparas que se podrá alimentar es:

$$\boxed{n = \frac{7\,500 \times 9{,}8 \times 0{,}7}{100} = 514 \text{ lámparas}}$$

3) Como sólo se aprovecha un 0,4, la potencia disponible en la turbina es:

$$P = 7\,500 \times 9{,}8 \times 0{,}4 \text{ W}$$

En la nueva transformación sólo se aprovecha un 0,7; luego tendremos para potencia de las máquinas:

$$P = 7\,500 \times 9{,}8 \times 0{,}4 \times 0{,}7 \text{ W} = 7{,}5 \times 9{,}8 \times 0{,}4 \times 0{,}7 \text{ kW}$$

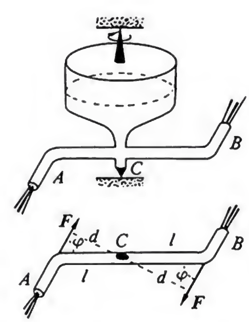
Lo que aprovechamos en 8 h es:

$$\boxed{W = 7{,}5 \times 9{,}8 \times 0{,}4 \times 0{,}7 \times 8 \text{ kW} \cdot \text{h} = 164{,}6 \text{ kW} \cdot \text{h}}$$

Problema 2. Sobre una gran placa horizontal cae verticalmente un chorro de agua a razón de 30 l/s y a una velocidad de 10 m/s. Calcular la fuerza que tendremos que hacer para sostener la placa, independientemente de su peso.

Solución

$$F dt = d(Mv) = v\rho dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = v\rho\ \frac{dV}{dt} = v\rho G = 10\ \frac{1\,000}{9{,}8}\ 30 \times 10^{-3} = 30 \text{ kp}}$$



Problema XVII-3

Problema 3. El «torniquete hidráulico» consiste en el aparato esquematizado en la figura, cuya sección horizontal también dibujamos. Calcular:

1. La fuerza reacción que lo mueve en función de la velocidad de salida del líquido (v), de su densidad (ρ) y del gasto (G).

2. Si el momento de inercia respecto al eje de giro del «torniquete» es I, ¿cuál es su aceleración angular si no existieran rozamientos?

Solución

1)

$$\boxed{F = \frac{\Delta(Mv)}{\Delta t} = v\rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = v\rho G}$$

2) El momento motor que actúa será:

$$N = I\alpha = 2Fd = 2v\rho Gl\operatorname{sen}\varphi \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2v\rho Gl\operatorname{sen}\varphi}{I}}$$

Problema 4. En una pared de un depósito lleno de un líquido hasta una altura de 9,8 m de fondo se abre un orificio circular de radio 1 cm en el punto medio de la altura. Calcular el gasto teórico y práctico y el alcance de la vena líquida hasta el nivel del fondo.

Solución

1) El gasto teórico es:

$$G = Av = A\sqrt{2gh} \left| \begin{array}{l} A = \pi r^2 = \pi \text{ cm}^2 \\ v = \sqrt{2 \times 980 \times 490} = 980 \text{ cm/s} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{G = 3{,}08 \text{ l/s}}$$

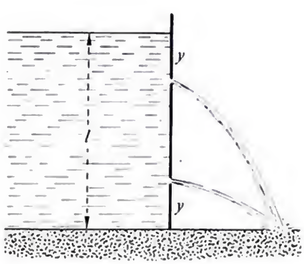
2) El gasto práctico será:

$$\boxed{G_p = 0{,}61\,G = 1{,}88 \text{ l/s}}$$

3)

$$\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}gt^2 \\ x = vt \end{array} \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 490}{980}} = 1 \text{ s} \\ \boxed{x = vt = 980 \text{ cm}} \end{array} \right.$$

Problema 5. Tenemos un recipiente de paredes verticales lleno de un líquido hasta una altura l. Demostrar que si abrimos un orificio a una distancia vertical de la superficie (y), la vena líquida tiene el mismo alcance que si lo abrimos a la misma distancia (y) del fondo.



Problema XVII-5

Solución

La velocidad de salida por el primer orificio es:

$$v_1 = \sqrt{2gy}$$

La velocidad de salida por el segundo orificio es:

$$v_2 = \sqrt{2g(l - y)}$$

El tiempo que tarda el líquido en el primer caso, al caer de la altura $(l - y)$, viene dado por:

$$l - y = \frac{1}{2}gt_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2(l - y)}{g}}$$

El tiempo de caída desde el segundo orificio de altura y es:

$$y = \frac{1}{2} g t_2^2 \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

El alcance de la primera vena líquida es:

$$x_1 = v_1 t_1 = \sqrt{2gy} \sqrt{\frac{2(l-y)}{g}} = 2\sqrt{y(l-y)}$$

El alcance de la segunda vena será:

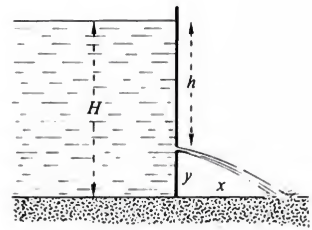
$$x_2 = v_2 t_2 = \sqrt{2g(l-y)} \sqrt{\frac{2y}{g}} = 2\sqrt{y(l-y)}$$

vemos que:

$$x_1 = x_2$$

con lo que queda demostrado el enunciado.

Problema 6. En un depósito de gran sección se practica un orificio a $y = 1$ m del suelo, como se indica en la figura. Colocamos en él un manómetro y nos indica una presión de 11,6 cm de Hg; quitamos el manómetro y dejamos salir el líquido, alcanzando una distancia de $x = 3$ m. Calcular:
1. La densidad del líquido.
2. Altura H sobre el suelo a que se encuentra el nivel del líquido.



Problema XVII-6

Solución

1)

$$\left. \begin{array}{l} v = \sqrt{2gh} \\ p = \rho g h \end{array} \right| \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \Rightarrow \rho = \frac{2p}{v^2}$$

$$p = 11{,}6 \times 13{,}6 \times 980 = 154\,604{,}8 \text{ b} = 15\,460{,}48 \text{ Pa}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = vt \\ y = \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right| \Rightarrow v^2 = x^2 \frac{g}{2y} = 300^2 \frac{980}{2 \times 100} = 441 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

luego:

$$\boxed{\rho = \frac{2 \times 154\,604{,}8}{441 \times 10^3} = 0{,}7 \text{ g/cm}^3}$$

2)

$$h = \frac{p}{\rho g} = \frac{15\,460{,}48}{700 \times 9{,}8} \text{ m} = 2{,}25 \text{ m} \Rightarrow \boxed{H = 3{,}25 \text{ m}}$$

Problema 7. El tubo de una central hidroeléctrica de montaña presenta un desnivel de 500 m y está totalmente lleno de agua. El agua sale en la central por un orificio de 10 cm de diámetro y acciona una turbina de rendimiento $\eta = 0{,}83$. Siendo el coeficiente de velocidad $k = 0{,}92$ y considerando la sección del tubo lo

suficientemente grande para que la velocidad del agua en su interior sea despreciable, calcular:

1. El gasto del tubo o, lo que es lo mismo, el caudal que tiene que tener el manantial que mantiene constantemente al tubo lleno de agua.
2. La potencia de la turbina.
3. La fuerza ejercida por el agua sobre la turbina.

Solución

1) La velocidad de salida es:

$$v = k\sqrt{2gh}$$

luego:

$$G = Av = \pi R^2 k\sqrt{2gh}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{G = \pi 5^2 \times 10^{-4} \times 0{,}92\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 500}\ \text{m}^3/\text{s} = 715{,}30\ \text{l/s}}$$

2)

$$P = \eta\frac{W}{t} = \eta\frac{\frac{1}{2}Mv^2}{t} = \eta\frac{\frac{1}{2}V\rho k^2 2gh}{t} = \eta\rho k^2 ghG$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{P = 0{,}83 \times 10^3 \times 0{,}92^2 \times 9{,}8 \times 500 \times 715{,}3 \times 10^{-3}\ \text{W} = 2\,462\ \text{kW}}$$

3)

$$F = \frac{\Delta(Mv)}{\Delta t} = \rho\frac{\Delta V}{\Delta t}v = \rho Gv = \rho Gk\sqrt{2gh}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{F = \frac{10^3}{9{,}8}715{,}3 \times 10^{-3} \times 0{,}92\sqrt{2 \times 9{,}8 \times 500}\ \text{kp} = 6{,}65 \times 10^3\ \text{kp}}$$

Problema 8. Comparar las velocidades de salida del oxígeno y el hidrógeno a través de una pared porosa de un recipiente cuando la sobrepresión que origina la salida del gas es la misma; estando sus densidades en la relación 1/16.

Solución

Aplicando la ley de Graham y Bunsen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_1}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \sqrt{16} = 4}$$

Problema 9. Colocamos un recipiente que contiene gas y tiene una masa total M sobre una superficie horizontal, y en una de sus paredes laterales le hacemos un orificio circular de sección A muy pequeño en comparación con el tamaño del recipiente. Si el coeficiente de rozamiento entre la superficie y el recipiente es μ. ¿Cuál debe de ser la diferencia de presión del gas respecto del exterior para que el recipiente comience a moverse?

Solución

La velocidad de salida del gas por el orificio será:

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

de la primera ecuación del movimiento:

$$F = \frac{\Delta(Mv)}{\Delta t} \Rightarrow F\Delta t = v\Delta M$$

la masa de gas ΔM expulsada en un tiempo Δt será:

$$\Delta M = \rho\Delta V = \rho A v \Delta t$$

luego:

$$F\Delta t = \rho A v^2 \Delta t \Rightarrow F = \rho A v^2 = 2A\Delta p$$

de esta forma el gas actúa sobre la pared con orificio con una fuerza de un valor $2A\Delta p$, menor que la fuerza con que el gas actúa sobre la pared opuesta, y no con $A\Delta p$, como parece a primera vista.

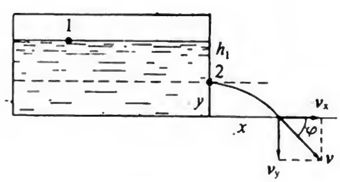
Para que el recipiente comience a moverse sobre la superficie tendrá que verificarse:

$$2A\Delta p > \mu M g \Rightarrow \boxed{\Delta p > \frac{\mu M g}{2A}}$$

Problema 10. Un depósito de gran sección cerrado contiene agua y sobre ella aire comprimido, ejerciendo una presión de 5 atm técnicas. A una distancia vertical de 2 m bajo la superficie libre del líquido hay practicado un orificio circular de 0,4 cm de diámetro situado a 1 m sobre el suelo. Si la presión atmosférica es de 1 atm técnica y el coeficiente de contracción de la vena líquida es 0,61. Calcular:

1. La velocidad de salida del agua.
2. El gasto teórico y práctico.
3. El alcance horizontal de la vena líquida.
4. La velocidad del líquido al llegar al suelo.
5. El ángulo que forma tal velocidad con la horizontal.

Solución



Problema XVII-10

1)

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2\left(\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g h_1\right)}$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2\left(\frac{40\,000 \times 9{,}8}{1\,000} + 9{,}8 \times 2\right)} = 28{,}7 \text{ m/s}}$$

2)

$$\boxed{G = Av = \pi 0{,}2^2 \times 2\,870 = 360{,}6 \text{ cm}^3\text{/s}}$$

$$\boxed{G_p = 0{,}61\,G = 0{,}61 \times 360{,}6 = 220 \text{ cm}^3\text{/s}}$$

3)

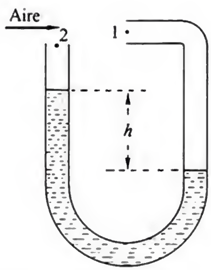
$$\left.\begin{aligned} x &= v_2 t \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}\right| \quad \boxed{\Rightarrow \quad x = v_2 \sqrt{\frac{2y}{g}} = 28{,}7 \sqrt{\frac{2 \times 1}{9{,}8}} = 13 \text{ m}}$$

4)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_2 \\ v_y &= \sqrt{2gh} \end{aligned}\right| \quad \boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_2^2 + 2gh} = \sqrt{28{,}7^2 + 2 \times 9{,}8} = 29 \text{ m/s}}$$

5)

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_2} = \frac{\sqrt{2 \times 9{,}8}}{28{,}7} \quad \boxed{\Rightarrow \quad \varphi = 8°46'}$$



Problema XVII-11

Problema 11. Calcular en km/h la velocidad de un avión provisto de un tubo de Pitot cuyo líquido manométrico es mercurio, siendo la diferencia de alturas entre los niveles de las dos ramas 49 mm. Suponemos que la densidad del aire es 0,001293 g/cm^3.

Solución

Un TUBO DE PITOT consiste en un tubo doblado como indica la figura, en el que se puede efectuar una medida de las distancias entre los niveles superiores de un líquido en sus dos ramas. La medida de la diferencia de presiones entre los puntos 1 y 2 está determinada por h. Aplicando el teorema de Bernouilli a dichos puntos:

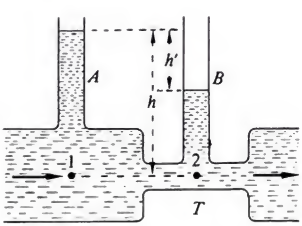
$$p_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho_a v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_a}}$$

y como:

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

obtenemos:

$$\boxed{v = \sqrt{2gh \frac{\rho}{\rho_a}} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 49 \times 10^{-3} \frac{13{,}6}{0{,}001293}} \text{ m/s} = 360 \text{ km/h}}$$



Problema XVII-12

Problema 12. Para saber la velocidad del agua en una tubería empalmamos en ella un tubo T de menor sección; colocamos tubos manométricos A y B, como indica la figura, y medimos la diferencia de altura (5 cm) entre los niveles superiores del líquido en tales tubos. Sabiendo que la sección de T es 10 veces menor que la de la tubería, calcular la velocidad del líquido en ésta.

Solución

Aplicando el teorema de Bernouilli a dos puntos situados en cada uno de los tubos y ambos a la misma altura, obtenemos:

$$\rho g h + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g(h - h') + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad \rho g h' = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

pero como según la «ley de continuidad»:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2} = 10 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 10 v_1$$

que junto con que $h' = 5$ cm, se obtiene:

$$5g = \frac{1}{2}(100 v_1^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} 99 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{9\,800}{99}} \simeq 10 \text{ cm/s}}$$

Problema 13. Por un tubo circula agua con un gasto de 500 l/s. Calcular la diferencia de presiones manométricas en dos puntos situados a una distancia vertical de 10 m, sabiendo que la sección del tubo en la parte más alta es doble que la correspondiente al punto más bajo (200 cm^2).

Solución

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow \Delta p = p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2) + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

teniendo en cuenta que:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{1}{2} v_2$$

$$G = v_2 A_2$$

sustituyendo, nos queda:

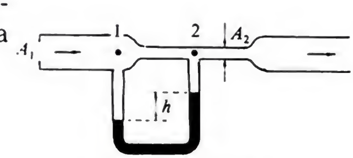
$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2) - \frac{3}{8} v_2^2 \rho = \rho \left[(h_1 - h_2) g - \frac{3}{8}\frac{G^2}{A_2^2}\right]$$

sustituyendo valores, nos queda:

$$\boxed{\Delta p = \frac{1\,000}{9{,}8}\left[10 \times 9{,}8 - \frac{3}{8}\frac{0{,}5^2}{200^2 \times 10^{-8}}\right] = -13{,}9 \times 10^3 \text{ kp/m}^2 = -1{,}39 \text{ kp/cm}^2}$$

La presión manométrica en el punto más bajo es menor que en el más alto.

Problema 14. El gasto en una tubería por la que circula agua es 208 l/s. En la tubería hay instalado un medidor de Venturi con mercurio como líquido manométrico. Siendo 800 y 400 cm^2 las secciones en la parte ancha y estrecha de la tubería, calcular el desnivel que se produce en el mercurio.



Problema XVII-14

Solución

Aplicando el teorema de Bernouilli a los puntos 1 y 2 de la figura, obtenemos:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

la «ley de continuidad» nos dice que:

$$v_1A_1 = v_2A_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

luego:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \frac{A_1^2}{A_2^2} v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}$$

multiplicando y dividiendo por A_1^2 y teniendo en cuenta que el gasto es:

$$G = A_1 v_1$$

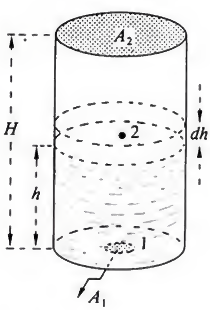
obtenemos:

$$\Delta p = h(\rho_{Hg} - \rho) g = \frac{\rho G^2 (A_1^2 - A_2^2)}{2A_1^2 A_2^2} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{\rho G^2 (A_1^2 - A_2^2)}{2A_1^2 A_2^2 (\rho_{Hg} - \rho) g} = \frac{208^2 \times 10^6 (800^2 - 400^2)}{2 \times 800^2 \times 400^2 (13{,}6 - 1) 980} = 8{,}2 \text{ cm}}$$

Problema 15. Destapamos un orificio de radio R_1 que se encuentra en el fondo de un depósito cilíndrico lleno de agua que tiene de radio $R_2 \gg R_1$ y de altura H. Si el proceso de vaciado obedece al régimen de Bernouilli, y por tanto prescindimos de la viscosidad, encontrar una fórmula que nos dé el tiempo que tarda el depósito en quedarse sin agua.

Solución



Problema XVII-15

En un momento en que el nivel se encuentra a una altura h, si $R_2 \gg R_1$, la velocidad de salida del agua por el orificio será:

$$v = \sqrt{2gh}$$

y el gasto:

$$G = A_1 v = A_1 \sqrt{2gh} = \frac{dV}{dt} = -A_2 \frac{dh}{dt}$$

luego:

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{2g}\, dt \quad \Rightarrow \quad -\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{2g} \int_0^t dt \quad \Rightarrow$$

$$2\sqrt{H} = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{2g}\, t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \sqrt{\frac{2H}{g}}}$$

Problema 16. Destapamos un orificio de radio R_1 que se encuentra en el fondo de un depósito cilíndrico lleno de agua que tiene de radio R_2 y de altura H (considerar la sección del orificio y no tomar como nula la velocidad de la superficie libre). Si el proceso de vaciado obedece al régimen de Bernouilli, y por tanto prescindimos de la viscosidad, encontrar una fórmula que nos dé el tiempo que tarda el depósito en quedarse sin agua.

Solución

Aplicando el teorema de Bernouilli entre los puntos 1 y 2 (ver figura problema anterior), cuando el nivel se encuentra a una altura h obtenemos:

$$\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\right) - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2\right) = \rho g h$$

p_1 y p_2 son las presiones atmosféricas en los puntos 1 y 2, prácticamente iguales; por tanto:

$$\frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = \rho g h \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) = gh$$

y como:

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = -\dfrac{dh}{dt} \\[2ex] G = v_1 A_1 = v_2 A_2 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{A_2}{A_1}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$v_1^2 - v_2^2 = \left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right)\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

luego:

$$\frac{1}{2}\,\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_1^2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = gh$$

operando y tomando el signo menos al extraer la raíz cuadrada:

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} = A_1\sqrt{\frac{2g}{A_2^2 - A_1^2}}\,dt \quad \Rightarrow \quad -\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = A_1\sqrt{\frac{2g}{A_2^2 - A_1^2}}\int_0^t dt \quad \Rightarrow$$

$$2\sqrt{H} = A_1\sqrt{\frac{2g}{A_2^2 - A_1^2}}\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{A_1}\sqrt{\frac{2(A_2^2 - A_1^2)H}{g}}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{R_1^2}\sqrt{\frac{2(R_2^4 - R_1^4)H}{g}}}$$

B) FLUIDOS REALES. VISCOSIDAD

FORMULARIO

ECUACIÓN DE BERNOUILLI PARA FLUIDOS REALES:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

LEY DE NAVIER:

$$F = \eta A\,\frac{\Delta v}{\Delta e}$$

LEY DE POISEUILLE:

$$G = \frac{\pi r^4}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l}$$

VELOCIDAD CARACTERÍSTICA:

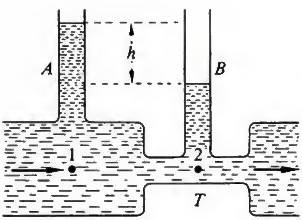
$$v_0 = \frac{\eta}{\rho r}$$

NÚMERO DE REYNOLDS:

$$R = \frac{v_{\text{crítica}}}{v_{\text{característica}}}$$

LEY DE STOKES:

$$F = 6\pi r \eta v$$



Problema XVII-17

Problema 17. En una tubería por la que circula agua empalmamos un tubo T de menor sección, colocando tubos manométricos A y B como se indica en la figura, y medimos la diferencia de alturas (8 cm) entre los niveles superiores del líquido en tales tubos. Sabiendo que la velocidad aumenta de 10 cm/s hasta 100 cm/s, calcular la pérdida de carga.

Solución

La ecuación de Bernouilli para fluidos visosos es:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_f$$

en nuestro caso $h_1 = h_2$; luego:

$$h_f = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}$$

pero como:

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

nos queda:

$$\boxed{h_f = h + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = 8 + \frac{10^2 - 10^4}{2 \times 980} = 3 \text{ cm}}$$

Problema 18. Por un tubo cilíndrico de 50 cm de longitud y 2 mm de diámetro interior circula agua; si la diferencia de presión a lo largo del tubo es de 10 cm de Hg y la viscosidad del agua es 1 cP, calcúlese la cantidad de agua que fluye por el tubo en 1 min.

Solución

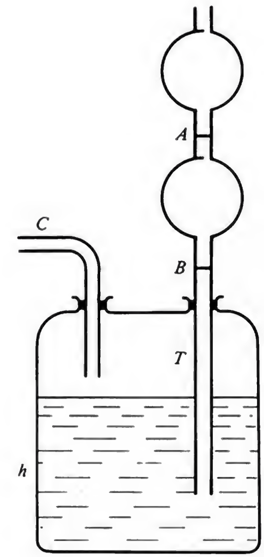
Aplicando la ley de Poiseuille:

$$G = \frac{\pi R^4}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l} = \frac{\pi \times 10^{-4}}{8 \times 0{,}01}\,\frac{10 \times 13{,}6 \times 980}{50} = 10{,}5\ \text{cm}^3/\text{s}$$

luego:

$$\boxed{M = 10{,}5 \times 60 = 630\ \text{g}}$$

Problema 19. El tiempo de derrame del agua en un viscosímetro es 10 s. El de un líquido, en el mismo viscosímetro, es de 2 h, 54 min y 18 s. Calcular la viscosidad del líquido con relación al agua y su viscosidad absoluta. (ρ del líquido = 1,26 g/cm^3; η del agua = 0,01 P.)



Problema XVII-19

Solución

El viscosímetro consiste en un tubo capilar T en el que le han soldado dos bolas de vidrio (figura), unidas entre sí por otro tubo. Este conjunto se instala en un frasco de dos bocas, como se indica en la figura.

En el frasco se pone el líquido cuya viscosidad se trata de determinar, hasta una cierta altura (h). Soplando por C se llena el depósito descrito hasta el ensanchamiento superior, y se deja después caer libremente al líquido, contando el tiempo (t) que tarda en pasar su superficie libre desde el enrase A al B.

La operación se repite con agua destilada, midiendo el tiempo (t').

Los gastos de salida del líquido y del agua vendrán expresados por:

$$G = Av = \frac{\pi R^4}{8\eta}\,\frac{\Delta p}{l} \qquad G' = Av' = \frac{\pi R^4}{8\eta'}\,\frac{\Delta p'}{l}$$

Por división se obtiene:

$$\frac{v}{v'} = \frac{\Delta p}{\Delta p'}\,\frac{\eta'}{\eta}$$

Pero las sobrepresiones, para las mismas alturas en cada punto del capilar, son directamente proporcionales a las densidades de los líquidos:

$$\frac{\Delta p}{\Delta p'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

y las velocidades de salida para el mismo volumen de líquido son inversamente proporcionales a los tiempos empleados:

$$\frac{v}{v'} = \frac{t'}{t}$$

Por sustitución, llegamos a:

$$\frac{t'}{t} = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\eta'}{\eta} \quad \Rightarrow \quad \left|\; \begin{array}{l} \boxed{\dfrac{\eta}{\eta'} = \dfrac{\rho}{\rho'}\,\dfrac{t}{t'} = \dfrac{1{,}26}{1}\,\dfrac{10\,458}{10} = 1\,317{,}7} \\[2ex] \boxed{\eta = \eta'\,1\,317{,}7 = 0{,}01 \times 1\,317{,}7 = 13{,}177\ \text{P}} \end{array}\right.$$

Problema 20. En un tubo de vidrio horizontal hemos colocado un cristalito de permanganato potásico y hacemos circular agua por el tubo. Observamos el régimen laminar al distinguir unos filetes violetas que se forman a partir del cristal.

Aumentando la velocidad de paso del agua por el tubo (haciendo que, simplemente, el líquido descienda de una mayor altura), se observa la formación de torbellinos. Calcular la velocidad con que en tal instante discurre el agua por el tubo ($\eta = 0{,}01$ P; $\rho = 1$ g/cm^3; $r = 0{,}5$ cm).

Solución

$$V_c = R \frac{\eta}{\rho r}$$

R = módulo de Reynolds $\simeq 1\,200$

$$\boxed{V_c = 1\,200 \frac{0{,}01}{1 \times 0{,}5} = 24 \text{ cm/s}}$$

Problema 21. Por una tubería de 1,3 cm de radio circula petróleo de densidad 0,85 g/cm^3 y 11,4 cP de coeficiente de viscosidad, a una velocidad de 1 m/s. Determínese el régimen por el que circula el petróleo.

Solución

Con estos datos el módulo de Reynolds toma el valor:

$$R = \frac{\rho r v}{\eta} = \frac{0{,}85 \times 1{,}3 \times 100}{0{,}114} = 969{,}3$$

como resulta ser menor que 1 200: $\boxed{\text{el régimen es laminar.}}$

Problema 22. Determinar el radio de una tubería de 3 m de longitud con una depresión de 500 b entre sus extremos, para que circule agua con la velocidad crítica. Coeficiente de viscosidad del agua: 1 cP.

Solución

Para que circule agua por la tubería a la velocidad crítica el módulo de Reynolds deberá ser 1 200; luego:

$$v_c = R \frac{\eta}{\rho r}$$

Aplicando la ley de Poiseuille:

$$G = A v_c = \pi r^2 R \frac{\eta}{\rho r} = \frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{8 R \eta^2 l}{\rho \Delta p}} = \sqrt[3]{\frac{8 \times 1\,200 \times 10^{-4} \times 300}{500}} = 0{,}8 \text{ cm}}$$

Problema 23. Calcular la máxima velocidad que adquiere una gota de mercurio de 1 mm de radio en el seno de glicerina. (Masas específicas del mercurio y la glicerina, 13,6 y 1,26 g/cm^3; viscosidad de la glicerina, 8,3 P.)

Solución

La resistencia al movimiento de cuerpos esféricos en fluidos viscosos viene dada por la ley de Stokes:

$$R = 6\pi r \eta v$$

la fuerza que hace caer a un cuerpo esférico dentro del líquido es su peso menos el empuje:

$$F = P - E = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g$$

ρ y ρ_0 son las densidades del mercurio y glicerina, respectivamente. Tal fuerza provoca un movimiento de caída acelerado; al aumentar la velocidad aumenta la fuerza de resistencia R; cuando ambas se igualan la gota de mercurio se mueve con velocidad constante, cuyo valor obtendremos:

$$6\pi r\eta v = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g \quad \Rightarrow \quad v = \frac{2}{9}\,\frac{r^2(\rho - \rho_0)g}{\eta}$$

Sustituyendo valores:

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{10^{-2}(13{,}6 - 1{,}26)980}{8{,}3} = 3{,}2 \text{ cm/s}$$

Problema 24. Calcular la máxima velocidad que adquiere una burbuja de aire de 1 mm de radio en el seno de glicerina y de agua. (Masa específica del aire = 0,001293 g/cm^3. Tomar los demás datos de los problemas anteriores.)

Solución

$$v = \frac{2}{9}\,\frac{r^2(\rho - \rho_0)g}{\eta}$$

1) Para la glicerina (despreciando 0,001293 frente a 1,26):

$r = 0{,}1$ cm
$\rho = 0{,}001293$ g/cm^3
$\rho_0 = 1{,}26$ g/cm^3
$\eta = 8{,}3$ P

$$\boxed{v = \frac{2}{9}\,\frac{0{,}01(-1{,}26)980}{8{,}3} = -\,0{,}3 \text{ cm/s}}$$

El signo negativo indica que la burbuja no cae, sino que asciende.

2) Para el agua (despreciando 0,001293 frente a 1):

$r = 0{,}1$ cm
$\rho = 0{,}001293$ g/cm^3
$\rho_0 = 1$ g/cm^3
$\eta = 0{,}01$ P

$$\boxed{v = \frac{2}{9}\,\frac{0{,}01(-1)980}{0{,}01} = -\,218 \text{ cm/s}}$$

El signo negativo indica que la burbuja asciende.

Capítulo XVIII

MOVIMIENTOS ONDULATORIOS EN MEDIOS ELASTICOS

A) VELOCIDAD DE PROPAGACION DE LAS ONDAS. ECUACION DE LA ONDA. INTENSIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO

FORMULARIO

LONGITUD DE ONDA:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

VELOCIDAD DE UNA ONDA TRANSVERSAL EN UNA CUERDA O ALAMBRE:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

VELOCIDAD DE UNA ONDA LONGITUDINAL EN LÍQUIDOS:

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

VELOCIDAD DE UNA ONDA LONGITUDINAL EN VARILLAS SÓLIDAS:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

VELOCIDAD DE UNA ONDA LONGITUDINAL EN GASES:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

ECUACIÓN DE LA ONDA SINUSOIDAL:

$$\psi(x,\ t) = \psi_0 \text{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T} \right) = \psi_0 \text{sen} (kx \pm \omega t) =$$

$$= \psi_0 \text{sen} k(x \pm ct) = \psi_0 \text{sen} 2\pi\nu \left(\frac{x}{c} \pm t \right)$$

Si en el origen ($x = 0$, $t = 0$) se verifica que $\psi \neq 0$, entonces en la ecuación de la onda habrá que incluir la diferencia de fase φ y toma la forma:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi)$$

ECUACIÓN DE ONDA:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

ENERGÍA DE UNA PARTÍCULA QUE VIBRA AL LLEGAR A ELLA UNA ONDA:

$$W = \frac{1}{2} m\psi_0^2\omega^2 = 2m\psi_0^2\pi^2\nu^2$$

INTENSIDAD DEL MOVIMIENTO ONDULATORIO:

$$I = \frac{1}{A}\frac{dW}{dt} = \frac{P_m}{A} = \frac{1}{2}\psi_0^2\omega^2 c\rho$$

VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD Y AMPLITUD CON LA DISTANCIA AL FOCO EMISOR:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\psi_{01}^2}{\psi_{02}^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Problema 1. Calcular la velocidad de propagación de las ondas transversales en un alambre de 2 m de largo que pesa 7 g cuando en uno de sus extremos se le cuelga una pesa de 2 kg.

Solución

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \left| \begin{array}{l} F = 2 \times 9{,}8 \times 10^5 \text{ dyn} \\ \mu = \dfrac{M}{l} = \dfrac{7}{200} \text{ g/cm} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{c = 74{,}8 \text{ m/s}}$$

Problema 2. Determinar la velocidad del sonido en el agua (ondas longitudinales), sabiendo que actuando 1 atm de presión sobre un volumen de agua disminuye su volumen en 50 millonésimas del que tenía.

Solución

$$\left. \begin{array}{l} p = 76 \times 13{,}6 \times 980 = 1\,012\,928 \text{ b} \\ \dfrac{\Delta V}{V} = \dfrac{50}{10^6} = 5 \times 10^{-5} \\ \rho = 1 \text{ g/cm}^3 \end{array} \right| \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{B} p \Rightarrow B = \frac{pV}{\Delta V} = \frac{1\,012\,928}{5 \times 10^{-5}} \text{ dyn/cm}^2$$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{1\,012\,928}{5 \times 10^{-5}}} \text{ cm/s} = 1\,423 \text{ m/s}}$$

Problema 3. Un rollo de alambre de cobre de 1 kg de peso en el aire pesa en el seno del agua 886 g. De tal alambre tomemos 1 m y 224 mm y hacemos pender un peso de 10 kg, observando un alargamiento de 1 mm. El alambre tiene de sección 1 mm^2. Calcular la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el cobre.

Solución

$$\Delta l = \frac{1}{E}\,\frac{Pl}{S} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Pl}{S\Delta l}$$

$$\left.\begin{array}{lcl} P & = & 10 \text{ kp} = 10^4 \times 980 \text{ dyn} \\ l & = & 1{,}224 \text{ m} = 122{,}4 \text{ cm} \\ S & = & 1 \text{ mm}^2 = 10^{-2} \text{ cm}^2 \\ \Delta l & = & 1 \text{ mm} = 10^{-1} \text{ cm} \end{array}\right| \quad E = \frac{980 \times 10^4 \times 122{,}4}{10^{-2} \times 10^{-1}} = 12 \times 10^{11} \text{ dyn/cm}^2$$

El empuje sufrido por el kg de alambre al ser introducido en agua es:

$$1\,000 - 886 = 114 \text{ g-f} \quad \Rightarrow \quad \text{volumen} = 114 \text{ cm}^3$$

La masa específica del cobre es:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1\,000}{114} = 8{,}8 \text{ g/cm}^3$$

La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en el cobre es:

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{12 \times 10^{11}}{8{,}8}} \text{ cm/s} = 3\,700 \text{ m/s}}$$

Problema 4. Calcular la velocidad de propagación de una onda longitudinal de compresión (sonora) en el helio a 0° C y 1 atm de presión si su densidad en estas condiciones es $0{,}179 \times 10^{-3}$ g/cm^3 y, por ser monoatómico, el coeficiente de las adiabáticas es $\gamma = 5/3$.

Solución

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{5 \times 76 \times 13{,}6 \times 980}{3 \times 0{,}179 \times 10^{-3}}} \text{ cm/s} = 971 \text{ m/s}$$

Problema 5. La velocidad de las ondas superficiales en el agua, siempre que la longitud de onda sea menor que la profundidad, es:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}}$$

Sabemos que si > 10 cm, el término $2\pi\sigma/\lambda\rho$ es despreciable, y que si $\lambda < 10$ cm, entonces el término despreciable es $g\lambda/2\pi$. Datos: $\rho = 1$ g/cm^3, $\sigma = 75$ dyn/cm.
1. Calcular la velocidad de unas ondas superficiales en el agua, de las que a simple vista se observa que su longitud de onda es bastante mayor de 10 cm y que un trozo de madera que flota en la superficie realiza 120 oscilaciones completas en un minuto.

2. Tomamos una fotografía de las aguas «rizadas» de un lago y observamos en ella que entre dos puntos a distancia real de 1 m hay 20 «rizos» completos. Calcular la velocidad de propagación de tales rizos.
3. Demostrar que la mínima velocidad de las ondas superficiales del agua, cuando λ es próximo a 10 cm, tiene por valor 23 cm/s.

Solución

1)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} > 10 \text{ cm} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{gc}{2\pi\nu}} \Rightarrow c = \frac{g}{2\pi\nu}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{c = \frac{980}{2\pi 2} = 78 \text{ cm/s}}$$

2) Como:

$$\lambda = \frac{100}{20} = 5 \text{ cm} < 10 \text{ cm}$$

entonces:

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} = \sqrt{\frac{2\pi 75}{5}} = 9{,}7 \text{ cm/s}}$$

3) De la expresión:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}} \Rightarrow c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} \Rightarrow 2c\,\frac{dc}{d\lambda} = \frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi\sigma}{\lambda^2\rho}$$

en el mínimo:

$$\frac{dc}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{g}{2\pi} = \frac{2\pi\sigma}{\lambda^2\rho} \Rightarrow \lambda^2 = \frac{4\pi^2\sigma}{\rho g} \Rightarrow \lambda = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{g\rho}}$$

(adoptando la solución positiva por la imposibilidad de $\lambda < 0$). Sustituyendo:

$$c^2 = 2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho}}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$\boxed{c = \sqrt{2\sqrt{980 \times 75}} \simeq 23 \text{ cm/s}}$$

Se puede comprobar, por la segunda derivada de c con respecto a λ, que la expresión obtenida corresponde a un mínimo.

Problema 6. El oído humano percibe sonidos cuyas frecuencias están comprendidas entre 20 y 20 000 Hz. Siendo la velocidad de propagación del sonido en el aire 330 m/s (a 0° de temperatura), calcular las longitudes de onda de los sonidos extremos.

Solución

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{330}{20} = 16{,}50 \text{ m} \\[2ex] \lambda_2 = \dfrac{330}{20\,000} = 16{,}50 \times 10^{-4} \text{ m} \end{array} \right.$$

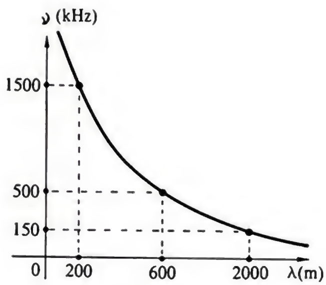
Problema 7. Las ondas emitidas por las emisoras de radio se propagan en el vacío a la velocidad de la luz.

1. Las llamadas «ondas largas» tienen una longitud de onda de 600 a 2 000 m. Calcular las frecuencias extremas en kHz.

2. Las «ondas normales» son emitidas con frecuencias comprendidas entre 500 y 1 500 kHz. Calcular la longitud de onda correspondiente a esta última frecuencia.

3. Las «ondas cortas» tienen una longitud de 10 m. Representar gráficamente las variaciones de la frecuencia con la longitud de onda.

Solución



Problema XVIII-7

1)

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{3 \times 10^8}{600} = 5 \times 10^5 \text{ Hz} = 500 \text{ kHz}$$

$$\nu_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3 \times 10^8}{2\,000} = 1{,}5 \times 10^5 \text{ Hz} = 150 \text{ kHz}$$

2)

$$\lambda_3 = \frac{c}{\nu_3} = \frac{3 \times 10^8}{1\,500 \times 10^3} = 200 \text{ m}$$

3)

$$\nu_4 = \frac{c}{\lambda_4} = \frac{3 \times 10^8}{10} = 3 \times 10^7 \text{ Hz} = 3 \times 10^4 \text{ kHz} = 30 \text{ MHz}$$

La curva será una hipérbola equilátera, puesto que:

$$\lambda\nu = c = \text{ct}^{\text{e}}$$

Problema 8. La velocidad de propagación de una onda es de 330 m/s, y su frecuencia, 10^3 Hz. Calcúlese:

1. La corrección de fase para dos posiciones de una misma partícula que se presentan en intervalos de tiempo separados 5×10^{-4} s.

2. La diferencia de fase en un determinado instante entre dos partículas que distan entre sí 2,75 cm.

3. La distancia que existe entre dos partículas que se encuentran desfasadas 120°.

Solución

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{330 \times 10^2}{10^3} = 33 \text{ cm}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 10^{-3} \text{ s}$$

1) Si a un período T le corresponde una corrección de fase 2π
a Δt le corresponde una corrección de fase $\Delta\varphi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta t}{T} = \frac{2\pi 5 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = \pi \text{ rad}}$

2)

λ 2π
Δx .... $\Delta\varphi$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi 2{,}75}{33} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}}$

3)

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{33 \times 2\pi}{3 \times 2\pi} = 11 \text{ cm}}$$

Problema 9. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a vibraciones sinusoidales de 10 Hz. La mínima distancia entre dos puntos cuyas vibraciones tienen una diferencia de fase de $\pi/5$ es de 20 cm. Calcular:
1. La longitud de onda.
2. La velocidad de propagación.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \;\dots\dots\dots\dots\; \lambda \\ \dfrac{\pi}{5} \;\dots\dots\dots\dots\; 20 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lambda = 200 \text{ cm}}$$

2)

$$\boxed{c = \lambda\nu = 200 \times 10 \text{ cm/s} = 20 \text{ m/s}}$$

Problema 10. Determinar la ecuación de una onda que se propaga en el sentido negativo del eje OX con una velocidad de 900 m/s, siendo de 400 Hz su frecuencia y 0,02 m su amplitud. Además, sabemos que para $x = 0$ y $t = 0$, entonces $\psi = 0{,}02$ m.

Solución

La ecuación general para esta onda es:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t + \varphi)$$

como para $t = 0$ y $x = 0$ se hace $\psi = \psi_0$:

$$\operatorname{sen}\varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

luego:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sen}\left(kx + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \psi_0 \cos(kx + \omega t) = \psi_0 \cos 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)$$

y como:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{900}{400} = 2{,}25 \text{ m}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{400} \text{ s}$$

nos queda la ecuación de la onda expresada en el SI:

$$\boxed{\psi(xt) = 0{,}02 \cos 2\pi \left(\frac{x}{2{,}25} + 400t\right)}$$

Problema 11. Una onda tiene por ecuación: $\psi(x, t) = 5 \operatorname{sen}\pi(4x - 20t + 0{,}25)$, expresada en el sistema CGS. Determinar la amplitud, la frecuencia, la longitud de onda, el número de ondas, la frecuencia angular, la diferencia de fase y la velocidad de propagación.

Solución

La ecuación general de la onda es:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) = \psi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \frac{\varphi}{2\pi}\right)$$

que comparada con la dada:

$$\psi(x, t) = 5 \operatorname{sen} \left(4\pi x - 20\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 5 \operatorname{sen} 2\pi \left(2x - 10t + \frac{1}{8}\right)$$

resulta:

$$\psi_0 = 5 \text{ cm}$$

$$T = \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T} = 10 \text{ Hz} \qquad \omega = 20\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \text{ cm} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$k = 4\pi \text{ cm}^{-1} \qquad c = \lambda\nu = \frac{1}{2} 10 = 5 \text{ cm/s}$$

Problema 12. En un alambre largo de densidad lineal 3×10^{-2} kg/m mantenido a una tensión de 3 kp provocamos una onda transversal de 0,5 cm de amplitud y 150 Hz de frecuencia. Suponiendo que la onda se mueve en el sentido positivo del eje OX y en el origen $(x = 0,\ t = 0)$ es $\psi = 0{,}25$ cm, calcular:

1. La ecuación de la onda.

2. Encontrar las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración de una partícula del alambre que esté situada a 1 m del origen.

Solución

1)

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \times 9{,}8}{3 \times 10^{-2}}} = 31{,}3 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{31{,}3}{150} = 0{,}2 \text{ m} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = 10\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 300\,\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \psi = 0{,}25 \Rightarrow 0{,}25 = 0{,}5 \operatorname{sen}\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

luego la ecuación de la onda escrita en el SI será:

$$\boxed{\psi = 5 \times 10^{-3} \operatorname{sen}\pi \left(10x - 300t + \frac{1}{6}\right)}$$

2) Señalamos que en la ecuación:

$$\psi = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) = \psi_0 \operatorname{sen} k \left(x - ct + \frac{\varphi}{k}\right)$$

c es la velocidad horizontal constante del tren de ondas, y lo que vamos a calcular es la v de una partícula del alambre que se mueve verticalmente con movimiento vibratorio armónico; su valor será:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\psi_0 \omega \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

sustituyendo valores, nos queda:

$$\boxed{v = -5 \times 10^{-3}\, 300\pi \cos\pi \left(10 - 300t + \frac{1}{6}\right) = -1{,}5\pi \operatorname{sen}\pi \left(\frac{61}{6} - 300t\right)}$$

La aceleración de la partícula será:

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\psi_0\omega^2 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi) = -\omega^2\psi$$

para los valores dados:

$$\boxed{a = -5 \times 10^{-3} \times 300^2\pi^2 \operatorname{sen}\pi \left(10 - 300t + \frac{1}{6}\right) = -450\pi^2 \operatorname{sen}\pi \left(\frac{61}{6} - 300t\right)}$$

Problema 13. Sometemos al extremo de una cuerda a un vibrador que le produce una onda sinusoidal. Si la ecuación de la vibración escrita en el sistema CGS es: $\psi = 5\operatorname{sen} 0{,}2\pi t$, propagándose en la cuerda con una velocidad de 10 cm/s. Determínese la ecuación de la onda producida.

Solución

La ecuación general de la onda que se propaga en la dirección negativa del eje OX es:

$$\psi(xt) = \psi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \psi(0, t) = \psi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi\right)$$

comparada con la dada:

$$\psi(0, t) = 5\operatorname{sen} 0{,}2\pi t$$

se deduce:

$$\psi_0 = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 0{,}2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 10 \text{ s}$$

$$\varphi = 0$$

además, como:

$$\lambda = cT \quad \Rightarrow \quad \lambda = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}$$

y la ecuación de la onda será:

$$\boxed{\psi(x, t) = 5\operatorname{sen} 2\pi \left[\frac{x}{100} + \frac{t}{10}\right]}$$

Problema 14. Sometemos al extremo de una cuerda tensa a un vibrador que le produce vibraciones sinusoidales. Por este efecto se propaga por la cuerda una onda transversal que tiene por ecuación: $\psi(xt) = 10\operatorname{sen}\pi(1{,}6x - 0{,}8t)$, expresada en el sistema CGS.

1. ¿Qué condiciones iniciales nos determinan esta ecuación de onda?

2. Determínese para esta onda su amplitud, velocidad de propagación y longitud de onda.

3. Tiempo que tarda en comenzar a vibrar una partícula de la cuerda situada a 10 cm del extremo en que se encuentra el vibrador y ecuaciones horarias del movimiento de ella [$\psi(t)$, $v(t)$, $a(t)$], una vez transcurrido éste.
4. Dibujar la forma que tiene la cuerda [$\psi(x)$] cuando han transcurrido 5,625 s del comienzo de la vibración.

Solución

1) La ecuación dada nos determina que en el extremo de la cuerda en que se encuentra el vibrador $x = 0$ y para $t = 0$ es cuando comienza a actuar el vibrador con movimiento vibratorio armónico dirigido hacia abajo (en el sentido negativo del eje $O\psi$). La onda se propaga en la dirección positiva del eje OX.

2) Como la ecuación general de una onda sin diferencia de fase ($\varphi = 0$) es:

$$\psi(x, t) = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) = \psi_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

comparándola con la dada:

$$\psi(x, t) = 10 \operatorname{sen}(1{,}6\pi x - 0{,}8\pi t) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(0{,}8x - 0{,}4t)$$

resulta:

$$\psi_0 = 10 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25 \text{ cm}$$

$$T = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{T} = 0{,}4 \text{ Hz}$$

$$c = \lambda\nu = 1{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}5 \text{ cm/s}$$

3) La partícula comenzará a vibrar transcurrido un tiempo t, tal que:

$$x = ct \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{c} = \frac{10}{0{,}5} = 20 \text{ s}$$

Pasado éste, la partícula comienza a vibrar con movimiento vibratorio armónico de ecuación:

$$x = 10 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

luego:

$$v(t) = \frac{d\psi}{dt} = -\, 8\pi \cos 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\, 6{,}4\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi(8 - 0{,}4t)$$

Obsérvese que el origen de «elongaciones» para este movimiento vibratorio armónico se encuentra a 20 s del comienzo de la actuación del vibrador. El signo menos de la velocidad nos indica que comienza a moverse hacia abajo (sentido negativo del eje $O\psi$), y, por tanto, la partícula se encuentra en fase con el vibrador. (El tiempo 20 s = $8T$ nos indica que han transcurrido 8 períodos y, por tanto, la partícula se encuentra a 8λ = 10 cm de distancia del origen, y la forma de la cuerda hasta esa partícula será con 8 «bucles» hacia abajo del eje $O\psi$ y otros tantos hacia arriba).

4)

$$t = 5{,}625 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = 10 \operatorname{sen} 2\pi(0{,}8x - 2{,}25)$$

Cortes con eje $O\psi$:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) = -\ 10 \operatorname{sen} 4{,}5\pi = -\ 10 \text{ cm}$$

lo que nos indica que el vibrador se encuentra en su máxima elongación (amplitud) y por debajo del origen.

Cortes con eje OX:

El trozo de cuerda que se ha puesto en movimiento en ese tiempo será:

$$x = ct = 0{,}5 \times 5{,}625 = 2{,}8125 \text{ cm}$$

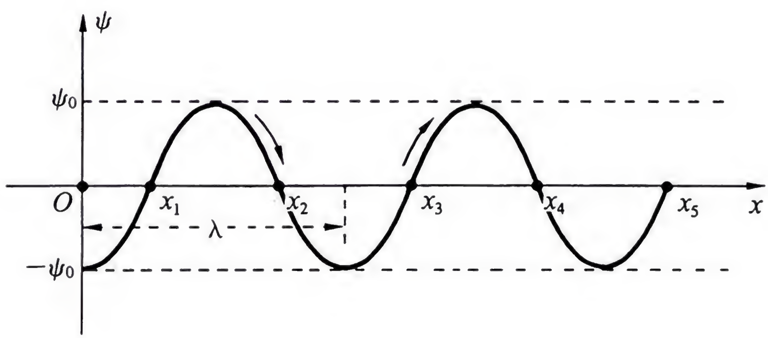
lo que quiere decir es que a partir de esta distancia la cuerda se encuentra en reposo. Luego:

$$\psi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi(0{,}8x - 2{,}25) = K\pi \quad (K \in Z) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{K + 4{,}5}{1{,}6}$$

con lo que:

$$K = -\ 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}3125 \text{ cm}$$
$$K = -\ 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}9375 \text{ cm}$$
$$K = -\ 2 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1{,}5625 \text{ cm}$$
$$K = -\ 1 \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2{,}1875 \text{ cm}$$
$$K = \ \ 0 \quad \Rightarrow \quad x_5 = 2{,}8125 \text{ cm}$$

La gráfica (forma de la cuerda en ese instante) será:



Problema XVIII-14

Obsérvese que: $t = 5{,}625 \text{ s} = 2T + \frac{T}{4}$; y que: $x = 2{,}8125 \text{ cm} = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$.

Problema 15. Demostrar que la ecuación de una onda sinusoidal cumple con la ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Solución

Si en la ecuación

$$\psi(x, t) = \psi_0 \operatorname{sen} k(x - ct)$$

calculamos las derivadas parciales respecto de x y t; se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = k\psi_0 \cos k(x - ct) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -kc\psi_0 \cos k(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -k^2\psi_0 \operatorname{sen} k(x - ct) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -k^2c^2\psi_0 \operatorname{sen}(x - ct)$$

por tanto:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

de acuerdo con lo que queríamos demostrar.

Problema 16. Calcular la energía que posee una molécula de agua (masa molecular del agua: 18,015 g. Número de Avogadro: $6{,}023 \times 10^{23}$) cuando a ella llega una onda de 10^3 Hz y vibra con una amplitud de 0,01 mm.

Solución

La masa de una molécula de agua será:

$$m = \frac{M}{N} = \frac{18{,}015}{6{,}023} 10^{-23} = 2{,}991 \times 10^{-23} \text{ g}$$

luego su energía será:

$$W = \frac{1}{2} mA^2\omega^2 = \frac{1}{2} mA^2 4\pi^2\nu^2 = 2mA^2\pi^2\nu^2$$

$$\boxed{W = 2 \times 2{,}991 \times 10^{-26}\, 10^{-10}\pi^2 10^6 = 5{,}904 \times 10^{-29} \text{ J}}$$

Problema 17. Una onda esférica que se transmite en un medio homogéneo e isotropo está emitida por una fuente de 5 W. Calcular la intensidad de la onda a 3 m del foco emisor.

Solución

La energía que por unidad de tiempo atraviesa una esfera de centro el foco emisor y de cualquier radio conserva su valor y es la misma que posee la fuente:

$$P = SI = 4\pi r^2 I = 4\pi r'^2 I' = \ldots$$

Luego:

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{5}{4\pi 9} = 44 \times 10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}}$$

Problema 18. Una onda sonora se propaga en el aire a 340 m/s, tiene una frecuencia de 10^3 Hz y su intensidad es de 10^{-4} W/cm^2; si la densidad del aire es $1{,}3 \times 10^{-3}$ g/cm^3, calcúlese la amplitud del desplazamiento en ese instante.

Solución

$$I = 2\pi^2 A^2 \nu^2 c\, \rho \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\pi\nu}\sqrt{\frac{I}{2\rho c}} = \frac{1}{\pi \times 10^3}\sqrt{\frac{10^{-4} \times 10^7}{2 \times 1{,}3 \times 10^{-3} \times 340 \times 10^2}} = 1{,}07 \times 10^{-3}\ \mathrm{cm}$$

B) FENOMENOS DE INTERFERENCIAS

FORMULARIO

INTERFERENCIAS: Son los efectos físicos que resultan al superponerse dos o más trenes de ondas.

INTERFERENCIAS ENTRE DOS ONDAS QUE TIENEN VIBRACIONES PARALELAS CON EL MISMO PERÍODO Y LA MISMA AMPLITUD:

1) La ecuación de la onda resultante de dos que viajan en el sentido positivo del eje OX es:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_1) \\ \psi_2 &= \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right| \quad \psi = \psi_{0r} \operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

$$\psi_{0r} = 2\psi_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

2) El estado vibratorio de un punto al que llegan dos ondas de las características anteriores producidas por dos focos emisores que distan x_1 y x_2, respectivamente, del punto P y que no necesariamente las ondas tienen que tener la misma dirección y que, además, cumplan con la condición de que en el instante $t = 0$ ambas ondas estén en fase ($\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 0$, o bien $\varphi_2 - \varphi_1 = K\pi$, $K \in Z$, condición de coherencia) es:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_0 \operatorname{sen}(kx_1 - \omega t) \\ \psi_2 &= \psi_0 \operatorname{sen}(kx_2 - \omega t) \end{aligned}\right| \quad \psi = \psi_{0r} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_{0r} = 2\psi_0 \cos\pi \frac{x_1 - x_2}{\lambda}$$

$$\varphi = \frac{k(x_1 + x_2)}{2}$$

La amplitud, para $K \in N$, será:

$$\text{MAXIMA} \qquad x_1 - x_2 = K\lambda \qquad \Rightarrow \quad \psi_r = 2\psi_0$$

$$\text{MINIMA NULA} \quad x_1 - x_2 = (2K + 1)\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \psi_r = 0$$

3) La ecuación de la onda resultante de dos que viajan una en el sentido positivo del eje OX y otra en el sentido negativo, encontrándose ambas en fase, es:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1 = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ \psi_2 = \psi_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t) \end{array}\right| \quad \psi = \psi_{0r} \cos\omega t$$

produciéndose el fenómeno de «ONDAS ESTACIONARIAS», representando un movimiento vibratorio para un punto determinado P (para un valor fijo de x) de amplitud:

$$\cdot\, \psi_{0r} = 2\psi_0 \operatorname{sen} kx = 2\psi_0 \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

La amplitud es, por tanto, una función armónica de la distancia, adquiriendo máximos valores (VIENTRES) cuando:

$$\operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = (2K + 1)\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x = (2K + 1)\frac{\lambda}{4}$$

La amplitud es cero (NODOS) cuando:

$$\operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \frac{x}{\lambda} = K\pi \quad \Rightarrow \quad x = K\frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre vientres consecutivos será:

$$d_V = (2K + 1)\frac{\lambda}{4} - (2K - 1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

La distancia entre nodos consecutivos será:

$$d_N = (K + 1)\frac{\lambda}{2} - K\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

INTERFERENCIAS ENTRE DOS ONDAS QUE TIENEN VIBRACIONES PARALELAS CON EL MISMO PERÍODO Y DISTINTA AMPLITUD:

1) La ecuación de la onda resultante de dos que viajan en el sentido positivo del eje OX es:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1 = \psi_{01} \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_1) \\ \psi_2 = \psi_{02} \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi_2) \end{array}\right| \quad \psi = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\psi_0^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\varphi = \operatorname{arctag} \frac{\psi_{01} \operatorname{sen}\varphi_1 + \psi_{02} \operatorname{sen}\varphi_2}{\psi_{01} \cos\varphi_1 + \psi_{02} \cos\varphi_2}$$

2) El estado vibratorio de un punto al que llegan dos ondas de las características anteriores producidas por dos focos emisores que distan x_1 y x_2, respectivamente, del punto P y que no necesariamente las ondas tienen que tener la misma dirección y que, además, cumplan con la condición de que en el instante $t = 0$ ambas ondas estén en fase ($\varphi_1 = 0$ y $\varphi_2 = 0$ o bien $\varphi_2 - \varphi_1 = K\pi$, $K \in Z$, condición de coherencia) es:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \psi_{01}\,\text{sen}\,(kx_1 - \omega t) \\ \psi_2 &= \psi_{02}\,\text{sen}\,(kx_2 - \omega t) \end{aligned}\right| \quad \psi = \psi_0\,\text{sen}\,(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_0^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02}\cos 2\pi\,\frac{x_1 - x_2}{\lambda}$$

$$\varphi = \text{arctag}\,\frac{\psi_{01}\,\text{sen}kx_1 + \psi_{02}\,\text{sen}kx_2}{\psi_{01}\cos kx_1 + \psi_{02}\cos kx_2}$$

La amplitud, para $K \in N$, será:

MAXIMA $\quad x_1 - x_2 = K\lambda \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02}$

MINIMA $\quad x_1 - x_2 = (2K + 1)\dfrac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = \psi_{01} - \psi_{02}$

INTENSIDAD EN LOS FENÓMENOS DE INTERFERENCIAS:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos 2\pi\,\frac{x_1 - x_2}{\lambda}$$

Obteniéndose, por tanto, las mismas condiciones de máximos y mínimos de intensidad que las requeridas para máximos y mínimos de amplitud.

Problema 19. Dos ondas de igual frecuencia y amplitud: $\nu = 50$ Hz, $\psi_0 = 2$ cm, viajan a la velocidad de 1 m/s y en sentido positivo del eje OX, entre ellas existe una diferencia de fase de $\pi/3$. Deducir la ecuación de la onda resultante de la interferencia entre las dos y las ecuaciones horarias del movimiento de una partícula que se encuentra a 20 cm del origen sobre el eje OX.

Solución

1)

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{100}{50} = 2\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi\text{ cm}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi\text{ s}^{-1}$$

para facilitar el problema tomamos el origen ($x = 0$, $t = 0$) cuando $\psi_2 = 0$; luego las ecuaciones de las ondas serán:

$$\psi_1 = 2\,\text{sen}\left(\pi x - 100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\psi_2 = 2\,\text{sen}\,(\pi x - 100\pi t)$$

la onda resultante será:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2 \left[\operatorname{sen}\left(\pi x - 100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t)\right]$$

aplicando:

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\cos\frac{a-b}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b}{2}$$

queda:

$$\boxed{\psi = 4\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\left(\pi x - 100\pi t + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{x}{2} - 50t + \frac{1}{12}\right)}$$

2) La partícula vibrará con movimiento vibratorio armónico de ecuación:

$$x = 20 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\psi(t) = 2\sqrt{3}\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right)}$$

luego:

$$\boxed{v = \frac{d\psi}{dt} = -200\sqrt{3}\,\pi\cos2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right)}$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = -2\times10^4\sqrt{3}\pi^2\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{121}{12} - 50t\right)}$$

Problema 20. Dos ondas de igual frecuencia: $\nu = 50$ Hz y amplitudes: $\psi_{01} = 2$ cm y $\psi_{02} = 3$ cm, viajan a la velocidad de 1 m/s y en el sentido positivo del eje OX. En el origen ($x = 0$, $t = 0$), para la primera $\psi_1 = 1$ cm y para la segunda $\psi_2 = 3\sqrt{3}/2$ cm. Deducir la ecuación de la onda resultante de la interferencia entre las dos.

Solución

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{100}{50} = 2 \text{ cm} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \text{ cm}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi\nu = 100\pi \text{ s}^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = 0 \\ x = 0 \end{array}\right| \begin{array}{lll} \psi_1 = 1 \text{ cm} & \Rightarrow 1 = 2\operatorname{sen}\varphi_1 & \Rightarrow \varphi_1 = \dfrac{\pi}{6} \\ \psi_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm} & \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 3\operatorname{sen}\varphi_2 & \Rightarrow \varphi_2 = \dfrac{\pi}{3} \end{array}$$

luego las ecuaciones de las ondas serán:

$$\psi_1 = 2\operatorname{sen}\left(\pi x - 100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\psi_2 = 3\operatorname{sen}\left(\pi x - 100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t)\cos\frac{\pi}{6} + 2\cos(\pi x - 100\pi t)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} +$$

$$+ 3\operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t)\cos\frac{\pi}{3} + 3\cos(\pi x - 100\pi t)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} =$$

$$= \operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t)\left(2\cos\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{3}\right) + \cos(\pi x - 100\pi t)\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Existen dos números ψ_0 y φ que cumplen las condiciones:

$$\psi_0 \operatorname{sen}\varphi = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\psi_0 \cos\varphi = 2\cos\frac{\pi}{6} + 3\cos\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{3}{2} \qquad [1]$$

números que podemos calcular:

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3} \Rightarrow \varphi = 0{,}267\pi \text{ rad}$$

$$\psi_0^2 = \left(1 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \psi_0 = 4{,}84 \text{ cm}$$

sustituyendo los valores [1] en ψ, se obtiene:

$$\boxed{\psi = \psi_0\,[\operatorname{sen}\varphi\cos(\pi x - 100\pi t) + \cos\varphi\operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t)] = \psi_0\operatorname{sen}(\pi x - 100\pi t + \varphi) = 4{,}84\operatorname{sen}2\pi\left[\frac{x}{2} - 50t + 0{,}133\right]}$$

que es la ecuación de la onda resultante.

Problema 21. Dos ondas que se mueven en la misma dirección y cuyas ecuaciones escritas en el sistema CGS son:

$$\psi_1 = 5\operatorname{sen}(1\,000t - 100x)$$

$$\psi_2 = 5\operatorname{sen}(1\,000t + 100x)$$

al interferir producen «ondas estacionarias». Determinar:

1. La ecuación de la onda resultante.
2. La amplitud en los vientres.
3. Distancia entre dos nodos consecutivos.

Solución

1)

$$\boxed{\psi = \psi_1 + \psi_2 = 5[\operatorname{sen}(1\,000t - 100x) + \operatorname{sen}(1\,000t + 100x)] = 10\operatorname{sen}(1\,000t)\cos(100x)}$$

que representa un movimiento vibratorio para cualquier punto P (para un determinado valor de x) de amplitud:

$$\psi_{0r} = 10\cos 100x$$

2) La amplitud es, por tanto, una función armónica de la distancia, adquiriendo valores máximos (vientres) cuando:

$$\cos 100x = \pm 1$$

y, por tanto, la amplitud en los vientres es: $\boxed{\pm 10 \text{ cm.}}$

3) La distancia entre nodo y nodo es $\lambda/2$, y como:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{50} \text{ cm} \Rightarrow \boxed{d_N = \frac{\pi}{100} \text{ cm}}$$

Problema 22. Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación escrita en el sistema CGS: $\psi = 20 \operatorname{sen} 50x \cos 400t$. Calcular:
1. Las ecuaciones de las ondas cuya interferencia pueden dar dicha onda.
2. Distancia entre dos nodos consecutivos.

Solución

1) Teniendo en cuenta la relación trigonométrica:

$$\operatorname{sen}(a - b) + \operatorname{sen}(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$

la onda dada podrá proceder de la interferencia de dos senoidales de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1 = \psi_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ \psi_2 = \psi_0 \operatorname{sen}(kx + \omega t) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = 2\psi_0 \operatorname{sen} kx \cos \omega t$$

que, comparada con la dada:

$$\left.\begin{array}{r} 2\psi_0 = 20 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = 10 \text{ cm} \\ k = 50 \text{ cm}^{-1} \\ \omega = 400 \text{ s}^{-1} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \psi_1 = 10 \operatorname{sen}(50x - 400t) \\ \psi_2 = 10 \operatorname{sen}(50x + 400t) \end{array}}$$

2) Como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 50 \text{ cm}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\pi}{50} \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad d_N = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{50} \text{ cm}$$

Problema 23. La ecuación de la onda que se propaga en una cuerda viene dada en el sistema CGS por: $\psi = 6 \operatorname{sen}(\pi x/3) \operatorname{sen} 40\pi t$. Calcular:
1. Las ecuaciones de las ondas cuya interferencia pueden dar dicha onda.
2. La velocidad de un punto de la cuerda situado a $x = 1$ cm cuando $t = 1/10$ s.

Solución

1) Sabemos que:

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

con lo que la onda dada procederá de la interferencia de dos ondas cosenoidales de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1 = \psi_0 \cos 2\pi \left(\dfrac{x}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right) \\ \psi_2 = \psi_0 \cos 2\pi \left(\dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{t}{T}\right) \end{array}\right| \Rightarrow \quad \psi = \psi_1 - \psi_2 = 2\psi_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

comparando con la ecuación dada:

$$2\psi_0 = 6 \quad \Rightarrow \quad \psi_0 = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6 \text{ cm}$$

$$\frac{2\pi}{T} = 40\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{20} \text{ s}$$

luego las ecuaciones de las ondas cuya interferencia producen la «onda estacionaria» dada son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \psi_1 = 3 \cos 2\pi \left(\dfrac{x}{6} - 20t\right) \\ \psi_2 = 3 \cos 2\pi \left(\dfrac{x}{6} + 20t\right) \end{array}}$$

2)

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 240\pi \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3} \cos 40\pi t$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \text{ cm} \\ t = 0{,}1 \text{ s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = 240\pi \frac{\sqrt{3}}{2} = 120\pi \sqrt{3} \text{ cm/s}}$$

Problema 24. En la interferencia de dos ondas con vibraciones paralelas, teniendo ambas la frecuencia de 100 Hz, sabemos que para $t = 0$ la elongación y velocidad resultantes en cualquier punto vienen dadas, escritas en el sistema CGS, respectivamente por:

$$\psi_0 = 0{,}05(\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$$
$$u_0 = -10\pi(\sqrt{3} \cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$$

Calcular la ecuación de la onda interferencia de las dos.

Solución

La ecuación de onda de interferencia de dos que tienen por ecuaciones:

$$\psi_1 = \psi_{01} \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi_1)$$
$$\psi_2 = \psi_{02} \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi_2)$$

se calcula sumando ambas:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_{01} \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi_1) + \psi_{02} \operatorname{sen}(kx \pm \omega t + \varphi_2)$$

que para $t = 0$ nos queda:

$$\psi_0 = \psi_{01} \operatorname{sen}(kx + \varphi_1) + \psi_{02} \operatorname{sen}(kx + \varphi_2)$$

la ecuación dada para ψ_0 la podemos poner:

$$\psi_0 = 0{,}05 \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + 0{,}05 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

por comparación con la anterior nos resulta:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_{01} = 0{,}05\sqrt{3} \text{ cm} \\ \varphi_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \psi_{02} = 0{,}05 \text{ cm} \\ \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

$$k = 2 \text{ cm}^{-1}$$

que junto con que $\nu = 100$ Hz $\Rightarrow$ $\omega = 200\pi \text{ s}^{-1}$, nos resulta:

$$\psi = 0{,}05 \sqrt{3} \operatorname{sen}(2x \pm 200\pi t) + 0{,}05 \operatorname{sen}\left(2x \pm 200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

luego:

$$u = \frac{d\psi}{dt} = \pm 10\pi \sqrt{3} \cos(2x \pm 200\pi t) \pm 10\pi \cos\left(2x \pm 200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

que para $t = 0$ queda:

$$u_0 = \pm 10\pi(\sqrt{3} \cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$$

que, comparada con la dada, nos determina que el signo que corresponde a ωt es el negativo (sentido positivo del eje OX). La ecuación a componer será:

$$\psi = 0{,}05\,\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(2x - 200\pi t) + 0{,}05\,\mathrm{sen}\left(2x - 200\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

cuya amplitud resultante es:

$$\psi_r^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 - 2\psi_{01}\psi_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 25 \times 10^{-4} \times 4 - 2 \times 25 \times 10^{-4}\,\sqrt{3}\,\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\psi_r = 10^{-2}\ \mathrm{cm}$$

y corrección de fase:

$$\varphi = \mathrm{arctag}\,\frac{\psi_{01}\,\mathrm{sen}\varphi_1 + \psi_{02}\,\mathrm{sen}\varphi_2}{\psi_{01}\cos\varphi_1 + \psi_{02}\cos\varphi_2} = \mathrm{arctag}\,\frac{\psi_{02}}{\psi_{01}} = \mathrm{arctag}\,\frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

por tanto, la ecuación de onda resultante de las dos será:

$$\boxed{\psi = 10^{-2}\,\mathrm{sen}\left(2x - 200\pi t + \frac{\pi}{6}\right)}$$

Problema 25. Dos ondas de amplitudes 2 y 4 cm viajan en la misma dirección y tienen idéntica frecuencia; si su diferencia de fase es $\pi/4$, calcúlese la amplitud de la onda resultante.

Solución

A una diferencia de fase $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$, le corresponde una distancia: $\Delta x = \frac{\lambda\Delta\varphi}{2\pi}$

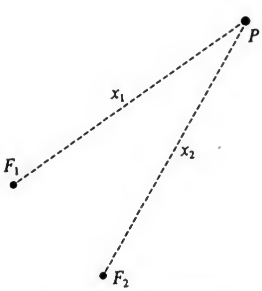
y como la amplitud de la onda resultante verifica:

$$\psi_0^2 = \psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02}\cos 2\pi\,\frac{\Delta x}{\lambda}$$

sustituyendo:

$$\boxed{\psi_0 = \sqrt{\psi_{01}^2 + \psi_{02}^2 + 2\psi_{01}\psi_{02}\cos\Delta\varphi} = \sqrt{4 + 16 + 16\cos\frac{\pi}{4}} = 5{,}6\ \mathrm{cm}}$$

Problema 26. A un punto P llegan dos ondas que viajan a 1 m/s procedentes de dos focos coherentes que distan 7,5 cm y 5,5 cm del punto P; ambas ondas tienen la misma frecuencia, 60 Hz, y la misma amplitud, 2 cm. Determínese la ecuación del movimiento vibratorio del punto P.



Problema XVIII-26

Solución

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}\ \mathrm{cm}$$

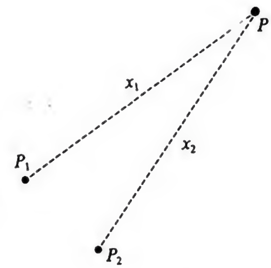
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{60}\ \mathrm{s} \quad\Rightarrow\quad \omega = 120\pi\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\psi_r = 2\psi_0\cos 2\pi\,\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 2 \times 2\cos 2\pi\,\frac{2 \times 3}{5} = 1{,}24\ \mathrm{cm}$$

La ecuación del movimiento vibratorio de P será:

$$\left.\begin{array}{l} \psi = \psi_r \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \\ \varphi = 2\pi \dfrac{x_1 + x_2}{\lambda} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\psi = 1{,}24 \operatorname{sen} 2\pi \left(60t + \frac{39}{5}\right)}$$

Problema 27. En la figura P_1 y P_2 representan dos focos emisores de ondas coherentes de un sonido de 100 Hz. En P se coloca un aparato registrador de sonido; las distancias x_1 y x_2 son 103,4 y 100 m; la velocidad de propagación del sonido en el aire es 340 m/s. ¿Registrará sonido el aparato colocado en P?



Problema XVIII-27

Solución

La longitud de onda del sonido es:

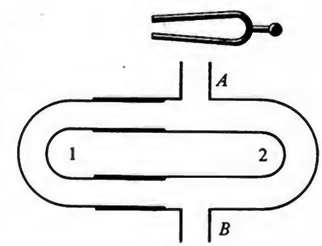
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{340}{100} = 3{,}4 \text{ m}$$

La diferencia de distancia de los focos emisores al punto O es:

$$x_1 - x_2 = 103{,}4 - 100 = 3{,}4 \text{ m} = \lambda$$

Se cumple la condición de máxima intensidad en las interferencias; por tanto, en P se registrará sonido.

Problema 28. El aparato de Quincke consta de dos tubos en U, pudiéndose deslizar las ramas de uno de ellos dentro de las ramas del otro. En las proximidades de la ramificación A se produce un sonido que se escucha poniendo el oído en B. Deslizando el tubo 1 dentro del 2, se encuentran posiciones en las que no se percibe sonido; ¿por qué? Si el desplazamiento lateral que hay que dar al tubo 1, desde que no se percibe sonido hasta que, de nuevo, se deja de percibir, es de 25 cm, ¿cuál es la longitud de onda, la frecuencia y el período de las ondas sonoras? Velocidad de propagación del sonido en el aire, 340 m/s.



Problema XVIII-28

Solución

No se percibirá sonido cuando la diferencia de recorridos A 1 B y A 2 B sea un número impar de semilongitudes de onda. Si en tales condiciones se desplaza el tubo 1 hasta dejar de nuevo de percibir sonido, el exceso de recorrido que hace el sonido, con respecto a la posición anterior, es una longitud de onda.

En la segunda posición el sonido ha recorrido en la rama A 1 B, 50 cm más que en la A 2 B (25 en la parte superior de 1 y 25 en la inferior). Por tanto:

$$\lambda = 50 \text{ cm}$$

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}5} = 680 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{680} \text{ s}$$

Problema 29. La potencia emisora de dos silbatos es $4\pi \times 10^{-2}$ y $16\pi \times 10^{-2}$ W. Ambos emiten un sonido regularmente en todas las direcciones, cuya frecuencia es 850 Hz. Un punto A está situado a 10 m del primero y 20 del segundo. Siendo la velocidad de propagación del sonido en el aire 340 m/s. Determinar:
1. Las intensidades en el punto A provocadas independientemente por cada uno de los sonidos.
2. La producida cuando actúan los dos silbatos a la vez.
3. ¿Cuánto tendríamos que modificar la distancia del primer emisor, permaneciendo constante la del segundo, para percibir en A un mínimo de intensidad?

Solución

1)

$$I = \frac{P_m}{4\pi r^2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} I_1 = \dfrac{4\pi \times 10^{-2}}{4\pi \times 10^2} = 10^{-4}\ \text{W/m}^2 = 10^{-8}\ \text{W/cm}^2 \\[2ex] I_2 = \dfrac{16\pi \times 10^{-2}}{4\pi \times 20^2} = 10^{-4}\ \text{W/m}^2 = 10^{-8}\ \text{W/cm}^2 \end{array} \right.$$

$$I_1 = I_2 = I \ , \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow I_R = I + I + 2\sqrt{II}\cos\left(2\pi\,\frac{d_2 - d_1}{c}\,\nu\right) =$$

$$= 2I\left[1 + \cos 2\pi\,\frac{(d_2 - d_1)}{c}\,\nu\right] = 2 \times 10^{-4}\left[1 + \cos 2\pi\,\frac{10 \times 850}{340}\right] =$$

$$= 2 \times 10^{-4}[1 + \cos 50\pi] = 4 \times 10^{-4}\ \text{W/m}^2 = 4 \times 10^{-8}\ \text{W/cm}^2$$

Existiendo un máximo, la modificación de distancia de uno de los focos para producir mínimo es:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu} = \frac{340}{2 \times 850} = 0{,}2\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

Capítulo XIX

ACUSTICA

A) PROPAGACION DEL SONIDO. CUALIDADES. MUSICA

FORMULARIO

VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DEL SONIDO (ONDA LONGITUDINAL) EN LOS GASES CON LA TEMPERATURA:

$$c_1 = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \qquad \left(\alpha = \frac{1}{273{,}16}\right)$$

La velocidad del sonido en un gas es directamente proporcional a la raíz cuadrada del binomio de dilatación.

VELOCIDAD DEL SONIDO EN EL AIRE Y A 0° C: $c_0 = 330$ m/s

Problema 1. Calcular la temperatura que sería necesaria para que la velocidad del sonido en el aire fuese doble que a 0° C. (Se supone constante la presión; $\alpha = 1/273{,}16$.)

Solución

$$c_t = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \quad \Rightarrow \quad 2 = \sqrt{1 + \alpha t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{4 - 1}{\alpha} = 3 \times 273{,}16 = 819{,}48° \text{ C}}$$

Problema 2. Calcular la distancia a que se ha producido un relámpago cuando se oye el trueno 5 s más tarde que la percepción de aquél. La temperatura es de 30° C.

Solución

Despreciando el tiempo empleado por la luz en el recorrido y teniendo en cuenta que la temperatura es 30°, aplicaremos:

$$c_1 = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} \Rightarrow c_1 = 330 \sqrt{1 + \frac{30}{273{,}16}} = 347{,}65 \text{ m/s}$$

Como el sonido se propaga con movimiento uniforme:

$$\boxed{s = ct = 347{,}65 \times 5 = 1\,738{,}25 \text{ m}}$$

Problema 3. El intervalo de tiempo mínimo para que nuestro oído perciba dos sílabas distintamente es 0,1 s. Si la temperatura ambiente es de 25° C, ¿cuál es la distancia mínima entre el oído y una superficie reflectora para que percibamos eco?

Solución

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t} = 330 \sqrt{1 + \frac{25}{273}} = 344{,}8 \text{ m/s}$$

el espacio que debe recorrer la onda en su ida y vuelta del oído al obstáculo es:

$$s = ct = 344{,}8 \times 0{,}1 = 34{,}48 \text{ m}$$

luego la distancia mínima entre el oído y la superficie reflectora debe ser alrededor de los $\boxed{17 \text{ m}}$ para que se produzca eco.

Problema 4. Calcular la longitud de onda del la_3 en el aire a 0° C (velocidad de propagación del sonido = 330 m/s) y a 20° C (c = 340 m/s).

Solución

De la expresión:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

y teniendo en cuenta que la_3 tiene una frecuencia de 440 Hz:

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{330}{440} = 0{,}75 \text{ m}} \qquad \boxed{\lambda_{20} = \frac{340}{440} = 0{,}77 \text{ m}}$$

Problema 5. Calcular los límites mínimo y máximo de la longitud de onda de los sonidos audibles. Se dupone la velocidad de propagación del sonido 340 m/s, siendo la temperatura de 20° C.

Solución

Un oído perfecto recibe sonidos comprendidos entre 20 y 20 000Hz, a los que corresponden las siguientes longitudes de onda:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{340}{20} = 17 \text{ m}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{340}{20\,000} = 0{,}017 \text{ m} = 1{,}7 \text{ cm}}$$

Problema 6. Determinar la frecuencia de la nota *do* de las cinco primeras escalas.

Solución

$$la_3 = do_3 \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad do_3 = la_3 \frac{3}{5} = \frac{440 \times 3}{5} = 264 \text{ Hz}$$

$$do_2 = \frac{264}{2} = 132 \text{ Hz} \qquad do_4 = 264 \times 2 = 528 \text{ Hz}$$

$$do_1 = \frac{132}{2} = 66 \text{ Hz} \qquad do_5 = 528 \times 2 = 1\,056 \text{ Hz}$$

Problema 7. Determinar qué nota es la que tiene por tono 950,4 Hz.

Solución

Pertenece a la cuarta escala, por estar comprendida entre 528 Hz (do_4) y 1 056 Hz (do_5).

Hallemos el valor de los intervalos de las distintas notas de una escala:

$$\frac{do}{do} = 1 \qquad \frac{re}{do} = \frac{9}{8} = 1{,}125 \qquad \frac{mi}{do} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{fa}{do} = \frac{4}{3} = 1{,}333$$

$$\frac{sol}{do} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{la}{do} = \frac{5}{3} = 1{,}667 \qquad \frac{si}{do} = \frac{15}{8} = 1{,}875$$

Hallemos el valor del intervalo entre nuestra nota y el *do* de su escala:

$$\frac{950{,}4}{528} = 1{,}8$$

La nota está comprendida entre el *la* y el *si*: podría ser *la* sostenido o *si* bemol.

El intervalo, respecto al *do*, del *la* sostenido es:

$$\frac{la\ sos.}{do} = 1{,}667 \frac{25}{24} = 1{,}736$$

El intervalo respecto al *do* del *si bemol* es:

$$\frac{si\ bem.}{do} = 1{,}875 \frac{24}{25} = 1{,}8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{La nota es el } si \text{ } bemol.}$$

Problema 8. Calcular la nota emitida por una sirena de 20 orificios y 22 revoluciones por segundo.

Solución

La frecuencia del sonido emitido viene dada por:

$$\nu = 20 \times 22 = 440 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{La nota emitida es el } la_3.}$$

B) INSTRUMENTOS MUSICALES

FORMULARIO

VIBRACIONES TRANSVERSALES EN LAS CUERDAS:

$$\nu = \frac{K}{2}\,\frac{c}{L} = \frac{K}{2Lr}\sqrt{\frac{F}{\pi\rho}}$$

TUBOS SONOROS:

Abiertos: $$\nu = \frac{K}{2}\,\frac{c}{L}$$

Cerrados: $$\nu = \frac{2K+1}{4}\,\frac{c}{L}$$

Problema 9. Calcular la frecuencia del sonido fundamental emitido por una cuerda de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro, cuya densidad es 2 g/cm^3 y está tensa por un peso de 9 231,6 g.

Solución

La frecuencia del sonido emitido por una cuerda es:

$$\nu = \frac{K}{2Lr}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}}$$

$P = 9\,231{,}6 \times 980$ dyn
$K = 1$
$L = 100$ cm
$r = 0{,}05$ cm
$\rho = 2$ g/cm^3

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2 \times 100 \times 0{,}05}\sqrt{\frac{9\,231{,}6 \times 980}{2\pi}} = 120 \text{ Hz}}$$

Problema 10. Una cuerda está estirada por un peso de 1 kp. Calcular el peso que debe tensar a otra cuerda de la misma sustancia, la misma longitud y doble radio para que emita la octava aguda de la que produce la primera. Se supone que ambas emiten el sonido fundamental.

Solución

$$\nu = \frac{1}{2Lr}\sqrt{\frac{P}{\pi\rho}}$$

$$2\nu = \frac{1}{2L2r}\sqrt{\frac{P'}{\pi\rho}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 2\sqrt{\frac{P}{P'}} = 2\sqrt{\frac{1}{P'}} \Rightarrow \boxed{P' = 16 \text{ kp}}$$

Problema 11. Calcular la frecuencia de los sonidos emitidos por un tubo abierto y otro cerrado de 1 m de longitud, produciendo el sonido fundamental. Se supone que la velocidad del sonido en el aire es 340 m/s.

Solución

Para un tubo abierto:

$$\boxed{\nu = \frac{K}{2}\frac{c}{L} = \frac{1}{2}\frac{340}{1} = 170 \text{ Hz}}$$

Para un tubo cerrado:

$$\boxed{\nu = \frac{2K+1}{4}\frac{c}{L} = \frac{1}{4}\frac{340}{1} = 85 \text{ Hz}}$$

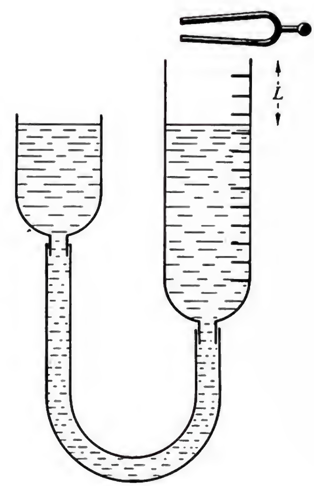
Problema 12. Calcular la longitud de un tubo abierto que lleno de aire y a 0° C (c = 330 m/s) emite como sonido fundamental el do_3.

Solución

Frecuencia del do_3 = 264 Hz (problema 6):

$$\nu = \frac{1}{2}\frac{c}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{1}{2}\frac{c}{\nu} = \frac{1}{2}\frac{330}{264} = 0{,}625 \text{ m}}$$

Problema 13. En la experiencia de la figura el diapasón emite el la_2. La longitud L del tubo que produce la resonancia es 19 cm. ¿Qué velocidad de propagación tiene el sonido? ¿A qué temperatura está el ambiente durante la experiencia?



Problema XIX-13

Solución

$$\nu = \frac{1}{4}\frac{c}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 4L\nu = 4 \times 0{,}19 \times 440 = 334{,}40 \text{ m/s}}$$

$$c_t = c_0\sqrt{1+\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{c_t^2 - c_0^2}{c_0^2\alpha} = \frac{(334{,}4^2 - 330^2)273{,}16}{330^2} = 7{,}3° \text{ C}}$$

Problema 14. Deseamos conocer el módulo de Young de un metal. Tallamos una varilla y la colocamos como vibrador de un tubo de Kundt. Conocemos: la longitud de la varilla del metal = L. La distancia entre nodo y nodo en el aire del tubo = L'. La masa específica del metal = ρ. La temperatura del ambiente = t. La velocidad del sonido en el aire a 0° C = 330 m/s. El coeficiente de dilatación de los gases = 1/273,16. Determinar la fórmula de E, en función de los datos del problema.

Solución

La velocidad de propagación de las ondas longitudinales en los cuerpos elásticos es:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

por otro lado:

$$L' = \frac{\lambda}{2} \text{ (en el aire)} \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L'} = \frac{330\sqrt{1 + t/273{,}16}}{2L'}$$

Esta frecuencia del sonido en el aire es la vibración de la varilla; y como la magnitud de ella es media longitud de onda, se obtendrá:

$$\nu = \frac{330\sqrt{1 + t/273{,}16}}{2L'} = \frac{c'}{2L} \Rightarrow c' = \frac{330L\sqrt{1 + t/273{,}16}}{L'} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\boxed{E = \frac{330^2 L^2 (1 + t/273{,}16)\rho}{L'^2}}$$

(Como se ha expresado la velocidad del sonido en el aire en m/s, la masa específica se debe expresar en kg/m^3. El módulo de Young quedará expresado en N · m^2.)

C) PERCEPCION DEL SONIDO. SONORIDAD. EFECTO DOPPLER-FIZEAU

FORMULARIO

LEY DE WEBER-FECHNER:

$$d\beta = K \frac{dI}{I} \qquad \beta = C \log \frac{I}{I_0}$$

Si $C = 10$; $I_0 = 10^{-10}$ μW/cm^2 (que corresponde aproximadamente a la intensidad umbral del sonido de 1 000 Hz para un oído normal), el nivel sonoro queda expresado en DECIBELES (db).

VARIACIONES DEL TONO PERCIBIDO: EFECTO DOPPLER FIZEAU:

Tomaremos el foco emisor siempre a la derecha del observador:

$$\nu = \nu_0 \frac{c - v_{ob}}{c - v_F}$$

ν_0 = frecuencia emitida por el foco

Problema 15. Calcular en decibeles la sonoridad del sonido percibido en las proximidades de una persona hablando en voz baja (la intensidad es 100 veces mayor a la intensidad umbral).

Solución

De la expresión:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \Rightarrow \boxed{\beta = 10 \log 100 = 20 \text{ db}}$$

Problema 16. Determinar el nivel sonoro en los diversos casos del problema 29 del capítulo anterior.

Solución

La sonoridad correspondiente a cada silbato es:

$$\beta_1 = 10\log \frac{10^{-8}}{10^{-10}} = 10\log 100 = 20 \text{ db}$$

La sonoridad del sonido conjunto es:

$$\beta_2 = 10\log \frac{4 \times 10^{-8}}{10^{-10}} = 10\log 400 \text{ db} = 26{,}02 \text{ db}$$

Problema 17. La bocina de un coche se oye hasta una distancia de 1 km. Calcular la sensación sonora a 100 m.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \beta = 10\log \dfrac{I}{I_0} \\[2ex] \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{r_0^2}{r^2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\beta = 20\log \frac{r_0^2}{r^2} = 20\log \frac{10^6}{10^4} = 40 \text{ db}}$$

Problema 18. A 10 m de distancia la sonoridad de la sirena de un barco es de 60 db y el valor umbral de la intensidad para su frecuencia es de 10^{-14} W/cm^2. Calcular:

1. La sonoridad a 1 km de distancia.

2. Distancia a la que la sirena deja de ser audible.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1 = 10\log \dfrac{I_2}{I_1} \\[2ex] \dfrac{I_2}{I_1} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} \end{array}\right| \Rightarrow \beta_2 - 60 = 10\log \frac{10^2}{10^6} \Rightarrow \boxed{\beta_2 = 60 - 40 = 20 \text{ db}}$$

2) Como:

$$\beta_1 = 10\log \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow 60 = 10\log \frac{I_1}{10^{-14}} \Rightarrow I_1 = 10^{-8} \text{ W/cm}^2$$

y como:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{r_0^2}{r_1^2} \Rightarrow r_0^2 = 10^2 \frac{10^{-8}}{10^{-14}} = 10^8 \text{ m}^2 \Rightarrow \boxed{r_0 = 10^4 \text{ m} = 10 \text{ km}}$$

Problema 19. El nivel sonoro de una persona gritando en las proximidades de nuestro oído es 80 db. Calcular el número de personas que serían necesarias para que gritando en las proximidades de una lámpara de incandescencia de 100 W de consumo la mantuviesen encendida, suponiendo que toda la energía acústica, que atraviesa en 1 s a 1 m^2, fuese transformada adecuadamente en energía eléctrica. (Potencia del sonido umbral: 10^{-10} μW/cm^2.)

Solución

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \quad\Rightarrow\quad 80 = 10\log\frac{I}{10^{-10}} \quad\Rightarrow\quad I = 10^{-2}\ \mu\text{W/cm}^2 = 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

$$100 = 10^{-4}\,n \quad\Rightarrow\quad \boxed{n = 10^6 \text{ personas}}$$

Problema 20. En un campo de fútbol hay 10 000 espectadores que gritan, en un momento de emoción, la palabra *«gol»*. Si emplean 2 s en su grito y la sonoridad a la misma distancia de cada emisor es 80 db, determinar la energía transmitida por el aire a través de 1 cm^2. (Potencia del sonido umbral: 10^{-10} μW/cm^2.)

Solución

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} \quad\Rightarrow\quad 80 = 10\log\frac{I}{10^{-10}} \quad\Rightarrow\quad I = 10^{-2}\ \mu\text{W/cm}^2$$

La energía correspondiente a los 10 000 espectadores en 2 s es:

$$\boxed{W = 10^{-2} \times 10\,000 \times 2 = 200\ \mu\text{J/cm}^2 = 2\,000\ \text{erg/cm}^2}$$

Problema 21. Dos individuos viajan en dos trenes A y B que llevan respectivamente velocidades de 60 y 50 km/h. Los silbatos de las locomotoras emiten el mismo sonido de 600 Hz. Calcular:

1. Sonido percibido por el viajero del tren A que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acerca a él el tren B, funcionando su silbato.
2. Sonido percibido por el viajero del tren B que está en reposo y el silbato de su locomotora en silencio, cuando se acerca a él el tren A, funcionando su silbato.
3. Sonido percibido por el viajero del tren A en marcha hacia el B, que está en reposo. Funciona el silbato de B.
4. Sonido percibido por el viajero del tren B en marcha hacia el A, que está en reposo. Funciona el silbato de A.
5. Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, acercándose entre sí. Funciona el silbato de B.
6. Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en sentido contrario, alejándose entre sí. Funciona el silbato de B.
7. Sonido percibido por el viajero de A cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el B tras el A. Funciona el silbato de B.
8. Sonido percibido por el viajero de B cuando marchan los dos trenes en el mismo sentido, el B tras el A. Funciona el silbato de A.

Se supone que la velocidad de propagación del sonido es 340 m/s.

Solución

$$\text{Velocidad del sonido en km/h} = \frac{340 \times 3\,600}{1\,000} = 1\,224 \text{ km/h}$$

1) $$\nu' = \nu \frac{c}{c - 50} = 600 \frac{1\,224}{1\,224 - 50} \text{ Hz} = 625{,}55 \text{ Hz}$$

2) $$\nu' = \nu \frac{c}{c - 60} = 600 \frac{1\,224}{1\,224 - 60} \text{ Hz} = 630{,}93 \text{ Hz}$$

3) $$\nu' = \nu \frac{c + 60}{c} = 600 \frac{1\,224 + 60}{1\,224} \text{ Hz} = 629{,}41 \text{ Hz}$$

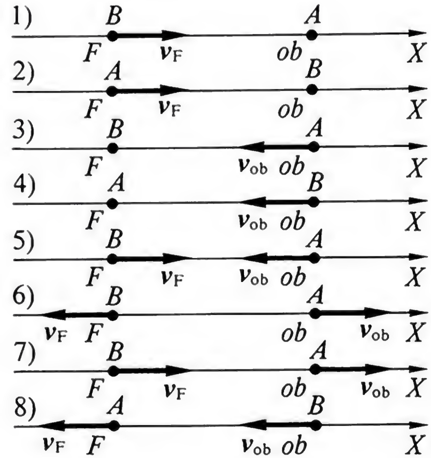
4) $$\nu' = \nu \frac{c + 50}{c} = 600 \frac{1\,224 + 50}{1\,224} \text{ Hz} = 624{,}51 \text{ Hz}$$

5) $$\nu' = \nu \frac{c + 60}{c - 50} = 600 \frac{1\,224 + 60}{1\,224 - 50} \text{ Hz} = 651{,}11 \text{ Hz}$$

6) $$\nu' = \nu \frac{c - 60}{c + 50} = 600 \frac{1\,224 - 60}{1\,224 + 50} \text{ Hz} = 548{,}19 \text{ Hz}$$

7) $$\nu' = \nu \frac{c - 60}{c - 50} = 600 \frac{1\,224 - 60}{1\,224 - 50} \text{ Hz} = 594{,}89 \text{ Hz}$$

8) $$\nu' = \nu \frac{c + 50}{c + 60} = 600 \frac{1\,224 + 50}{1\,224 + 60} \text{ Hz} = 595{,}33 \text{ Hz}$$



Problema 22. Un automóvil se mueve hacia la izquierda con una velocidad $v = 30$ m/s. En dirección contraria (rebasado suficientemente el punto de cruce) va un camión a una velocidad $v' = 21$ m/s, con una gran superficie reflectora en su parte posterior. El automóvil emite un bocinazo (emisión instantánea) con una frecuencia de 1 000 Hz. Determinar:

1. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas percibidas por el observador de la figura colocado a la derecha del coche?

2. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que llegan a la superficie reflectora del camión?

3. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibirá el observador después que las ondas se han reflejado en el camión?

4. ¿Cuál es la frecuencia de las ondas que percibiría el conductor del coche, después de la reflexión en el camión?

(Velocidad del sonido: 330 m/s. Se supone el aire en calma.)

Problema XIX-22

Solución

1)

$$\nu_1 = \nu_0 \frac{c}{c + v} = 1\,000 \frac{330}{330 + 30} = 916{,}7 \text{ Hz}$$

2) La superficie reflectora es ahora el receptor auditivo.

$$\nu_2 = \nu_0 \frac{c - v'}{c + v} = 1\,000 \frac{330 - 21}{330 + 30} = 858{,}3 \text{ Hz}$$

3) La superficie reflectora se vuelve foco emisor (derecha), emitirá con la frecuencia ν_2.

$$\nu_3 = \nu_2 \frac{c}{c + v'} = 858{,}3 \frac{330}{330 + 21} = 806{,}9 \text{ Hz}$$

4) El receptor es el coche y el smisor el camión y la frecuencia emitida ν_2:

$$\nu_4 = \nu_2 \frac{c - v}{c + v'} = 858{,}3 \frac{330 - 30}{330 + 21} = 733{,}6 \text{ Hz}$$

Problema 23. Una sirena que emite con una frecuencia ν sube verticalmente hacia arriba, partiendo del suelo y a una velocidad v. El punto de partida de la sirena está a una distancia d de un observador.

1. Supuesto el observador parado, calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador después de transcurridos t segundos.

2. Supuesto que el observador se aleja del punto de partida a una velocidad v', y que parte del punto a esa distancia d, en el mismo instante que la sirena. Calcular en función de los datos la frecuencia que percibiría el observador, después de transcurridos t segundos.

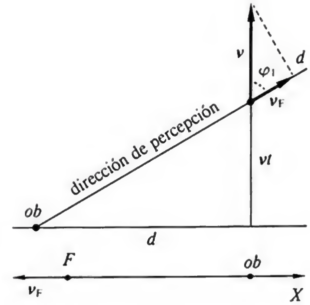
Solución

1)

$$\nu = \nu_0 \frac{c}{c + v_F}$$

$$v_F = \text{proy}_d v = v \cos\varphi_1 = v \frac{vt}{\sqrt{v^2t^2 + d^2}}$$

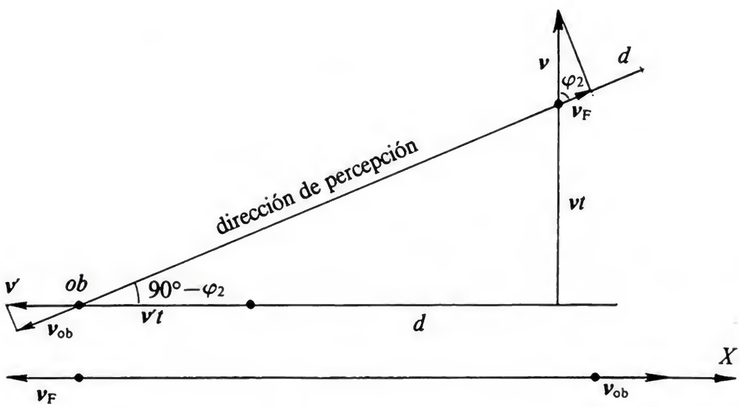
$$\boxed{\nu = \nu_0 \frac{c}{c + \dfrac{v^2 t}{\sqrt{v^2t^2 + d^2}}} = \nu_0 \frac{c\sqrt{v^2t^2 + d^2}}{c\sqrt{v^2t^2 + d^2} + v^2 t}}$$



Problema XIX-23-1.ª

2)

$$\nu = \nu_0 \frac{c - v_{ob}}{c + v_F}$$



Problema XIX-23-2.ª

$$v_{ob} = \text{proy}_d v' = v' \operatorname{sen}\varphi_2 = v' \frac{v't + d}{\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2}}$$

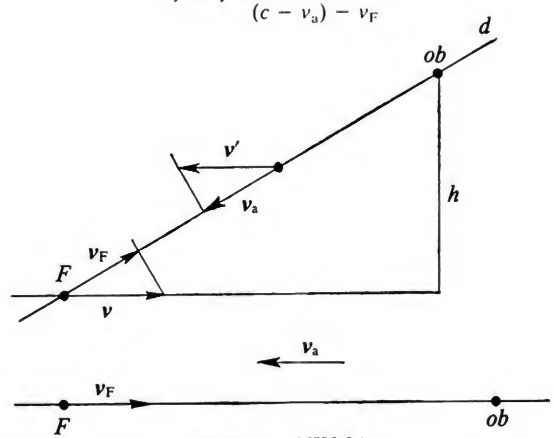
$$v_F = \text{proy}_d v = v \cos\varphi_2 = v \frac{vt}{\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2}}$$

$$\boxed{\nu = \nu_0 \frac{c - v' \dfrac{v't + d}{\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2}}}{c + \dfrac{v^2 t}{\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2}}} = \nu_0 \frac{c\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2} - v'(v't + d)}{c\sqrt{v^2t^2 + (d + v't)^2} + v^2 t}}$$

Problema 24. Un hombre se encuentra en lo alto de una torre de altura h. A una distancia d del pie de ésta un automóvil que se dirige hacia ella con una velocidad v emite un bocinazo con una frecuencia ν. El aire se mueve con una velocidad v' y en dirección contraria al coche. Calcular en función de estos datos la frecuencia percibida por el hombre de la torre. (Velocidad de sonido: c.)

Solución

$$\nu' = \nu \, \frac{c - \nu_a}{(c - \nu_a) - \nu_F}$$



Problema XIX-24

$$\nu_a = \text{proy}_d \nu' = \nu' \cos\varphi = \frac{\nu' d}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$\nu_F = \text{proy}_d \nu = \nu \cos\varphi = \frac{\nu d}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$\boxed{\nu' = \nu \, \frac{c - \dfrac{\nu' d}{\sqrt{h^2 + d^2}}}{c - \dfrac{\nu' d}{\sqrt{h^2 + d^2}} - \dfrac{\nu d}{\sqrt{h^2 + d^2}}} = \nu \, \frac{c\sqrt{h^2 + d^2} - \nu' d}{c\sqrt{h^2 + d^2} - \nu' d - \nu d}}$$

Capítulo XX

TERMOMETRIA Y DILATACIONES

A) TERMOMETRIA

FORMULARIO

$$\frac{C}{5} = \frac{R}{4} = \frac{F - 32}{9}$$

$$T = 273{,}16 + t$$

Problema 1. En una ocasión que la «premier» inglesa padeció una pulmonía, «The Times» comunicaba al país que la señora Thatcher sufría una fiebre de 104 grados. ¿Es posible?

Solución

Como en Inglaterra se usa la escala Fahrenheit, la temperatura en escala Celsius es:

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} \Rightarrow \frac{C}{5} = \frac{104-32}{9} = \frac{72}{9} \Rightarrow C = \frac{72 \times 5}{9} = 40^\circ\ \mathrm{C}$$

$\boxed{\text{Es posible.}}$

Problema 2. ¿A qué temperatura coinciden las indicaciones del termómetro centígrado y el Fahrenheit? ¿Y las del Fahrenheit y Reaumur?

Solución

1)

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} \Rightarrow 9C = 5F - 5 \times 32 \Rightarrow 9x = 5x - 5 \times 32 \Rightarrow \boxed{x = -40^\circ}$$

2)

$$\frac{R}{4} = \frac{F-32}{9} \Rightarrow 9R = 4F - 4 \times 32 \Rightarrow 9x' = 4x' - 4 \times 32 \Rightarrow \boxed{x' = -25{,}6^\circ}$$

Problema 3. Calcular en grados Fahrenheit el intervalo de temperatura equivalente a una diferencia de 55° en el termómetro centígrado.

Solución

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{5} &= \frac{y-32}{9} \\ \frac{x'}{5} &= \frac{y'-32}{9} \end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{\Delta x}{5} = \frac{\Delta y}{9} \Rightarrow \boxed{\Delta y = \frac{9}{5}\,\Delta x = \frac{9 \times 55}{5} = 99^\circ\ \mathrm{F}}$$

Problema 4. El cero absoluto de temperatura (escala Kelvin) equivale a $-273{,}16^\circ$ C. Calcular:

1. La temperatura del cero absoluto en grados Fahrenheit.

2. El intervalo que existe entre el cero absoluto y el punto de fusión del hielo en la escala Fahrenheit.

Solución

1)

$$\frac{{}^\circ C}{5} = \frac{{}^\circ F - 32}{9} \Rightarrow \frac{-273{,}16}{5} = \frac{x-32}{9} \Rightarrow \boxed{x = -\ 459{,}69^\circ\ \mathrm{F}}$$

2) El punto de fusión del hielo en la escala Fahrenheit es 32° F y el intervalo existente entre el 0° F y el cero absoluto es 459,69° F; luego:

$$\boxed{\Delta T = 459{,}69 + 32 = 491{,}69^\circ\ \mathrm{F}}$$

Problema 5. En un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm de mercurio introducimos un termómetro centígrado en hielo fundente y luego en vapor de agua hirviendo. El termómetro, mal graduado, marca 2° para el primero y 102,5° para el segundo. ¿Qué fórmula de reducción deberemos emplear para calcular la temperatura real en todos los casos? Si el termómetro marca 50°, ¿cuál es la verdadera temperatura? ¿A qué temperatura sería correcta la lectura del termómetro?

Solución

1) El cero de un termómetro correcto corresponde al 2 del mal graduado, y el 100 corresponde al 102,5°. El intervalo fundamental está, por tanto, dividido en:

$$102{,}5 - 2 = 100{,}5$$

Llamando A a la temperatura marcada por el incorrecto y C a la del centígrado perfecto, la fórmula será:

$$\boxed{\frac{C}{100} = \frac{A-2}{100{,}5}}$$

2)

$$\frac{C}{100} = \frac{50 - 2}{100{,}5} \quad \Rightarrow \boxed{C = \frac{48 \times 100}{100{,}5} = 47{,}76^\circ \text{ C}}$$

3) Si la indicación fuese correcta, se verificaría:

$$\frac{C}{100} = \frac{C - 2}{100{,}5} \quad \Rightarrow \quad 100{,}5\,C = 100\,C - 200 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{-200}{0{,}5} = -\,400^\circ \text{ C}$$

Lo cual es imposible, puesto que el cero absoluto es $-273{,}16^\circ$ C, temperatura mínima posible de conseguir.

Problema 6. Un termómetro centígrado mal graduado marca 8° en el punto de fusión del hielo y 99° en el de ebullición del agua, en un lugar en que la presión atmosférica es 760 mm. Resolver para este termómetro las cuestiones del problema anterior.

Solución

1) El intervalo fundamental será:

$$99 - 8 = 91$$

Luego la fórmula de reducción es:

$$\boxed{\frac{C}{100} = \frac{A - 8}{91}}$$

2)

$$\frac{C}{100} = \frac{50 - 8}{91} \quad \Rightarrow \boxed{C = \frac{4\,200}{91} = 46{,}15^\circ \text{ C}}$$

3)

$$\frac{C}{100} = \frac{C - 8}{91} \quad \Rightarrow \quad 91\,C = 100\,C - 800 \quad \Rightarrow \boxed{C = \frac{800}{9} = 88{,}9^\circ \text{ C}}$$

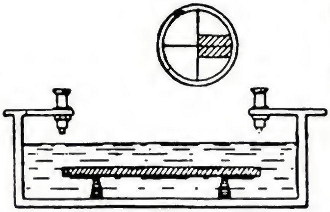
B) DILATACION DE SOLIDOS

FORMULARIO

$$L_t' = L_t(1 + \alpha \Delta t) \qquad \beta \simeq 2\alpha$$
$$S_t' = S_t(1 + \beta \Delta t) \qquad \gamma \simeq 3\alpha$$
$$V_t' = V_t(1 + \gamma \Delta t)$$

VARIACIÓN DE LA MASA ESPECÍFICA CON LA TEMPERATURA:

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \alpha t}$$



Problema XX-7

Problema 7. En el comparador de la figura se mide la dilatación de una barra de hierro de 1 m de longitud a 0° C, obteniéndose para los 50° C una dilatación de 0,06 cm. Calcular:

1. El coeficiente de dilatación lineal del hierro.

2. Si tiene una sección de 10 cm^2 a 0° C, ¿cuál es su sección y volumen a 100° C?

Solución

1)

$$\boxed{\alpha = \frac{L_t - L_0}{L_0 t} = \frac{0{,}060}{100 \times 50} = 12 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}}$$

2)

$$\beta = 2\alpha = 24 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

$$S_t = S_0(1 + \beta t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_t = 10(1 + 24 \times 10^{-6} \times 100) = 10{,}024\ \mathrm{cm}^2}$$

$$\gamma = 3\alpha = 36 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$$

$$\boxed{V_t = V_0(1 + \gamma t) = 10 \times 100(1 + 36 \times 10^{-6} \times 100) = 1\,003{,}6\ \mathrm{cm}^3}$$

Problema 8. Un herrero ha de colocar una llanta circular de hierro de 1 m de diámetro a una rueda de madera de igual diámetro. Con objeto de poder ajustarla, calienta la llanta hasta conseguir que su radio supere en 2 mm al de la rueda. Sabiendo que la temperatura ambiente es de 20° C y su coeficiente de dilatación lineal $12{,}2 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$, calcular la temperatura en grados centígrados a que debe calentarse la llanta para cumplir las condiciones expuestas.

Solución

$$l_{t'} = l_t(1 + \alpha\Delta t) \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_{t'} = 2\pi r_t(1 + \alpha\Delta t) \quad \Rightarrow \quad d_{t'} = d_t(1 + \alpha\Delta t) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{d_{t'} - d_t}{\alpha d_t} = \frac{4 \times 10^{-3}}{12{,}2 \times 10^{-6} \times 1} = 327^\circ\ \mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 20 + \Delta t = 347^\circ\ \mathrm{C}}$$

Problema 9. Un aro circular de alambre de hierro de radio 1 m está cruzado por un diámetro de alambre de cobre soldado al aro. ¿Seguirá siendo circular al calentarlo de 0° a 100° C? Calcular las nuevas longitudes de los dos alambres. (Coeficiente de dilatación del hierro = $12 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$. Coeficiente de dilatación del cobre = $19 \times 10^{-6}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}$.)

Solución

Longitud del aro a 0°:

$$l_0 = 2\pi r = 200\pi\ \mathrm{cm}$$

La longitud a 100° es:

$$\boxed{l_t = 200\pi(1 + 12 \times 10^{-6}\ 100) = 200{,}24\pi\ \mathrm{cm}}$$

La longitud del alambre de cobre (diámetro) a 0° es 2 m, y a 100° es:

$$\boxed{l' = 200(1 + 19 \times 10^{-6} \times 100) = 200{,}38 \text{ cm}}$$

El aro no será circular a 100°, puesto que al ser

$$l_t = l_0(1 + \alpha t) \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_t = 2\pi r_0(1 + \alpha t) \quad \Rightarrow \quad r_t = r_0(1 + \alpha t)$$

Y en el cobre:

$$r_t' = r_0(1 + \alpha' t)$$

entonces:

$$\alpha \neq \alpha' \quad \Rightarrow \quad r_t \neq r_t'$$

Problema 10. Un anillo de acero de 75 mm de diámetro interior a 20° C ha de ser calentado e introducido en un eje de latón de 75,05 mm de diámetro a 20° C.
1. ¿A qué temperatura ha de calentarse el anillo?
2. ¿A qué temperatura tendríamos que enfriar el conjunto para que el anillo saliera él solo del eje?
(Coeficiente de dilatación del acero: 12×10^{-6} °C^{-1}; coeficiente de dilatación del latón: 20×10^{-6} °C^{-1}.)

Solución

1)

$$l_t' = l_t(1 + \alpha \Delta t) \quad \Rightarrow \quad 75{,}05 = 75(1 + 12 \times 10^{-6} \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{75{,}05 - 75}{75 \times 12 \times 10^{-6}} \simeq 55° \text{ C}$$

$$\boxed{t' = t + \Delta t = 20 + 55 = 75° \text{ C}}$$

2) Los diámetros a la temperatura que nos piden deberán ser iguales:

$$l_t(1 + \alpha \Delta t') = l_t'(1 + \alpha' \Delta t')$$

(l_t, diámetro del anillo a 20° C; l_t', diámetro del eje a 20° C; α y α', coeficiente de dilatación del acero y del latón, respectivamente.) Luego:

$$\Delta t' = \frac{l_t - l_t'}{l_t'\alpha' - l_t\alpha} = \frac{75 - 75{,}05}{75{,}05 \times 20 \times 10^{-6} - 75 \times 12 \times 10^{-6}} = -83{,}2° \text{ C}$$

$$\boxed{t'' = t + \Delta t' = 20 - 83{,}2 = -63{,}2° \text{ C}}$$

Problema 11. La varilla de un reloj de lenteja sin compensar, que bate segundos a 0° C, es de latón. Averiguar cuánto se retrasa el reloj en 1 d si se introduce en un ambiente a 200° C. Coeficiente de dilatación del latón: $\alpha = 17 \times 10^{-6}$ °C^{-1}. (Considerar el péndulo como simple, de longitud la misma que la varilla.)

Solución

A 0° el semiperíodo (1 s) será:

$$1 = \pi \sqrt{\frac{l_0}{g}}$$

A 200°:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{l_0(1 + \alpha t)}{g}}$$

por división:

$$\tau = \sqrt{1 + \alpha t} = \sqrt{1 + 17 \times 10^{-6} \times 200} = \sqrt{1{,}0034}\ \text{s}$$

Si en $\sqrt{1{,}0034}$ s se produce 1 semioscilación
En 86 400 s x

$$\Rightarrow \quad x = \frac{86\,400}{\sqrt{1{,}0034}} = 86\,253 \text{ semioscilaciones}$$

El péndulo da en 1 d 86 400 − 86 253 = 147 semioscilaciones menos que en su marcha correcta:

$$\boxed{\text{El reloj se retrasará en } 147\ \text{s} = 2^{\text{m}}27^{\text{s}}.}$$

Problema 12. Una varilla de cobre de densidad uniforme y de sección constante oscila como un péndulo colgada de uno de sus extremos, con un período de 1,6 s, cuando se encuentra a una determinada temperatura ambiente. Siendo el coeficiente de dilatación lineal del cobre $19 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$, determínese el incremento de temperatura que habría que darle al ambiente para que su período aumente en 3 milésimas de s.

Solución

El período a la temperatura inicial t es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} Ml^2}{Mg \frac{l}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

y a la temperatura $t + \Delta t$ será:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{2l(1 + \alpha \Delta t)}{3g}}$$

dividiendo los dos:

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 + \alpha \Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\left(\frac{T'}{T}\right)^2 - 1}{\alpha} = \frac{\left(\frac{1{,}603}{1{,}6}\right)^2 - 1}{19 \times 10^{-6}} = 197°\ \text{C}}$$

C) DILATACION DE LIQUIDOS

FORMULARIO

$$V_t = V_t'(1 + \gamma \Delta t)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} \text{ (excepto para el agua)}$$

Problema 13. La densidad del mercurio a 0° C es 13,6 g/cm³; su coeficiente de dilatación, 182×10^{-6} °C⁻¹. Calcular la densidad del mercurio a 100° C.

Solución

$$\boxed{\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t} = \frac{13{,}6}{1 + 182 \times 10^{-6}\,100} = 13{,}36 \text{ g/cm}^3}$$

Problema 14. Una vasija de cinc (coeficiente de dilatación lineal: 29×10^{-6} °C^{-1}) está llena de mercurio a 100° C, teniendo entonces una capacidad de 10 l. Se enfría hasta 0° C. Calcular la masa de mercurio a 0° C que hay que añadir para que la vasija quede completamente llena (coeficiente de dilatación del mercurio: 182×10^{-6} °C^{-1}). Densidad del mercurio a 0° C,· 13,6 g/cm³.

Solución

El volumen de la vasija a 0° C quedará determinado por la ecuación:

$$V_t = V_0(1 + \gamma t)$$

en la que:

$$\gamma = 3 \times 29 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1} = 87 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$$

$$V_t = 10 \text{ l} \qquad t = 100°\text{ C}$$

por tanto:

$$V_0 = \frac{10}{1 + 87 \times 10^{-4}} = 9{,}9137 \text{ l} = 9\,913{,}7 \text{ cm}^3$$

El volumen del mercurio a 0° quedará determinado por la misma ecuación en la que $\gamma' = 182 \times 10^{-6}$ °C^{-1}:

$$V'_0 = \frac{V_t}{1 + \gamma' t} = \frac{10}{1 + 182 \times 10^{-4}} = 9{,}8212 \text{ l} = 9\,821{,}2 \text{ cm}^3$$

La diferencia es el volumen que queda por llenar:

$$V_0 - V'_0 = 9\,913{,}7 - 9\,821{,}2 = 92{,}5 \text{ cm}^3$$

La masa del mercurio es:

$$\boxed{M = \rho V = 13{,}6 \times 92{,}5 = 1\,258 \text{ g}}$$

Problema 15. Una vasija de Zn está llena de mercurio a 0° C, teniendo una capacidad de 5 l. Calcular el volumen de mercurio que se derrama a 100° por efecto de la mayor dilatación de este último. (Tomar los datos necesarios del problema anterior.)

Solución

$$\gamma = 87 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$$

$$V_t = V_0(1 + \gamma t) = 5\,000(1 + 87 \times 10^{-6} \times 100) = 5\,043{,}5 \text{ cm}^3$$

El volumen del mercurio a 100° es:

$$V_t' = 5\,000(1 + 182 \times 10^{-6} \times 100) = 5\,091 \text{ cm}^3$$

El volumen de mercurio que se derrama a 100° C es:

$$\boxed{x = V_t' - V_t = 5\,091 - 5\,043{,}5 = 47{,}5 \text{ cm}^3}$$

D) DILATACION DE GASES PERFECTOS

FORMULARIO

$$pV = nRT \quad \left| \quad \begin{array}{l} n = \dfrac{m}{M} \\ R = \dfrac{p_0 v_0}{T_0} = 0{,}082 \dfrac{\text{atm} \cdot \text{l}}{°\text{K} \cdot \text{mol}} = 8{,}314 \dfrac{\text{J}}{°\text{K} \cdot \text{mol}} \end{array} \right.$$

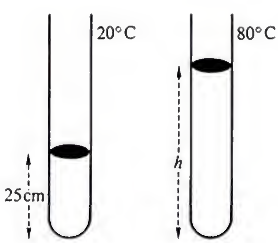
$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad \left| \quad \rho_t = \rho_0 \frac{p}{p} \frac{T_0}{T} \right.$$

$$\rho_0 = \frac{M}{22\,000} \text{ g/cm}^3 \qquad m = V\rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}$$

M = masa molecular.

LEY DE DALTON:

La presión que ejerce una mezcla de gases es la suma de las presiones que ejercerían cada uno de ellos, independientemente, en el mismo recinto.



Problema XX-16

Problema 16. En un tubo de vidrio de sección uniforme, cerrado por su extremo inferior, hay aire encerrado bajo una gota de mercurio. A la temperatura de 20° el aire encerrado en el tubo alcanza una altura de 25 cm. ¿Qué altura alcanzará cuando el tubo se calienta a 80°?

Solución

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \qquad p = p' \;\Rightarrow\; \frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \;\Rightarrow\; \frac{25S}{293} = \frac{hS}{353} \;\Rightarrow\; \boxed{h = \frac{353 \times 25}{293} = 30 \text{ cm}}$$

Problema 17. **1.** Una vasija de 1 l contiene 0,05 moles de hidrógeno a 20° C. Calcular la presión a que se encuentra el gas.
Se abre un momento la llave y parte del gas sale a la atmósfera.
2. Calcular la masa de hidrógeno que queda en la vasija, siendo la presión exterior exactamente 1 atm.
3. ¿A qué temperatura se debe calentar el gas que ha quedado, cerrada la vasija, para que la presión recobre el valor que tenía inicialmente?

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{nRT}{V} = \frac{0{,}05 \times 0{,}082 \times 293}{1} = 1{,}20 \text{ atm}}$$

2) Queda 1 l de H_2 a 20° y 1 atm:

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad 1 \times 1 = \frac{m}{2} 0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 0{,}083 \text{ g}}$$

3)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1 \times 1}{293} = \frac{1{,}20 \times 1}{T'} \quad \Rightarrow \quad T' = 351{,}6° \text{ K}$$

$$\boxed{t' = T' - 273 = 351{,}6 - 273 = 78{,}6° \text{ C}}$$

Problema 18. Una botella de acero de 10 l de capacidad tiene una llave que permite ponerla en comunicación con la atmósfera. La presión exterior es de 76 cm de mercurio y se supone que la botella no se dilata. Averiguar:

1. Cuánto pesa el aire contenido en la botella si su temperatura es de 0° C y su presión de 114 cm de mercurio, estando cerrada la llave.

2. Sin abrir la llave se calienta la botella hasta 100° C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior?

3. Se mantiene la temperatura a 100° C y se abre la llave. ¿Cuánto pesará el aire que quede dentro de la botella?

4. Finalmente se cierra la llave y se enfría todo a 0° C. ¿Cuál será entonces la presión del aire interior?

Peso específico del aire en condiciones normales: 1,293 g/l.

Solución

1)

$$pV = nRT \qquad M_{aire} = 22{,}4 \times 1{,}293 = 28{,}96 \text{ g}$$

$$\frac{114}{76} 10 = \frac{m}{28{,}96} 0{,}082 \times 273 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 19{,}40 \text{ g}}$$

2)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{114 \times 10}{273} = \frac{p' 10}{373} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p' = 155{,}76 \text{ cm (Hg)}}$$

3) Quedan 10 l de aire a 76 cm (Hg) y a 100° C:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{76}{76} 10 = \frac{m}{28{,}96} 0{,}082 \times 373 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 9{,}47 \text{ g}}$$

4)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{76 \times 10}{373} = \frac{p' 10}{273} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p' = 55{,}62 \text{ cm (Hg)}}$$

Problema 19. Un tubo en U de sección uniforme de 1 cm^2 está cerrado por una de las ramas, conteniendo mercurio, y en la rama cerrada hay 15 cm de aire. El nivel del mercurio en la abierta está 10 cm más bajo que en la cerrada. Después se echa mercurio hasta que el nivel en la rama abierta se eleve en 10 cm sobre el de la rama cerrada. Entonces el volumen de aire se reduce y su altura es de 11,5 cm. Se desea saber:

1. La presión del aire en el primer caso.
2. La presión cuando se reduce el volumen.
3. El valor de la presión atmosférica.
4. Si la temperatura durante la experiencia permaneció igual a 20° C, ¿cuántos moles de aire habrá encerrados en la rama corta?

Solución

1), 2) y 3) La presión del gas en el primer caso, en cm de Hg, es:

$$H = 10 + p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = H - 10$$

(H = presión atmosférica en cm de Hg.)

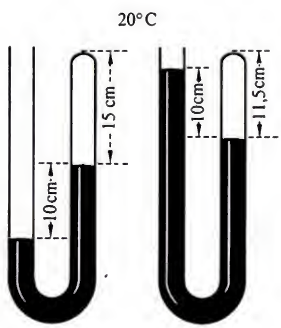
En el segundo caso es:

$$p_2 = H + 10$$

Por la ley de Boyle Mariotte:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \Rightarrow \quad (H - 10)S15 = (H + 10)S11{,}5 \quad \Rightarrow \boxed{H = 75{,}7 \text{ cm (Hg)}}$$

$$\boxed{p_1 = H - 10 = 65{,}7 \text{ cm (Hg)}} \Rightarrow \boxed{p_2 = H + 10 = 85{,}7 \text{ cm (Hg)}}$$



Problema XX-19

4) Si aplicamos al primer caso:

$$p_1V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \boxed{n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{65{,}7 \times 15 \times 10^{-3}}{76 \times 0{,}082 \times 293} = 0{,}54 \times 10^{-3} \text{ moles}}$$

Problema 20. Se tiene un depósito de 54 l de volumen. La presión manométrica es de 14 kg/cm^2, y la temperatura, de 27° C, estando lleno de oxígeno dicho depósito. Suponiendo que se cumplen las leyes de los gases perfectos. Se pide:

1. ¿Cuántos kg de oxígeno contiene el depósito?
2. ¿Cuál es el número de moles de oxígeno contenidos en él?
3. ¿Qué volumen ocuparía este gas, si su presión fuese de 1 atm y su temperatura de 50° C?
4. A esta temperatura y presión, ¿cuál es la densidad del oxígeno?

Solución

1) y 2) La presión absoluta del gas es:

$$p = [14 + 1{,}033] \text{ kg/cm}^2 = 15{,}033 \text{ kg/cm}^2 = \frac{15{,}033}{1{,}033} = 14{,}5 \text{ atm (físicas)}$$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad 14{,}5 \times 54 = n0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \boxed{n = 31{,}8 \text{ moles}}$$

$$\boxed{m = nM = 31{,}8 \times 32 = 1\,017{,}6 \text{ g} \simeq 1 \text{ kg}}$$

3)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{14{,}5 \times 54}{300} = \frac{1\,V'}{323} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V' = 843\ \mathrm{l}}$$

4)

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V'} = \frac{1\,017{,}6}{843 \times 10^3} = 1{,}2 \times 10^{-3}\ \mathrm{g/cm^3}}$$

Problema 21. En un recipiente cerrado de 2 l de capacidad hay 3,5 g de oxígeno a 20° C. La presión atmosférica es de 740 mm y la temperatura exterior de 20° C. Se abre el recipiente y se quiere saber:
1. ¿Entra o sale gas en el recipiente?
2. Cantidad de oxígeno que sale (o aire que entra) para alcanzar el equilibrio.
3. ¿A qué temperatura debería estar el oxígeno del recipiente para que al abrir éste no entrase ni saliese gas?
Un litro de aire en condiciones normales pesa 1,3 g. Peso atómico del oxígeno: 16.

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p2 = \frac{3{,}5}{32}\,0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad p \simeq 1{,}31\ \mathrm{atm} = 1\,000\ \mathrm{mm\ (Hg)}$$

Al ser mayor la presión interior, sale oxígeno del recipiente, hasta que se igualen las presiones, interior y exterior.

2) Calculo el O_2 que me queda y tendré el que ha salido:

$$pV = nRT \Rightarrow \quad \frac{740}{760}\,2 = \frac{m'}{32}\,0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad m' = 2{,}6\ \mathrm{g}$$

Luego sale:

$$\boxed{m_s = m - m' = 3{,}5 - 2{,}6 = 0{,}9\ \mathrm{g}}$$

3)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \qquad V = V' \quad \Rightarrow \quad \frac{1\,000}{293} = \frac{740}{T'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T' = 216{,}8°\ \mathrm{K}}$$

Problema 22. Un recipiente de 5 l de capacidad contiene 12 g de nitrógeno, siendo la temperatura de 27° C. La presión atmosférica es de 740 mm de mercurio. Determinar la presión del nitrógeno dentro del recipiente. Se abre éste el tiempo necesario para que se igualen la presión dentro del recipiente con la exterior; indicar si sale nitrógeno o entra aire, y en un caso u otro, cantidad en g del correspondiente gas que entra o sale. La temperatura no cambia durante la experiencia. Peso de 1 l de aire en condiciones normales = 1,3 g. Peso molecular del nitrógeno = 28.

Solución

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p5 = \frac{12}{28}\,0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p \simeq 2{,}11\ \mathrm{atm}}$$

Al ser mayor la presión del gas que la exterior, sale nitrógeno del recipiente. Calculo la masa que queda y obtendré la que ha salido:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{740}{760} 5 = \frac{m'}{28} 0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad m' = 5{,}5 \text{ g}$$

$$\boxed{m_s = m - m' = 6{,}5 \text{ g}}$$

Problema 23. Un recipiente cerrado de 50 l contiene hidrógeno medido a 15° C y presión de 1,5 atm. Determinar el peso del hidrógeno contenido en el recipiente. Si se pone en comunicación con el exterior, donde la presión es de 760 mm, determinar el peso y el volumen de hidrógeno medido en condiciones normales que sale del recipiente. La temperatura dentro y fuera de él es de 15° C.

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad 1{,}5 \times 50 = \frac{m}{2} 0{,}082 \times 288 \quad \Rightarrow \boxed{m = 6{,}3 \text{ g}}$$

2) Quedan en el recipiente:

$$\frac{760}{760} 50 = \frac{m'}{2} 0{,}082 \times 288 \quad \Rightarrow \quad m' = 4{,}2 \text{ g}$$

luego la masa que sale es:

$$\boxed{m = 6{,}3 - 4{,}2 = 2{,}1 \text{ g}}$$

Esta masa en condiciones normales ocupará un volumen:

$$m = V_0 \rho_0 \quad \Rightarrow \quad 2{,}1 = V_0 \frac{2}{22\,400} \quad \Rightarrow \boxed{V_0 = 23\,520 \text{ cm}^3 = 23{,}52 \text{ l}}$$

Problema 24. Dos muestras de gas criptón se señalan con las letras A y B. La muestra A ocupa 150 cm^3 a la presión de 300 mm de mercurio y a la temperatura de 15°. Se ha determinado su masa y se sabe que es 0,215 g. De la muestra B no se ha determinado su masa, pero se sabe que ocupa 250 cm^3 a la presión de 125 mm de mercurio y temperatura de 80°. Con estos datos se desea saber en cuál de las dos muestras hay mayor cantidad de gas y cuál es la densidad del criptón en condiciones normales.

Solución

Con la muestra A calculamos la masa molecular del criptón:

$$p_A V_A = n_A R T_A \quad \Rightarrow \quad \frac{300}{760} 150 \times 10^{-3} = \frac{0{,}215}{M} 0{,}082 \times 288 \quad \Rightarrow \quad M = 85{,}75 \text{ g}$$

La masa que hay en la muestra B será:

$$p_B V_B = n_B R T_B \quad \Rightarrow \quad \frac{125}{760} 250 \times 10^{-3} = \frac{m_B}{85{,}75} 0{,}082 \times 353 \quad \Rightarrow \quad m_B = 0{,}122 \text{ g}$$

$\boxed{\text{Luego hay más masa en la muestra } A.}$

El valor de la densidad en condiciones normales es:

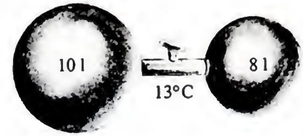
$$\boxed{\rho_0 = \frac{85{,}75}{22\,400} = 3{,}828 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3}$$

Problema 25. Un recipiente cuyo volumen es de 10 l contiene 16 g de oxígeno, siendo su temperatura de 13° C y está en comunicación por medio de una llave (inicialmente cerrada) con otro recipiente de volumen 8 l, contiendo oxígeno a la presión de 700 mm de mercurio y temperatura de 13° C. Se abre la llave que pone en comunicación ambos recipientes. Determinar:

1. Masa inicial del oxígeno en el segundo recipiente.

2. Indicar de qué a cuál recipiente pasa oxígeno y cantidad del mismo que pasa.

3. Presión final del gas, una vez que se ha alcanzado el equilibrio.



Problema XX-25

Solución

1)

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; \frac{700}{760}\,8 = \frac{m}{32}\,0{,}082 \times 286 \;\Rightarrow\; \boxed{m = 10\text{ g}}$$

2) y 3) Al abrir la llave me quedan 18 l de O_2 de masa, 26 g y a $T = 286°$ K. Luego la presión final será:

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; p\,18 = \frac{26}{32}\,0{,}082 \times 286 \;\Rightarrow\; \boxed{p = 1{,}06\text{ atm}}$$

Calculemos ahora la masa que hay en el primer recipiente a la presión de 1,06 atm en los 10 l y a $T = 286°$ K:

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; 1{,}06 \times 10 = \frac{m}{32}\,0{,}082 \times 286 \;\Rightarrow\; m = 14{,}6\text{ g}$$

Luego pasan del 1) al 2):

$$\boxed{m = 16 - 14{,}6 = 1{,}4\text{ g}}$$

Problema 26. Dos esferas A y B, de 5 y 10 l de capacidad, contienen gas oxígeno. La esfera A contiene 96 g de oxígeno, y la B, 64. La temperatura de ambas es de 20° C. Si se ponen en comunicación, calcular:

1. La presión del equilibrio.

2. Cantidad de oxígeno que pasa de una esfera a otra.

3. Si una vez en equilibrio las dos esferas cerramos la comunicación entre ellas y comunicamos la esfera A con la atmósfera, ¿qué cantidad de oxígeno contendrá en el nuevo equilibrio? [Presión atmosférica: 748 mm (Hg).]

Solución

1) Las condiciones después de puestas en comunicación son:

$$\left.\begin{array}{l} m = 160\text{ g} \\ V = 15\text{ l} \\ T = 293°\text{ K} \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \boxed{p = \frac{nRT}{V} = \frac{160 \times 0{,}082 \times 293}{32 \times 15} = 8\text{ atm}}$$

2) En el equilibrio en la esfera A hay una masa de O_2:

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; 8 \times 5 = \frac{m}{32}\,0{,}082 \times 293 \;\Rightarrow\; m = 53{,}3\text{ g}$$

Han pasado de A a B:

$$\boxed{m = 96 - 53{,}3 = 42{,}7\text{ g}}$$

3)

$$\frac{748}{760}\,5 = \frac{m}{32}\,0{,}082 \times 293 \;\Rightarrow\; \boxed{m = 6{,}5\text{ g}}$$

Problema 27. Un globo esférico de goma de 20 cm de diámetro, que contiene aire a 20° C y presión de 80 cm de Hg, se lastra con una piedra y se echa a un lago cuyo agua está a 4° C. Al llegar al fondo se comprueba que su diámetro se ha reducido a 18 cm.

1. ¿Qué masa de aire contiene el globo?
2. ¿Qué presión soporta el globo en el fondo del lago?
3. ¿Qué profundidad tiene el lago?
DATOS: Densidad del mercurio = 13,6 g/cm^3. Peso molecular medio del aire = 28,8.

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{80}{76}\,\frac{4}{3}\,\pi 10^3 \times 10^{-3} = \frac{m}{28{,}8}\,0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 5{,}28 \text{ g}}$$

2)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{80\,\frac{4}{3}\,\pi 10^3 \times 10^{-3}}{293} = \frac{p'\,\frac{4}{3}\,\pi 9^3 \times 10^{-3}}{277}$$

$$\boxed{p' = \frac{80 \times 10^3 \times 277}{9^3 \times 293} \text{ cm} = 103{,}7 \text{ cm}}$$

3)

$$\Delta p = \rho g h \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{[103{,}7 - 80]\,13{,}6 \times 980}{10 \times 1\,000 \times 9{,}8} \text{ m} = 3{,}2 \text{ m}}$$

Problema 28. En un recipiente de volumen 10 l se han introducido 15 g de oxígeno (peso atómico: 16) y 8 g de nitrógeno (peso atómico: 14). La temperatura es de 27° C. Determinar:

1. La presión parcial del nitrógeno en el recipiente.
2. La presión total de la mezcla gaseosa.
3. ¿A qué temperatura habría que enfriar el recipiente para que la presión de la mezcla gaseosa fuese de 760 mm de mercurio?

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad p_N 10 = \frac{8}{28}\,0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_N = 0{,}70 \text{ atm}}$$

2)

$$p = p_N + p_O$$

$$p_O 10 = \frac{15}{32}\,0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad p_O = 1{,}15 \text{ atm}$$

$$\boxed{p = 0{,}70 + 1{,}15 = 1{,}85 \text{ atm}}$$

3)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \qquad V = V' \quad \Rightarrow \quad \frac{1{,}85}{300} = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 162° \text{ K} = -\ 111° \text{ C}}$$

Problema 29. Se tiene un recipiente de 10 l que contiene nitrógeno medido a 0° C y 1,5 atm; se introduce en él 5 g de oxígeno, sin cambiar la temperatura. Determinar:
1. Presión final de la mezcla gaseosa.
2. Peso del nitrógeno existente.
3. Presión del oxígeno en la mezcla.

Solución

1) y 3)

$$p = p_N + p_O$$

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; p_O 10 = \frac{5}{32}\,0{,}082 \times 273 \;\Rightarrow\; \boxed{p_O = 0{,}35 \text{ atm}}$$

$$\boxed{p = 1{,}5 + 0{,}35 = 1{,}85 \text{ atm}}$$

2)

$$p_N V = nRT \;\Rightarrow\; 1{,}5 \times 10 = \frac{m}{28}\,0{,}082 \times 273 \;\Rightarrow\; \boxed{m = 18{,}8 \text{ g}}$$

Problema 30. En un recipiente de volumen 5 l, en condiciones normales, y que contiene aire seco, se introducen 2 l de nitrógeno medido a 760 mm y 27° C, siendo la temperatura final de la mezcla de 10° C. Determinar:
1. Masa del nitrógeno que se ha introducido.
2. Presión final de la mezcla.
3. ¿A qué temperatura hay que enfriar la mezcla para que la presión de ella sea de 1 atm?

Solución

1)

$$pV = nRT \;\Rightarrow\; \frac{760}{760}\,2 = \frac{m}{28}\,0{,}082 \times 300 \;\Rightarrow\; \boxed{m = 2{,}3 \text{ g}}$$

2) La presión parcial del nitrógeno se calcula por:

$$\frac{pV}{p_N V'} = \frac{T}{T'} \;\Rightarrow\; \frac{760 \times 2\,000}{p_N 5\,000} = \frac{300}{283} \;\Rightarrow\; p_N = 286{,}8 \text{ mm (Hg)}$$

La presión parcial del aire se calcula por:

$$\frac{pV}{p_A V} = \frac{T}{T'} \;\Rightarrow\; \frac{760\,V}{p_A V} = \frac{273}{283} \;\Rightarrow\; p_A = 787{,}8 \text{ mm (Hg)}$$

$$\boxed{p_{\text{total}} = p_N + p_A = 286{,}8 + 787{,}8 = 1\,074{,}6 \text{ mm (Hg)}}$$

3)

$$\frac{pV}{p'V'} = \frac{T}{T'} \;\Rightarrow\; \frac{1\,074{,}6\,V}{760\,V} = \frac{283}{273 + t} \;\Rightarrow\; \boxed{t = -\,73° \text{ C}}$$

Problema 31. Un cilindro metálico de 2 dm^2 de sección está cerrado por un émbolo de peso despreciable y que se desplaza sin rozamiento, y contiene aire a 0° C y presión 76 cm de Hg, cuando el émbolo está a 50 cm del fondo del cilindro.

1. Calcular la fuerza necesaria sobre el émbolo para mantenerlo a 30 cm del fondo del cilindro, siguiendo la temperatura interior a 0° C.

2. Calcular la presión del interior del cilindro, si se introducen 6 g de oxígeno, sin dejar salir nada del aire, y se calienta el cilindro hasta 105° C, siguiendo el émbolo a 30 cm del fondo.

Solución

1)

$$pV = p'V' \quad \Rightarrow \quad p' = \frac{pV}{V'} = \frac{1 S 50}{S 30} = \frac{5}{3} \text{ atm}$$

Como inicialmente la fuerza F que actúa sobre el aire (debida a la atmósfera y al peso del pistón) producía 76 cm = 1 atm, la fuerza que tenemos que hacer sobre el pistón tendrá que producir una presión:

$$p'' = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \text{ atm} = \frac{2 \times 1{,}033}{3} \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 0{,}69 \text{ kp/cm}^2$$

luego:

$$\boxed{F' = p''S = 0{,}69 \times 200 = 138 \text{ kp}}$$

2) El número de moles de aire que contiene el cilindro es:

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{1 \times 2 \times 5}{0{,}082 \times 273} \text{ moles}$$

Los 6 g de O_2 son:

$$n = \frac{6}{32} = \frac{3}{16} \text{ moles}$$

El número total de moles es:

$$n = \frac{10}{0{,}082 \times 273} + \frac{3}{16} \text{ moles}$$

$$\boxed{p = \frac{nRT}{V} = \frac{\left[\dfrac{10}{0{,}082 \times 273} + \dfrac{3}{16}\right] 0{,}082 \times 378}{3 \times 2} \simeq 3{,}3 \text{ atm}}$$

Problema 32. La velocidad de propagación del sonido en un gas viene dada por la expresión:

$$c = \sqrt{\frac{1{,}4RT}{M}}$$

en donde R = constante de los gases ideales, T = temperatura absoluta y M = peso molecular.

1. ¿Qué tanto por ciento de vapor de agua tendrá una mezcla de vapor de agua + aire en la cual se propaga el sonido con la misma velocidad que en el nitrógeno?

2. ¿Cuánto valdría esta velocidad a 100° C?
3. ¿Qué error se cometería si se considerase en su lugar el valor de 340 m/s o valor normal de la velocidad del sonido en el aire a 20° C?
DATOS: Peso molecular del agua: 18. Peso molecular aparente del aire: 28,8. Peso molecular del nitrógeno: 28.

Solución

1)

$$28 = \frac{28{,}8x + 18(100 - x)}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 92\ \%\ \text{de aire}$$

luego tendrá $\boxed{8\ \%}$ de vapor de agua.

2)

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{1{,}4 \times 8{,}314 \times 10^7(273 + 100)}{28}} = 394\ \text{m/s}}$$

3)

$$\varepsilon_a = (c - 340) = 54\ \text{m/s} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_r = \frac{c - 340}{c} = 0{,}14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{14\ \%}$$

Capítulo XXI

TEORIA CINETICO MOLECULAR

FORMULARIO

$p = \dfrac{1}{3}\, mn\overline{c^2}$	p = presión m = masa de una molécula n = número de moléculas por cada cm^3 c = velocidad cuadrática media
$E = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{R}{N}\,T = \dfrac{3}{2}\,kT$	E = energía media R = constante de los gases N = número de Avogadro T = temperatura absoluta

Problema 1. Calcular la velocidad cuadrática media de las moléculas del gas hidrógeno, en condiciones normales.

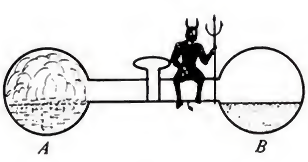
Solución

$$p = \frac{1}{3}\, mn\overline{c^2} \Rightarrow \bar{c} = \sqrt{\frac{3p}{mn}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

Considerando el gas en condiciones normales: p = 760 mm de Hg; t = 0° C

$$\rho = \frac{M}{22\,400} \qquad (M = \text{masa molecular})$$

$$\boxed{\bar{c} = \sqrt{\frac{3 \times 76 \times 13{,}6 \times 980 \times 22\,400}{2}} = 1{,}8 \times 10^5 \text{ cm/s} = 1{,}8 \text{ km/s}}$$



Problema XXI-2

Problema 2. Maxwell soñó con un ser, un demonio, que abriendo y cerrando una compuerta entre dos recipientes con gas a la misma temperatura dejase pasar de B a A las moléculas rápidas y de A a B las lentas. Si existía agua en los dos recipientes, pronto veríamos hervir al agua en A y formarse hielo en B. ¿Por qué?

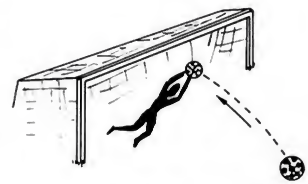
Solución

Según la teoría cineticomolecular, la temperatura absoluta y la energía cinética *media* de las moléculas son proporcionales:

$$E = \frac{3}{2} kT$$

k es una constante universal (constante de Boltzman $= R/N$, siendo R la constante universal de los gases perfectos y N el número de Avogadro). La selección de moléculas rápidas en A y lentas en B haría aumentar la energía cinética en A y disminuiría en B, aumentando y disminuyendo, respectivamente, la temperatura de los recintos.

Problema 3. ¿Es posible que, colocado un balón frente a una portería de fútbol, actuasen las moléculas del aire, «en calma» aparente, de delantero centro y de un fuerte «punterazo» lograsen un gol imparable?



Problema XXI-3

Solución

Si un capricho de azar hiciese que en un instante las moléculas rápidas tuviesen componente *hacia* la portería y las lentas en sentido contrario, el hecho se realizaría, siendo así *posible,* aunque su *probabilidad* sea prácticamente nula.

Problema 4. Calcular la energía cinética molar de traslación de un gas a 0° C.

Solución

Según el principio de equipartición de la energía, a cada molécula y por cada grado de libertad le corresponde una energía:

$$\frac{1}{2} kT$$

Siendo 3 los grados de libertad en la traslación, la energía de cada molécula es:

$$\frac{3}{2} kT$$

La energía molar se obtiene multiplicando esta expresión por el número de Avogadro:

$$E = \frac{3}{2} kNT = \frac{3}{2} RT$$

ya que el producto de la constante de Boltzman por N es la constante universal de los gases perfectos R. Sustituyendo en el sistema CGS:

$$E = \frac{3}{2} \frac{76 \times 13{,}6 \times 980 \times 22\,400}{273{,}16} 273{,}16 \text{ ergios}$$

Dividiendo el resultado por 10^7, obtenemos «julios». El cálculo se simplifica, considerando que:

$$R \simeq 2 \text{ cal/°K mol} = 2 \times 4{,}18 \text{ J/°K mol}$$

$$\boxed{E = \frac{3}{2}\, 2 \times 4{,}18 \times 273{,}16 \text{ J} = 3\,425 \text{ J}}$$

Problema 5. Calcular a qué altura podría ser elevado sobre la Tierra un hombre de 70 kg por la energía de traslación de 100 g de hidrógeno a 100° C. (No se tiene en cuenta la variación del peso con la altura.)

Solución

Como la masa de un mol de hidrógeno es 2 g, en los 100 g hay 50 moles. La energía de traslación a 0° C será la de un mol = 3 425 J (según el problema anterior), multiplicada por 50:

$$E_0 = 3\,425 \times 50 \text{ J}$$

Las energías son proporcionales a las temperaturas absolutas:

$$\frac{E_0}{E_{100}} = \frac{273{,}16}{373{,}16} = \frac{3\,425 \times 50}{E_{100}} = \frac{273{,}16}{373{,}16} \Rightarrow E_{100} = \frac{3\,425 \times 50 \times 373{,}16}{273{,}16} \simeq 233\,942 \text{ J} = 23\,871 \text{ kgm}$$

Suponiendo el peso del hombre de 70 kg como constante, la altura a que podría ser elevado sería:

$$\boxed{h = \frac{23\,871}{70} = 341 \text{ m}}$$

Problema 6. Calentamos 1° C a 1 mol de un gas «biatómico». Calcular la variación de energía cinética molar.

Solución

Las moléculas de un gas biatómico tienen 5 «grados de libertad» las posibilidades de traslación a lo largo de los 3 ejes, más 2 posibilidades de rotación alrededor de 2 ejes perpendiculares al que une los átomos.
La energía molar será:

$$E = \frac{5}{2} RT$$

y el incremento de energía al variar la temperatura:

$$\boxed{\Delta E = \frac{5}{2} R\Delta T = \frac{5}{2} 2 \times 4{,}18 \times 1 = 20{,}9 \text{ J}}$$

Problema 7. Cincuenta y seis gramos de nitrógeno (peso molecular: 28) están a la temperatura de 27° C. Se pide calcular:
1. La energía cinética total de sus moléculas ($R = 8$ J/°K · mol).
2. Si esta energía cinética se convirtiese totalmente en trabajo en 30 s, ¿cuántos CV desarrollaría?
3. Suponiendo que la masa de nitrógeno ocupa un volumen de 10 l a la citada temperatura, ¿qué presión ejercerá?

Solución

1) La energía cinética de n moles de gas biatómico (5 grados de libertad) es:

$$\boxed{E = \frac{5}{2} nRT = \frac{5}{2} \frac{56}{28} 8 \times 300 = 12\,000 \text{ J}}$$

2)

$$\boxed{P = \frac{12\,000}{30 \times 9{,}8 \times 75} \text{ CV} = 0{,}54 \text{ CV}}$$

3)

$$pV = nRT \Rightarrow p\,10 = \frac{56}{28} 0{,}082 \times 300 \Rightarrow \boxed{p = 4{,}92 \text{ atm}}$$

Capítulo XXII

EL CALOR Y SUS EFECTOS. HIGROMETRIA. GASES REALES. DISOLUCIONES

A) MEZCLAS

FORMULARIO

$\Delta Q = Mc\Delta t$	ΔQ = calor M = masa c = calor específico Δt = intervalo de temperatura
$C = Mc$	C = capacidad calorífica o equivalente en agua de un cuerpo
$Q = Ml$	l = calor latente de cambio de estado

Problema 1. Calcular la temperatura final de una mezcla de 10 y 80 l de agua cuyas temperaturas respectivas son 70° C y 20° C.

Solución

$$10\,(70 - t) = 80(t - 20) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{2\,300}{90} = 25{,}6°\ \mathrm{C}}$$

Problema 2. En un calorímetro que contiene 440 g de agua a 9° C se introduce un trozo de hierro de masa 50 g a la temperatura de 90° C; la temperatura del equilibrio es 10° C. Calcular el calor específico del hierro.

Solución

$$440(10 - 9) = 50c(90 - 10) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{440}{4\,000} = 0{,}11\ \mathrm{cal/g \cdot °C}}$$

Problema 3. En un vaso calorimétrico de cobre, cuya masa es 40 g, se ponen 380 g de alcohol; el conjunto está a una temperatura de 8° C. Se introduce en el alcohol un trozo de cobre de 122 g a la temperatura de 50° C. La temperatura de equilibrio es 10° C. Calcular el calor específico del alcohol. Calor específico del cobre: 0,095 cal/g · °C.

Solución

$$40 \times 0{,}095(10 - 8) + 380c(10 - 8) = 122 \times 0{,}095(50 - 10) \Rightarrow \boxed{c = 0{,}6 \text{ cal/g} \cdot °\text{C}}$$

Problema 4. En un depósito se tiene 1 m^3 de agua a 5° C; se dispone de agua a 65° C que sale por un grifo a razón de 100 cm^3/s. Calcular el tiempo que debe estar abierto el grifo para que la temperatura de la mezcla sea de 35° C, despreciando toda influencia del medio exterior.

Solución

Un metro cúbico de agua (10^6 g) necesita para pasar de 5° a 35° C:

$$Q = 10^6(35 - 5) = 3 \times 10^7 \text{ cal}$$

Una masa de M g de agua al pasar de 65° a 35° C cede:

$$Q = M(65 - 35) = 30M \text{ cal}$$

Las dos cantidades de calor deben ser iguales por el principio de las mezclas; por tanto:

$$3 \times 10^7 = 30M \Rightarrow M = 10^6 \text{ g}$$

Cada segundo vierte el grifo 100 cm^3, es decir, 100 g. Luego el tiempo necesario para disponer de 10^6 g de agua caliente es:

$$\boxed{t = \frac{10^6}{100} = 10^4 \text{ s} = 2^h 46^m 40^s}$$

Problema 5. Cien gramos de una aleación de oro y cobre, a la temperatura de 75,5° C, se introducen en un calorímetro con 502 g de agua a 25° C; la temperatura del equilibrio térmico es de 25,5° C. Calcular la composición de la aleación. Calor específico del oro: 0,031 cal/g · °C. Calor específico del cobre: 0,095 cal/g · °C.

Solución

Cien gramos de aleación están compuestos de x gramos de cobre y $(100 - x)$ g de oro. x gramos de cobre al pasar de 75,5° a 25,5° C ceden:

$$Q_1 = x0{,}095(75{,}5 - 25{,}5) = 4{,}75x \text{ cal}$$

$100 - x$ g de oro ceden:

$$Q_2 = (100 - x)0{,}031(75{,}5 - 25{,}5) = 155 - 1{,}55x \text{ cal}$$

La totalidad del calor cedido será:

$$Q = 4{,}75x + 155 - 1{,}55x = 155 + 3{,}2x \text{ cal}$$

El agua se ha calentado absorbiendo:

$$Q = 502(25{,}5 - 25) = 251 \text{ cal}$$

Igualando las cantidades de calor cedido y absorbido:

$$155 + 3{,}2x = 251 \Rightarrow \boxed{x = 30 \text{ g de Cu}} \Rightarrow \boxed{100 - x = 70 \text{ g de Au}}$$

Problema 6. En un platillo de una balanza se coloca una tara invariable y en el otro se van colocando sucesivamente los objetos y pesas necesarios para establecer el equilibrio. a) Un calorímetro cuyo equivalente en agua son 8 g y pesas por valor de 390 g. b) El mismo calorímetro con cierta cantidad de agua a 32° y pesas por valor de 128 g. c) El mismo calorímetro con el agua que tenía y un bloque de hielo a 0° y pesas por valor de 118 g. Cuando el hielo se ha fundido la temperatura del agua ha descendido a 28°. Deducir de estos datos el calor de fusión del hielo.

Solución

La masa de agua a 32° C es:

$$M = 390 - 128 = 262 \text{ g}$$

La masa de hielo a 0° C es:

$$M' = 128 - 118 = 10 \text{ g}$$

Aplicando el principio de las mezclas nos queda:

$$(262 + 8)(32 - 28) = 10l + 10 \times 28 \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = 80 \text{ cal/g}}$$

Problema 7. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es despreciable hay 1 kg de hielo a −10° C. ¿Cuántos gramos de agua a 80° C hay que introducir en él para que la temperatura final sea de 10° C? Si en lugar de agua a 80° C se introduce vapor de agua a 100° C, ¿cuántos gramos de éste habría que introducir para que la temperatura final sea de 40° C? ¿Qué volumen ocupa el vapor de agua introducido si la presión a que se mide es de 700 mm de mercurio? Peso molecular del agua: 18.

Solución

1) Calor específico del hielo = 0,5 cal/g · °C:

$$M(80 - 10) = 10^3 \times 0{,}5 \times 10 + 10^3 \times 80 + 10^3 \times 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 1\,357 \text{ g}}$$

2) Calor de vaporización del agua = 540 cal/g:

$$M'540 + M'(100 - 40) = 10^3 \times 0{,}5 \times 10 + 10^3 \times 80 + 10^3 \times 40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M' = 208 \text{ g}}$$

3)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{700}{760} V = \frac{208}{18} 0{,}082 \times 373 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 384 \text{ l}}$$

Problema 8. Mezclamos 1 kg de agua a 95° C con 1 kg de hielo a −5° C. ¿Dispondremos de suficiente calor para fundir todo el hielo? Si es así, ¿A qué temperatura queda la mezcla? Calor específico del hielo: 0,5 cal/g · °C. Calor de fusión del hielo: 80 cal/g.

Solución

Un kilogramo de agua al pasar de 95° a 0° C cede:

$$Q_1 = 10^3 \times 95 = 95\,000 \text{ cal}$$

Un kilogramo de hielo necesita para pasar de $-5°$ a $0°$ C y fundirse:

$$Q_2 = 10^3 \times 0{,}5 \times 5 + 10^3 \times 80 = 82\,500 \text{ cal}$$

El agua caliente suministra, por tanto, las calorías necesarias para fundir todo el hielo; la temperatura final a que quedará el agua caliente será $t°$ y el agua procedente del hielo se calentará hasta tal temperatura. La igualación de los calores cedido y absorbido conduce a:

$$10^3(95 - t) = 10^3 \times 0{,}5 \times 5 + 10^3 \times 80 + 10^3 t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 6{,}25° \text{ C}}$$

Problema 9. Mezclamos 1 kg de agua a 50° C con 1 kg de hielo a $-20°$ C. ¿Disponemos de suficiente calor para fundir todo el hielo? En caso contrario, ¿qué masa de hielo queda sin fundir?

Solución

Un kilogramo de agua a 50° C cede al pasar a 0° C:

$$Q_1 = 10^3 \times 50 = 50\,000 \text{ cal}$$

Un kilogramo de hielo necesita para pasar de $-20°$ a $0°$ C y fundirse:

$$Q_2 = 10^3 \times 0{,}5 \times 20 + 10^3 \times 80 = 90\,000 \text{ cal}$$

El agua caliente no suministra, por tanto, las calorías necesarias para fundir el hielo, quedando una masa de éste sin fundir.

Llamando M a la masa fundida de hielo, se verifica:

$$10^3 \times 50 = 10^3 \times 0{,}5 \times 20 + 80M \quad \Rightarrow \quad M = 500 \text{ g}$$

Por tanto, quedan sin fundir $\boxed{500 \text{ g.}}$

Problema 10. Se mezclan en un calorímetro (equivalente en agua = 10 g) 100 g de hielo a $-10°$ C con 200 g de agua a 80° C. Determinar:
1. La temperatura final de la mezcla.
2. Cantidad de vapor de agua a 100° C que habría que introducir para que la temperatura final fuese de 90° C.

Solución

1) 200 g de agua al pasar de 80° a 0° C ceden:

$$Q_1 = 200 \times 80 = 16\,000 \text{ cal}$$

100 g de hielo a $-10°$ C (en el recipiente indicado) necesitan para fundirse:

$$Q_2 = 100 \times 0{,}5 \times 10 + 100 \times 80 + 10 \times 10 = 8\,600 \text{ cal}$$

luego disponemos de calor sobrado para fundir el hielo. La temperatura final estará comprendida entre 0° y 80° C.

$$200(80 - t) = 8\,600 + 110t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 24° \text{ C}}$$

2) El sistema ha quedado reducido a 300 g de agua (considerando el equivalente del calorímetro, 310) a 24° C. Para calentarlo hasta 90° C hará falta una masa de vapor que se obtiene:

$$310(90 - 24) = M540 + M(100 - 90) \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 37 \text{ g}}$$

Problema 11. En un vaso de cobre, abierto, que pesa 1,5 kg, conteniendo un bloque de hielo de 10 kg a la temperatura de $-10°$ C, se inyectan 5 kg de vapor de agua a 100° C. Se pide la temperatura final de la mezcla. Discútase el resultado obtenido e interprétese (calor específico del cobre: 0,08). Se pide, además, determinar cuál sería el peso del vapor a emplear para que la temperatura final de la mezcla sea 100°.

Solución

Para pasar el bloque de hielo de $-10°$ C a agua líquida a 100° C y calentar el vaso de cobre de $-10°$ a 100° C hacen falta un número de calorías dado por:

$$Q_1 = 10^4 \times 0{,}5 \times 10 + 10^4 \times 80 + 10^4 \times 100 + 1\,500 \times 0{,}08 \times 110 = 1\,863\,200 \text{ cal}$$

Al condensarse todo el vapor de agua a 100° C desprendería:

$$Q_2 = 5 \times 10^3 \times 540 = 2\,700\,000 \text{ cal}$$

sobra, por tanto, vapor de agua que borboteará en el líquido. La masa de vapor de agua condensada es la necesaria para proporcionar 1 863 200 cal.

$$1\,863\,200 = M540 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 3\,450 \text{ g}}$$

Problema 12. Por una tubería calentada en su punto medio con una llama invariable fluye agua a razón de 50 l por min. La temperatura de entrada es de 20° C y la de salida de 35° C. Otro líquido, de densidad 0,8 g/cm^3, circula a continuación por el mismo tubo calentado por la misma llama, pero con un caudal de 15 l por min. Las temperaturas en los dos extremos se estacionan ahora en 18° C y 68° C. Calcular con estos datos:

1. El calor específico del líquido.

2. El calor total absorbido por el líquido y el agua si el tiempo de circulación de cada uno de ellos fue de 1 h, admitiendo que no existen pérdidas por radiación.

Solución

1) En un minuto la cantidad de calor absorbido por los 50 l de agua es:

$$Q_1 = 50 \times 10^3(35 - 20) = 75 \times 10^4 \text{ cal}$$

luego:

$$75 \times 10^4 = 15 \times 10^3 c(68 - 18) \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 1 \text{ cal/g °C}}$$

2)

$$\boxed{Q_2 = 60 Q_1 = 60 \times 75 \times 10^4 = 45 \times 10^6 \text{ cal}}$$

Problema 13. En un recinto térmicamente aislado hay un litro de agua a 12° C. En ella se introducen 150 g de cobre a 200° C. ¿Qué cantidad de hielo fundente habrá que añadir para que, una vez fundido, la temperatura final sea de 0° C? ¿Qué temperatura se alcanzará si se añaden 100 g de hielo fundente? ¿Qué sucederá si se añaden 200 g de hielo fundente? Calor específico del cobre: 0,095 cal/g · °C.

Solución

Calculemos primero la temperatura final t del agua y cobre:

$$1\,000(t - 12) = 150 \times 0{,}095(200 - t) \quad \Rightarrow \quad t \simeq 15° \text{ C}$$

1)

$$10^3 \times 15 + 150 \times 0{,}095 \times 15 = 80M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 190 \text{ g}}$$

2)

$$10^3(15 - t') + 150 \times 0{,}095(15 - t') = 100 \times 80 + 100t' \quad \Rightarrow \quad \boxed{t' = 6° \text{ C}}$$

3) La temperatura final será 0° C y el sistema estará compuesto por:

1 190 g de agua
10 g de hielo
150 g de cobre

Problema 14. En un vaso Dewar que contiene 300 g de un líquido a 25° C se introducen 150 g de hielo a −6° C.
1. ¿Se fundirá todo el hielo suponiendo que el vaso está bien aislado?
2. Si no se funde totalmente, ¿qué masa de hielo subsistirá una vez alcanzado el equilibrio?
3. ¿A qué temperatura debería estar inicialmente el líquido para que se fundiera justamente el hielo y todo el sistema quedara a 0° C?
DATOS: Calor específico del líquido: 0,950 cal/g · °C. Equivalente en agua del vaso Dewar = 30 g de agua.

Solución

1) Calorías necesarias para fundir todo el hielo:

$$Q_1 = 150 \times 0{,}5 \times 6 + 150 \times 80 = 12\,450 \text{ cal}$$

Calorías cedidas por el líquido y el vaso al pasar de 25 a 0° C:

$$Q_2 = 300 \times 0{,}950 \times 25 + 30 \times 25 = 7\,875 \text{ cal}$$

luego $\boxed{\textit{no se funde todo el hielo.}}$

2) La cantidad de hielo que se funde será:

$$7\,875 = 150 \times 0{,}5 \times 6 + 80M \quad \Rightarrow \quad M = 93 \text{ g}$$

luego quedan:

$$\boxed{M' = 150 - 93 = 57 \text{ g de hielo}}$$

3)

$$300 \times 0{,}95t + 30t = 150 \times 0{,}5 \times 6 + 150 \times 80 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 40° \text{ C}}$$

Problema 15. En un recipiente aislado térmicamente hay 10 kg de hielo enfriado a −10° C. Se inyecta en el recinto 2 500 g de vapor de agua a 100° C. Se pide:
1. La temperatura y la composición de la mezcla una vez alcanzado el equilibrio térmico.
2. La cantidad de energía que podría obtenerse de este sistema si se le enfriara a 0° C.

Solución

1) ¿Se puede fundir el hielo con el calor desprendido por el vapor de H_2O, quedando al final H_2O líquida a 0° C?

La cantidad de calor necesaria Q para calentar y fundir el hielo es:

$$Q_1 = 10\,000 \times 0{,}5 \times 10 + 10\,000 \times 80 = 850\,000 \text{ cal}$$

Calor desprendido en la condensación y enfriamiento:

$$Q_2 = 2\,500 \times 540 + 2\,500 \times 100 = 1\,600\,000 \text{ cal}$$

El hielo se funde totalmente, ya que $Q_2 > Q_1$.
¿Se puede fundir el hielo y que el sistema sea agua líquida a 100° C?
La cantidad de calor necesaria Q para calentar y fundir el hielo y calentar el H_2O líquida, procedente de la fusión hasta 100° C, es:

$$Q_3 = 850\,000 + 10\,000 \times 100 = 1\,850\,000 \text{ cal}$$

Calor desprendido en la condensación del vapor de agua:

$$Q_4 = 2\,500 \times 540 = 1\,350\,000 \text{ cal}$$

Al ser $Q_4 < Q_3$, el calor de la condensación es insuficiente para que el sistema sea agua líquida a 100° C.

EL SISTEMA FINAL ES AGUA LÍQUIDA A UNA TEMPERATURA t COMPRENDIDA ENTRE 0° Y 100° C.

La ecuación que nos determina la temperatura de equilibrio es:

$$850\,000 + 10\,000t = 1\,350\,000 + 2\,500(100 - t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 60^\circ \text{ C}}$$

2) El sistema final son 12 500 g de agua líquida a 60° C. Al enfriar tal sistema a 0° obtenemos:

$$\boxed{Q = 12\,500 \times 60 = 75 \times 10^4 \text{ cal}}$$

B) CONDUCCION DE CALOR

FORMULARIO

LEY DE FOURIER:

$$Q = KS\,\frac{t_2 - t_1}{x}\,\tau$$

o su expresión diferencial:

$$Q = KS\,\frac{dt}{dx}$$

«La cantidad de calor que atraviesa un muro es directamente proporcional a su superficie, a la diferencia de temperatura entre sus dos caras y al tiempo, e inversamente proporcional al espesor.»
K = coeficiente de conductividad de la sustancia.

LEY DE NEWTON:

$$Q = hS(t_2 - t_1)\tau$$

«La cantidad de calor radiada por un cuerpo es directamente proporcional a su superficie, al tiempo y al exceso de temperatura del cuerpo sobre el ambiente (si la diferencia de temperatura no excede de unos 20°)».
h = coeficiente de radiación de una superficie.

Problema 16. Una caldera de hierro cuya superficie es de 2 m^2 y su espesor de 1 cm contiene agua a 80°. La temperatura del ambiente es de 30°, y se puede considerar como constante. Calcular la pérdida de calor por conducción, en 1 s. (Consideremos las superficies exterior e interior de la caldera prácticamente iguales y que no hay variación sensible en la temperatura del agua.) Coeficiente de conductividad del hierro: 0,2 cal/cm · s · °C.

Solución

Aplicando la ley de Fourier:

$$Q = KS\frac{t_2 - t_1}{e}\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 0{,}2 \times 2 \times 10^4\,\frac{80 - 30}{1} \times 1 = 2 \times 10^5 \text{ cal} = 200 \text{ kcal}}$$

Problema 17. Una vasija cilíndrica de hierro, cuyo radio es de 10 cm y su altura 20 cm, está cerrada herméticamente, conteniendo hielo a 0° C en su interior. El ambiente externo está a una temperatura constante de 25° C. El espesor de la chapa de hierro es de 0,1 cm. Calcular la masa de hielo fundida en un segundo, considerando el calor conducido a través de la chapa. Supongamos las superficies externa e interna del cilindro prácticamente iguales a la exterior. Calor de fusión de hielo: 80 cal/g. Conductividad del Fe: 0,2 cal/cm · s · °C.

Solución

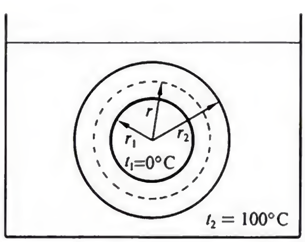
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi(rh + r^2) = 2\pi(10 \times 20 + 100) = 1\,885 \text{ cm}^2$$

$$Q = KS\frac{t_2 - t_1}{e}\tau = 0{,}2 \times 1\,885\,\frac{25}{0{,}1}\,1 = 94\,250 \text{ cal}$$

$$Q = \text{masa fundida} \times \text{calor de fusión} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{Q}{l} = \frac{94\,250}{80} = 1\,178 \text{ g}}$$

Problema 18. Un matraz esférico de vidrio de 20 cm de diámetro externo y de paredes gruesas (1 cm de espesor) se llena de hielo a 0° C (2 kg de hielo) y se introduce en agua hirviendo. Calcular el tiempo que tarda en fundirse el hielo, suponiendo que el matraz es una esfera perfecta. Coeficiente de conductividad del vidrio: 0,02 cal/cm · s · °C. Calor de fusión del hielo: 80 cal/g.

Solución



Problema XXII-18

La cantidad de calor conducido por el vidrio en 1 s viene dado por la fórmula:

$$Q = KS\frac{dt}{dr} = K4\pi r^2\frac{dt}{dr} \quad \Rightarrow \quad Q\frac{dr}{r^2} = 4\pi K dt \quad \Rightarrow \quad Q\int_1^2 \frac{dr}{r^2} = 4\pi K\int_1^2 dt$$

$$Q\left[-\frac{1}{r}\right]_1^2 = Q\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = Q\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = 4\pi K[t_2 - t_1] \quad \Rightarrow \quad Q = 4\pi K[t_2 - t_1]\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

$$Q = 4\pi 0{,}02 \times 100\,\frac{10 \times 9}{1} \text{ cal} = 2\,262 \text{ cal}$$

Este es el calor que llega al hielo cada segundo; el que se transmite en t segundos será: Qt

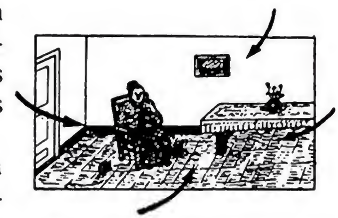
Para fundir 2 000 g de hielo hacen falta:

$$2\ 000 \times 80 = 160\ 000 \text{ cal}$$

Igualando valores:

$$2\ 262t = 160\ 000 \quad \Rightarrow \boxed{t = 70 \text{ s} = 1^{\text{m}}10^{\text{s}}}$$

Problema 19. Doña Ahorros tiene un cuartito interior donde hace labor las tardes de invierno. Arriba, abajo, a la izquierda y al fondo de la habitación viven vecinos que encienden la calefacción. Ella no la enciende y hace su labor calentita. La superficie de las paredes que transmiten calor es de 40 m^2 y tales paredes son de ladrillo, de 10 cm de espesor, y cuyo coeficiente de conductibilidad es 0,0015 cal/cm · s · °C.
El precio del carbón que gastan los vecinos es de 7 500 pesetas tonelada, y su calor de combustión es de 7 500 cal/g. Suponiendo 12 h diarias en que la diferencia media de temperaturas entre los ambientes sea de 10° C, ¿en cuántas pesetas perjudica doña Ahorros a sus vecinos en la temporada de invierno (4 meses)?



Problema XXII-19

Solución

El calor transmitido en 1 s es:

$$Q = KS\frac{t_1 - t_2}{e} = 15 \times 10^{-4} \times 40 \times 10^4 \frac{10}{10} = 600 \text{ cal}$$

El calor perdido en 120 d (4 meses) a 12 h diarias será:

$$Q = 600 \times 3\ 600 \times 12 \times 120 = 31\ 104 \times 10^5 \text{ cal}$$

Como cada gramo de carbón produce 7 500 cal, el número de gramos de carbón «perdidos» serán:

$$M = \frac{31\ 104 \times 10^5}{75 \times 10^2} = 414\ 720 \text{ g} \simeq 0{,}4 \text{ t}$$

Luego el perjuicio ha sido de:

$$\boxed{P = 0{,}4 \times 7\ 500 = 3\ 000 \text{ ptas}}$$

C) HIGROMETRIA

FORMULARIO

$$E = \frac{m}{m'} = \frac{p}{f}$$

E = estado higrométrico relativo o humedad relativa.
m = masa de agua por m^3.
m' = masa de agua por m^3 a saturación.
p = tensión de vapor de agua.
f = tensión máxima de vapor de agua.

Problema 20. Un recipiente de volumen 10 l contiene aire a la presión de 740 mm de mercurio y temperatura de 27° C. Humedad relativa del aire: 0,8. Determinar:

1. Peso del aire seco contenido en el recipiente.

2. Peso del vapor de agua contenido en el recipiente.

3. Cantidad de agua que habría que introducir para que el aire quede saturado a dicha temperatura.

Tensión del vapor de agua a 27° C: 27 mm de mercurio. Peso de 22,4 l de aire en condiciones normales: 29 g.

Solución

1) Llamando p_1 a la presión de vapor de agua y p_2 a la del aire seco:

$$p_1 + p_2 = 740 \text{ mm de Hg}$$

y como:

$$E = \frac{p_1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = Ef = 0,8 \times 27 = 21,6 \text{ mm de Hg}$$

luego:

$$p_2 = 740 - 21,6 = 718,4 \text{ mm de Hg}$$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{718,4}{760}\,10 = \frac{m_2}{29}\,0,082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_2 = 11 \text{ g}}$$

2)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{21,6}{760}\,10 = \frac{m_1}{18}\,0,082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_1 = 0,2 \text{ g}}$$

3) Si es m la masa a saturación:

$$E = \frac{m_1}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{m_1}{E} = \frac{0,2}{0,8} = 0,25 \text{ g}$$

luego habría que introducir:

$$\boxed{m' = m - m_1 = 0,05 \text{ g}}$$

Problema 21. Se tiene 1 m^3 de aire medido a 20° C y presión de 740 mm de mercurio, cuya humedad relativa es de 0,4. Determinar:

1. Los gramos de vapor de agua contenidos en el metro cúbico de aire.

2. ¿Cuántos gramos de agua hay que añadir a ese metro cúbico de aire para que quede saturado?

3. Si este aire saturado se enfría a 10° C, ¿cuánto vapor de agua se condensa?

DATOS: Tensión máxima del vapor de agua a 20° = 18 mm de mercurio. Tensión máxima del vapor de agua a 10° C = 9 mm de mercurio.

Solución

1) Llamando p_1 y m_1 a la presión de vapor de agua y a la masa de este vapor se obtienen:

$$E = \frac{p_1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = Ef = 0,4 \times 18 = 7,2 \text{ mm de Hg}$$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{7,2}{760}\,10^3 = \frac{m_1}{18}\,0,082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_1 = 7,1 \text{ g}}$$

2) Llamando m a la masa de vapor de agua cuando el metro cúbico de aire está a saturación a 20° C, se obtendrá:

$$E = \frac{m_1}{m} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{7{,}1}{0{,}4} = 17{,}7 \text{ g}$$

luego hay que añadir:

$$\boxed{m_2 = m - m_1 = 10{,}6 \text{ g}}$$

3) Llamando m' a la masa de vapor de agua cuando el metro cúbico de aire está a saturación a 10° C, se obtendrá:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{760}\, 10^3 = \frac{m'}{18}\, 0{,}082 \times 283 \quad \Rightarrow \quad m' = 9{,}2 \text{ g}$$

luego la masa m_c de vapor de agua que se condensa será:

$$\boxed{m_c = m - m' = 17{,}7 - 9{,}2 = 8{,}5 \text{ g}}$$

Problema 22. Se tienen 2 m^3 de aire medidos a 27° C a la presión de 760 mm y de humedad relativa 0,8. Determinar:

1. El peso de ese volumen de aire húmedo.

2. Cantidad en gramos de vapor de agua existente en ese volumen de aire.

3. Si se enfría a 10° C, ¿cuánto vapor de agua se condensa?

Tensión del vapor de agua a 27° C = 26 mm; a 10° C = 9 mm de mercurio. Peso de 1 l de aire seco en condiciones normales: 1,3 g.

Solución

1) y 2) La presión de vapor de agua se calcula:

$$E = \frac{p}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = fE = 26 \times 0{,}8 = 20{,}8 \text{ mm de Hg}$$

Presión del aire seco:

$$p_2 = 760 - 20{,}8 = 739{,}2 \text{ mm de Hg}$$

Llamando m_1 a la masa de vapor de agua y m_2 a la masa de aire seco, se calculan aplicando:

$$pV = nRT$$

$$\frac{739{,}2}{760}\, 2 \times 10^3 = \frac{m_2}{28{,}8}\, 0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2\,277 \text{ g}$$

$$\frac{20{,}8}{760}\, 2 \times 10^3 = \frac{m_1}{18}\, 0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_1 = 40 \text{ g}}$$

luego la masa total de los 2 m^3 de aire húmedo será:

$$\boxed{m = 2\,277 + 40 = 2\,317 \text{ g}}$$

3) La masa m' de agua a saturación en ese volumen y a 10° C es:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{760}\, 2 \times 10^3 = \frac{m'}{18}\, 0{,}082 \times 283 \quad \Rightarrow \quad m' = 18 \text{ g}$$

luego la masa de agua que se ha condensado es:

$$\boxed{m = 40 - 18 = 22 \text{ g}}$$

Problema 23. Un tubo barométrico, dispuesto como en la experiencia de Torricelli, tiene de longitud, desde el nivel del mercurio en la cubeta hasta su extremo superior, 1 m, y su sección es de 1 cm^2; la presión atmosférica es de 1 013 000 barias, y la temperatura, de 20° C. En la cámara barométrica se introducen 2 mg de agua. Determinar:

1. Altura de la columna barométrica antes de introducir el agua.
2. Altura de la columna barométrica después de introducir el agua.
3. ¿Qué cantidad de agua se ha evaporado?

Tensión máxima del vapor de agua a 20° C = 18 mm de mercurio.

Solución

1)

$$p = \rho g h \quad \Rightarrow \boxed{h = \frac{p}{\rho g} = \frac{1\,013\,000}{13{,}6 \times 980} = 76 \text{ cm}}$$

2) y 3) Al introducir agua en la cámara barométrica se evapora hasta ejercer una presión de 18 mm (Hg) si la cantidad de agua es suficiente para provocar tal presión en su evaporación. La cámara barométrica tendría, entonces, un volumen:

$$V = 100 - 76 + 1{,}8 = 25{,}8 \text{ cm}^3$$

La masa de vapor de agua, correspondiente a tal volumen, a la presión de 18 mm de Hg y a 20° C es:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{760}\, 25{,}8 \times 10^{-3} = \frac{m}{18}\, 0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \boxed{m = 0{,}46 \times 10^{-3} \text{ g} = 0{,}46 \text{ mg}}$$

Por tanto, hay cantidad de H_2O suficiente para que exista la tensión máxima y la masa evaporada es 0,46 mg. La columna barométrica tendrá por altura:

$$\boxed{h = 76 - 1{,}8 = 74{,}2 \text{ cm}}$$

Problema 24. En una probeta graduada invertida sobre agua (cuba hidroneumática) se ha recogido un gas que ocupa un volumen de 100 cm^3; el nivel del agua dentro de la probeta está 5 cm por encima del nivel del agua exterior. La temperatura es de 20° C. Determinar:

1. Volumen que ocuparía el gas seco en condiciones normales.
2. Gramos de vapor de agua contenido en ese volumen.
3. Si se introdujese la probeta en el agua hasta que el nivel de ésta fuese el mismo dentro que fuera, ¿qué volumen se leería en la probeta?

Presión atmosférica: 740 mm de mercurio. Tensión máxima del vapor de agua a la temperatura de 20° C: 18 mm de mercurio. Peso molecular del agua: 18.

Solución

1) Los 5 cm de agua equivalen a 5/13,6 cm de Hg. La presión interior es, por tanto:

$$p_i = 740 - \frac{50}{13{,}6} \text{ mm de Hg}$$

la presión parcial del gas seco es:

$$p = 740 - \frac{50}{13{,}6} - 18 = 718{,}3 \text{ mm}$$

$$\frac{pV}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{718{,}3 \times 100}{760\,V_0} = \frac{293}{273} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = 88 \text{ cm}^3}$$

2)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{760}\,100 \times 10^{-3} = \frac{m}{18}\,0{,}082 \times 293 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 18 \times 10^{-4} \text{ g}}$$

3) La presión interior sería 740 mm de Hg, que corresponden a 740 − 18 = 722 mm de Hg para el gas seco. Apliquemos al gas seco la ley de Boyle-Mariotte:

$$pV = p'V' \quad \Rightarrow \quad 718{,}3 \times 100 = 722\,V' \quad \Rightarrow \quad \boxed{V' = 99{,}5 \text{ cm}^3}$$

D) GASES REALES

FORMULARIO

Ecuación de Van der Waals para un mol:

$$\left[p + \frac{a}{v^2}\right](v - b) = RT$$

Problema 25. Encerramos en un recipiente un volumen de aire con el 50 % de humedad, a la temperatura de 8° C. Tensión del vapor de agua a esta temperatura: $f = 8$ mm.

1. Si la presión de este aire húmedo encerrado en el recipiente es de 760 mm, ¿cuál es la presión parcial del aire?

2. Si comprimimos este aire húmedo, sin variar la temperatura, ¿cuáles serán las presiones parciales del aire y del vapor de agua cuando se alcance la saturación?

3. Si seguimos comprimiendo (siempre manteniendo constante la temperatura) hasta que se haya condensado la mitad del agua existente al comienzo, ¿cuál será ahora la presión parcial del aire y cuál la del agua?

Solución

1) Llamaremos p_1 a la presión parcial del agua y p_2 a la presión parcial del aire:

$$p_1 + p_2 = 760 \text{ mm (Hg)}$$

y como:

$$E = \frac{p_1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = Ef = 0{,}5 \times 8 = 4 \text{ mm (Hg)}$$

luego:

$$\boxed{p_2 = 760 - 4 = 756 \text{ mm (Hg)}}$$

2) Para alcanzar la saturación la presión parcial del vapor de agua se debe hacer doble $\boxed{(8 \text{ mm})}$ y, por tanto, el volumen reducirse a la mitad, duplicándose la presión del aire:

$$\boxed{p'_2 = 756 \times 2 = 1\,512 \text{ mm (Hg)}}$$

3) No variando la presión parcial del vapor de agua en la nueva compresión, el volumen se debe reducir a la mitad para que exista en el gas la mitad de vapor a saturación; la presión parcial del aire se habrá hecho doble:

$$\boxed{p''_2 = 1\,512 \times 2 = 3\,024 \text{ mm (Hg)}}$$

La presión parcial del vapor de agua seguirá siendo la tensión máxima:

$$\boxed{f = 8 \text{ mm (Hg)}}$$

Problema 26. Se comprime una masa de aire húmedo con 50 % de humedad relativa, a una temperatura constante, en que la tensión de vapor es $f = 4$ cm; la presión inicial es 76 cm; se pide cuál será la presión:
1. Cuando esté la masa de aire saturada.
2. Cuando haya perdido por condensación la mitad del vapor de agua que contenía al principio. La temperatura se mantiene constante.

Solución

1) Si llamamos p_1 a la presión parcial del agua y p_2 a la presión parcial del aire:

$$p = p_1 + p_2 = 76 \text{ cm (Hg)}$$

y como:

$$E = \frac{p_1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = Ef = 0{,}5 \times 4 = 2 \text{ cm (Hg)}$$

luego:

$$p_2 = 76 - 2 = 74 \text{ cm (Hg)}$$

Al saturar por compresión se duplican la presión parcial del vapor de agua y la del aire seco, y, por tanto, la presión total:

$$\boxed{p' = 2 \times 76 = 152 \text{ cm (Hg)} = p'_1 + p'_2}$$

que corresponden:

$$p'_1 = 4 \text{ cm (Hg)} \quad \Rightarrow \quad p'_2 = 152 - 4 = 148 \text{ cm (Hg)}$$

2) Para condensar la mitad del vapor de agua es necesario comprimir a mitad de volumen. La presión del vapor de H_2O a saturación permanece constante y la del aire se duplica:

$$\left.\begin{aligned} p'' &= p''_1 + p''_2 \\ p''_1 &= p'_1 = 4 \text{ cm (Hg)} \\ p''_2 &= 2 \times 148 = 296 \text{ cm (Hg)} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{p'' = 300 \text{ cm (Hg)}}$$

Problema 27. Dada la ecuación de Van der Waals para un mol de una sustancia:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

1. Establézcase la forma de dicha ecuación para n moles.
2. Calcúlese la presión que ejercerán 1 000 g de CO_2 confinados en un volumen de 7 l, a la temperatura de 57° C. Las constantes de la ecuación de Van der Waals para dicha sustancia valen: $a = 3{,}61$ atm · l^2/mol^2; $b = 0{,}043$ l/mol.

3. Compárese la presión obtenida con la que resultaría al considerar el CO_2 como gas perfecto y discútase brevemente la discrepancia.
DATOS: Masas atómicas: C = 12,01; O = 16.

Solución

1) Al ser v el volumen de un mol de la sustancia, para n moles el volumen será:

$$V = nv \Rightarrow v = \frac{V}{n} \Rightarrow \boxed{\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT}$$

2)

$$\left[p + \frac{3{,}61\left(\frac{1\,000}{44}\right)^2}{7^2}\right]\left[7 - \frac{1\,000}{44}\,0{,}043\right] = \frac{1\,000}{44}\,0{,}082(273 + 57) \Rightarrow \boxed{p = 64 \text{ atm}}$$

3)

$$pV = nRT \Rightarrow p7 = \frac{1\,000}{44}\,0{,}082(273 + 57) \Rightarrow \boxed{p = 87{,}9 \text{ atm}}$$

La presión en los gases perfectos no está influenciada por las atracciones moleculares, lo que hace que sea mayor en éstos que en los gases reales.

Problema 28. La densidad del acetileno en el punto crítico es 0,231 g/cm^3; la presión crítica vale, según las tablas, 62 atm. Calcúlese:
1. El volumen molar crítico.
2. La temperatura crítica, en °C, supuesta válida para dicha sustancia la ecuación de Van der Waals con las constantes: a = 4,39 atm · l^2/mol^2; b = 0,051 l/mol.
3. La posibilidad de almacenar el acetileno, en estado líquido, en botellas de acero.
DATOS: Masas atómicas: C = 12,01; H = 1,01.

Solución

1)

$$m = v\rho \Rightarrow \boxed{v = \frac{m}{\rho} = \frac{26}{0{,}231}\text{ cm}^3 = \frac{26}{231}\text{ l} = 0{,}112 \text{ l}}$$

2)

$$\left[62 + \frac{4{,}39}{\left(\frac{26}{231}\right)^2}\right]\left[\frac{26}{231} - 0{,}051\right] = 0{,}082(273 + t) \Rightarrow \boxed{t = 33{,}7°\text{ C}}$$

3) Si la temperatura crítica es menor que la ambiente, se puede licuar por compresión.

FORMULARIO

LEY DE HENRY (gases en líquidos):

$$K = \frac{v}{V}$$

K = coeficiente de solubilidad. v = volumen del gas. V = volumen del líquido.

HIPÓTESIS DE VAN T'HOFF:

«Las disoluciones se comportan, para los efectos de la presión osmótica, como si las moléculas del cuerpo disuelto fuesen las de un gas.»

$$p = \frac{n}{V}\ RT = cRT \quad \Rightarrow \quad c = \frac{n}{V}$$

LEYES DE RAOULT:

«La disminución de la tensión de vapor del disolvente es proporcional al número de moléculas de soluto que hay en la disolución.»

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f - f_1}{f} = \frac{n}{N}$$

«El descenso crioscópico y el ascenso ebulloscópico son directamente proporcionales a la concentración molal.»
«Disolventes equimoleculares en el mismo disolvente tienen el mismo descenso y ascenso ebulloscópico.»

$$\Delta t = Kc = K\ \frac{m'_1}{M} \quad \left| \begin{array}{l} m'_1 = \text{masa disuelta en 1 kg de disolvente} \\ M = \text{masa molecular} \end{array} \right.$$

Problema 29. Calcular la longitud que debería tener el tubo de un osmómetro que en el interior de la célula osmótica tiene una solución de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) al 9 % (9 g en 100 cm^3 de disolución) y en el exterior agua pura. La temperatura es de 0° C. (Resolver el problema suponiendo la densidad de la disolución interior prácticamente igual a la unidad.)

Solución

Según la ley de Van T'Hoff, una disolución *molar* (1 mol/litro) ejerce una presión osmótica de 22,4 atm. Una disolución molar de glucosa ($C_6H_{12}O_6$) contiene por litro de agua:

$$M = 6 \times 12 + 12 + 6 \times 16 = 180 \text{ g}$$

La disolución del problema contiene 90 g por litro; luego es $M/2$, y la presión que ejercerá de 11,2 atm, equivalentes a 11,2 × 76 cm de Hg.

Una columna de agua ejerciendo la misma presión, tendrá una altura calculable por:

$$h\rho = h'\rho' \Rightarrow 11{,}2 \times 76 \times 13{,}6 = h' \Rightarrow \boxed{h' = 11\,576 \text{ cm} = 115{,}76 \text{ m}}$$

Problema 30. Calcular la masa molecular de la sacarosa, sabiendo que 7,635 g en 0,5 l de disolución producen una presión osmótica de 1 atm a 0° C.

Solución

Si en el medio litro de disolución hay 7,365 g, un litro contiene:

$$2 \times 7{,}635 = 15{,}270$$

Aplicando la ley de Van T'Hoff:

$$p = cRT = \frac{\text{masa en 1 litro}}{\text{masa molecular}} \frac{1 \times 22{,}4}{273} 273 \Rightarrow \boxed{M = 15{,}270 \times 22{,}4 = 342 \text{ g}}$$

Problema 31. Determinar la masa molecular de la sacarosa, sabiendo que 4,62 g disueltos en 50 g de agua producen un descenso crioscópico de 0,5° C.

Solución

Si en 50 g de agua se han disuelto 4,62 g de sacarosa, en 1 kg de disolvente tendremos:

$$4{,}62 \times 20 = 92{,}4 \text{ g}$$

Aplicando la ley de Raoult:

$$\Delta t = Kc = K \frac{\text{masa disuelta en 1 kg}}{\text{masa molecular}}; \quad (K = 1{,}86° \text{ mol/kg}) \Rightarrow \boxed{M = \frac{1{,}86 \times 92{,}4}{0{,}5} = 344 \text{ g}}$$

Problema 32. ¿A qué temperatura hierve, a la presión normal, la disolución anterior?

Solución

Aplicando la ley de Raoult y teniendo en cuenta que el ascenso molecular del agua es 0,52° mol/kg:

$$\Delta t = \frac{92{,}4 \times 0{,}52}{344} = 0{,}14° \text{ C} \Rightarrow \boxed{t = 100{,}14° \text{ C}}$$

Problema 33. ¿Qué concentración en g/l tiene una disolución de glucosa isotónica con una de sacarosa de 18 g/l, consideradas ambas a la misma temperatura?

Solución

Fórmula de la sacarosa: $C_{12}H_{22}O_{11}$ $M_1 = 342$

Fórmula de la glucosa: $C_6H_{12}O_6$ $M_2 = 180$

Si m_1 y m_2 son las masas de sacarosa y glucosa contenidas en cada litro de las disoluciones isotónicas, se ha de verificar:

$$\frac{m_1}{M_1} RT = \frac{m_2}{M_2} RT \Rightarrow \frac{18}{342} = \frac{m_2}{180} \Rightarrow \boxed{m_2 = 9{,}5 \text{ g/l}}$$

Problema 34. Disolvemos 100 g de caramelos en 1 kg de agua. El descenso crioscópico de la solución es 0,676° C. Supuesto el caramelo formado exclusivamente de sacarosa y glucosa, calcular la proporción de cada una de ellas.

Solución

Masa molecular sacarosa:

$$(C_{12}H_{22}O_{11}) = 342$$

Masa molecular glucosa:

$$(C_6H_{12}O_6) = 180$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta t_1 = K \dfrac{m_1}{M_1} \\ \\ \Delta t_2 = K \dfrac{m_2}{M_2} \end{array}\right| \begin{array}{l} \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = K \left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right) = K \dfrac{m_1 M_2 + m_2 M_1}{M_1 M_2} \\ m_2 = 100 - m_1 \end{array}$$

Sustituyendo (m_1 = masa glucosa):

$$0{,}676 = 1{,}86 \frac{m_1 342 + (100 - m_1)180}{180 \times 342} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \boxed{m_1 = 27 \text{ g}} \\ \boxed{m_2 = 100 - 27 = 73 \text{ g}} \end{array}\right.$$

Capítulo XXIII

TERMODINAMICA

A) PRINCIPIO DE LA EQUIVALENCIA

FORMULARIO

$$\frac{W}{Q} = J = 4{,}18 \times 10^7 \,\frac{\text{ergios}}{\text{caloría}} = 4{,}18\,\frac{\text{julios}}{\text{caloría}} = 427\,\frac{\text{kgm}}{\text{kcal}}$$

Problema 1. Una bola de acero de calor específico 0,11 cal/g · °C se deja caer desde una altura de 2 m sobre un plano horizontal, la bola rebota y se eleva a 1,5 m. El plano ni se mueve ni se calienta.
1. Determinar el incremento de temperatura experimentado por la bola.
2. Discutir el resultado que se obtendría si el choque fuera totalmente elástico o totalmente inelástico.

Solución

Trabajaremos en el sistema CGS para que M (masa de la bola) esté expresada en g a lo largo de todo el problema:

$$\left.\begin{aligned} \Delta W &= J\Delta Q \\ \Delta Q &= Mc\Delta T \end{aligned}\right| \Rightarrow \ \Delta W = JMc\Delta T \ \Rightarrow \ \Delta T = \frac{\Delta W}{JMc} = \frac{Mg(h-h')}{JMc} = \frac{g(h-h')}{Jc}$$

$$\boxed{\Delta T = \frac{980 \times 50}{4{,}18 \times 10^7 \times 0{,}11} \simeq 10^{-2}\ ^\circ\text{C}}$$

2) En caso de ser el choque perfectamente elástico, no hay pérdida de energía en forma de calor, y la bola en su rebote asciende a la misma altura desde la que se ha lanzado. Si el choque es perfectamente inelástico, toda la energía potencial que posee el cuerpo se transforma íntegramente en calor.

Problema 2. Calcular la altura desde la que sería necesario dejar caer una masa de hielo a 0° para que se fundiese totalmente, si toda la energía del choque con el suelo se transformase en calor. (Se supone invariable en la caída la intensidad de la gravedad.)

Solución

El calor necesario para fundir una masa M de hielo es $Q = Ml$, siendo l el calor de fusión del hielo. La energía del choque es igual a la potencial antes de la caída:

$$W = Mgh = QJ = MlJ \quad \Rightarrow \quad h = \frac{lJ}{g}$$

$l = 80$ cal/g
$J = 4{,}18 \times 10^7$ erg/cal
$g = 980$ dyn/g

$$\boxed{h = \frac{80 \times 4{,}18 \times 10^7}{980} \text{ cm} \simeq 34 \text{ km}}$$

Problema 3. Una bala, a una velocidad de 200 m/s, choca contra un obstáculo. Suponiendo que toda la energía cinética se transforma en calor y que éste calienta tan sólo a la bala, calcular su elevación de temperatura. Calor específico del metal que forma la bala: 0,1 cal/g · °C.

Solución

La energía de la bala es:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} M 4 \times 10^4 \text{ J}$$

expresando M en kg. La cantidad de calor absorbida por la bala es:

$$Q = Mc\Delta t = 10^3 M 0{,}1 \Delta t \text{ cal}$$

Como:

$$J = \frac{T}{Q} = 4{,}18 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \quad \Rightarrow \quad 4{,}18 = \frac{\frac{1}{2} M 4 \times 10^4}{10^3 M 0{,}1 \Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 47{,}8^\circ \text{ C}}$$

Problema 4. Una bala de plomo penetra en una plancha de madera a la velocidad de 400 m/s, y luego de perforarla sale de ella. Suponiendo que la mitad del calor desarrollado se ha empleado en calentar la bala y observando que su temperatura ha aumentado 200°, calcular la velocidad de salida de la bala. Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C.

Solución

$$T_0 = JQ + T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} Mv_0^2 = JMc\Delta t + \frac{1}{2} Mv^2$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2Jc\Delta t} = \sqrt{16 \times 10^8 - 2 \times 4{,}18 \times 10^7 \times 0{,}03 \times 200} \text{ cm/s}$$

$$\boxed{v \simeq 331 \text{ m/s}}$$

Problema 5. Calcular la velocidad de una bala de plomo para que se funda al chocar con un obstáculo, suponiendo que toda la energía se transforma en calor y que éste actúa únicamente sobre la bala. La temperatura de la bala en el instante del choque es 20° C. Calor específico del plomo: 0,031 cal/g · °C. Calor de fusión del plomo: 5,8 cal/g. Temperatura de fusión del plomo: 326° C.

Solución

Si M es la masa de la bala en kg y v su velocidad en m/s, la energía cinética que posee es:

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 \text{ J}$$

La cantidad de calor para elevar la temperatura de $10^3 M$ g de Pb de 20 a 326° C es:

$$\mathbf{Q}_1 = 10^3 Mc\Delta t = 10^3 M 0{,}031(326 - 20) \text{cal}$$

La cantidad de calor para fundir $10^3 M$ g de Pb es:

$$Q_2 = 10^3 Ml = 10^3 M 5{,}8 \text{ cal}$$

y como:

$$J = \frac{W}{Q} = \frac{\frac{1}{2} Mv^2}{Q_1 + Q_2} = 4{,}18 \frac{\text{J}}{\text{cal}} \Rightarrow 4{,}18 = \frac{Mv^2}{2M(31 \times 306 + 5\,800)} \Rightarrow \boxed{v \simeq 357 \text{ m/s}}$$

Problema 6. Una bala de plomo de masa 30 g y a la temperatura de 50° C incide contra un obstáculo a la velocidad justa para que se funda por efectos del choque. Se supone que el obstáculo no se calienta y que no hay rebote. Siendo el calor específico del plomo 0,03 cal/g · °C, su calor de fusión 6 cal/g y su temperatura de fusión 330° C, calcúlese:

1. El calor total absorbido por la bala hasta su fusión.
2. La velocidad que poseía la bala al incidir contra el obstáculo.
3. ¿En qué proporción debería incrementarse la velocidad para que se produjese el mismo efecto de fusión de la bala si la mitad del calor engendrado se invierte en aumentar la temperatura del obstáculo?

Solución

1)

$$\boxed{Q = 30 \times 0{,}03(330 - 50) + 30 \times 6 = 432 \text{ cal}}$$

2)

$$T = JQ = \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2JQ}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 4{,}18 \times 432}{30 \times 10^{-3}}} = 347 \text{ m/s}}$$

3)

$$T' = 2JQ = \frac{1}{2} Mv'^2 \Rightarrow \boxed{v' = \sqrt{2} \sqrt{\frac{2JQ}{M}} = \sqrt{2}\, v}$$

Problema 7. **1.** ¿A qué velocidad debería lanzarse un proyectil de plomo para que al aplastarse contra un obstáculo de cemento se fundiera totalmente por efecto del choque? Se supone que el 80 % del calor desprendido es absorbido por el proyectil, y que su temperatura inicial es de 20° C.
2. ¿Desde qué altura debería dejarse caer libremente dicho proyectil para que se verificase el mismo proceso? (También se admite una absorción del 80 % del calor.)
Calor específico del plomo: 0,031 cal/g · °C. Calor de fusión del plomo: 5,47 cal/g. Temperatura de fusión del plomo: 327° C.

Solución

1)

$$r_i T = QJ \quad \Rightarrow \quad r_i \frac{1}{2} Mv^2 = (Mc\Delta t + Ml)J$$

$$v = \sqrt{\frac{2(c\Delta T + l)J}{r_i}} = \sqrt{\frac{2(0{,}031 \times 307 + 5{,}47)4{,}18 \times 10^7}{0{,}8}} \simeq 39{,}6 \times 10^3 \text{ cm/s} = \boxed{396 \text{ m/s}}$$

2)

$$v = \sqrt{2gh} \quad \Rightarrow \boxed{h = \frac{v^2}{2g} = \frac{396^2}{2 \times 9{,}8} = 8\,000 \text{ m}}$$

Problema 8. Una masa de mercurio (peso atómico: 201) cae libremente de un recipiente superior a otro inferior separados entre sí un metro, aumentando su temperatura en 0,70° C. Suponiendo que es despreciable todo intercambio térmico entre el mercurio y el exterior. Calcular:
1. El calor específico del mercurio en cal/g · °C.
2. Expresar el resultado obtenido en J/mol °C.

Solución

1)

$$\Delta U = J\Delta Q \quad \Rightarrow \quad Mgh = JMc\Delta t \quad \Rightarrow \boxed{c = \frac{gh}{J\Delta T} = \frac{980 \times 100}{4{,}18 \times 10^7 \times 0{,}7} = 0{,}0033 \text{ cal/g} \cdot °\text{C}}$$

2)

$$\boxed{c = 0{,}0033 \times 4{,}18 \times 201 = 2{,}814 \text{ J/mol °C}}$$

Problema 9. En un recinto se introducen 5 g de agua destilada a 8° C y 24 g de hielo a −10° C, de calor específico 0,5 cal/g · °C.
1. Determinar la proporción de hielo y agua cuando se alcanza el equilibrio.
2. Desde qué altura debe caer una masa de 1 kg para fundir el hielo que queda.
3. Qué velocidad debería llevar esa masa para que al ceder toda su energía a la mezcla ésta se vaporizara completamente.

Solución

1) Para fundir el hielo hacen falta:

$$24 \times 0{,}5 \times 10 + 24 \times 80 = 2\,040 \text{ cal}$$

El agua, al pasar a 0° C, suministra:

$$5 \times 1 \times 8 = 40 \text{ cal}$$

Luego el hielo no se funde y la temperatura final de la mezcla es 0° C, y su estado final es hielo y agua. Llamando m a la masa de hielo que se forma, tendremos:

$$24 \times 0{,}5 \times 10 = 5 \times 8 + 80m \quad \Rightarrow \quad m = 1 \text{ g}$$

En el recinto queda:

$$\boxed{\begin{array}{l|l} m_1 = 4 \text{ g de agua} & \\ & t = 0° \text{ C} \\ m_2 = 25 \text{ g de hielo} & \end{array}}$$

2) La energía potencial Mgh se transforma en cinética y ésta en calor:

$$Q = \frac{Mgh}{J}$$

que se emplea en fundir 25 g de hielo, luego:

$$\frac{9{,}8h}{4{,}18} = 25 \times 80 \quad \Rightarrow \quad \boxed{h = 853 \text{ m}}$$

3) La cantidad de calor necesaria para vaporizar toda la mezcla será:

$$Q = 25 \times 80 + 29 \times 100 + 29 \times 540 = 20\,560 \text{ cal}$$

que tienen que salir de la transformación de la energía cinética del cuerpo en calor; luego:

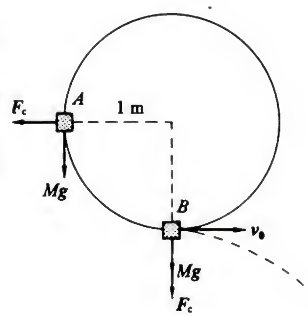
$$Q = \frac{Mv^2}{2J} \quad \Rightarrow \quad 20\,560 = \frac{v^2}{2 \times 4{,}18} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 414{,}6 \text{ m/s}}$$

Problema 10. Una masa de 1 000 g está suspendida de un hilo, inextensible y de masa despreciable, impulsamos la cuerda de forma que gira con movimiento uniforme en un plano vertical, alrededor de un punto fijo 0, a razón de 5 Hz. La distancia que separa el punto 0 del CM del cuerpo es de 1 m. Calcular:

1. La fuerza de tensión del hilo cuando éste se halla en posición horizontal y en la posición vertical correspondiente a la posición más baja de la masa.

2. El hilo se corta cuando la masa pasa por la posición horizontal en sentido descendente. ¿Qué velocidad alcanza la masa al cabo de 3 s?

3. La masa se empotra entonces en un bloque de hielo. ¿Qué cantidad de éste se fundirá por efecto del choque?



Problema XXIII-10

Solución

1)

$$\boxed{T_A = F_C = M4\pi^2\nu^2 r = 4\pi^2 25 = 100\pi^2 \text{ N} = 987 \text{ N}}$$

$$\boxed{T_B = F_c + Mg = 996{,}8 \text{ N}}$$

2)

$$v_0 = \omega r = 2\pi\nu r = 2\pi 5 = 10\pi \text{ m/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 = 10\pi \text{ m/s} \\ v_y = gt = 9{,}8 \times 3 = 29{,}4 \text{ m/s} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \simeq 43 \text{ m/s}}$$

3)

$$T = \frac{1}{2} Mv^2 = 925 \text{ J} = \frac{925}{4{,}18} \text{ cal}$$

que se emplean en fundir m gramos de hielo, que se calcularán de la forma:

$$\frac{925}{4{,}18} = m80 \quad \Rightarrow \boxed{m = 2{,}8 \text{ g}}$$

Problema 11. Se lanza un proyectil de 50 kg formando con la horizontal un ángulo de 30°, con una velocidad de 400 m/s. El cañón tiene un radio de 4 cm y la longitud del ánima es 1 m. Se desea saber:
1. La presión necesaria, supuesta constante, que tienen que ejercer los gases dentro del cañón para que salga a dicha velocidad.
2. Componentes de la velocidad del proyectil a los 5 s de haber sido disparado.
3. Alcance del proyectil en el plano del disparo.
4. Si al llegar al suelo toda la energía se convierte en calor, del cual el 60 % se emplea en calentar el proyectil, averiguar cuánto aumentará su temperatura si su calor específico es de 0,25 cal/g · °C.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} Fl = \dfrac{1}{2} Mv_0^2 \\ F = pA \end{array}\right| \quad \boxed{p = \frac{Mv_0^2}{2Al} = \frac{50 \times 160\,000}{9{,}8 \times 2\pi 16 \times 1} = 8\,120 \text{ kp/cm}^2}$$

2)

$$\boxed{v_x = v_0 \cos\varphi = 400\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 346 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - gt = 200 - 9{,}8 \times 5 = 151 \text{ m/s}}$$

3)

$$\boxed{x_m = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g} = \frac{160\,000\,\sqrt{3}}{2 \times 9{,}8} = 14\,139 \text{ m}}$$

4) La velocidad al llegar al suelo es la misma que la de salida de la boca del cañón; luego:

$$Q = \frac{\eta T}{J} = \frac{\eta M v_0^2}{2J} = \frac{0{,}6 \times 50 \times 160\,000}{2 \times 4{,}18} \text{ cal}$$

éstas se emplean en calentar los 50 000 g del metal a 0,25 cal por g y grado centígrado; luego:

$$\frac{0{,}6 \times 50 \times 160\,000}{2 \times 4{,}18} = 50\,000 \times 0{,}25\Delta t \quad \Rightarrow \boxed{\Delta t = 46° \text{ C}}$$

Problema 12. Una masa de plomo igual a 10 g llega horizontalmente, con una velocidad de 250 m/s, sobre una esfera también de plomo de 450 g, en la cual se incrusta.

1. Estando, al principio, la esfera de plomo inmovilizada, calcular el calentamiento que resultará del choque.

2. Pudiéndose separar la esfera de plomo de la vertical como un péndulo, se comprueba en una segunda experiencia que se eleva 2 m después del choque. Calcular el calentamiento resultante.

Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C.

Solución

1)

$$T = \frac{1}{2} M_1 v^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}01 \times 250^2 = 312{,}5 \text{ J} = \frac{312{,}5}{4{,}18} \text{ cal}$$

y estas calorías se emplean en calentar los 460 g de plomosuma de las dos masas que chocan:

$$\frac{312{,}5}{4{,}18} = 460 \times 0{,}03 \times \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t \simeq 5{,}4° \text{ C}}$$

2) En este caso la energía que se transforma en calor es:

$$\Delta W = \frac{1}{2} M_1 v^2 - (M_1 + M_2)gh = 312{,}5 - 0{,}460 \times 9{,}8 \times 2 = 303{,}5 \text{ J} = \frac{303{,}5}{4{,}18} \text{ cal}$$

que se emplean en calentar los 460 g de cobre:

$$\frac{303{,}5}{4{,}18} = 460 \times 0{,}03 \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 5{,}2° \text{ C}}$$

Problema 13. Se tiene una esfera de Pb de 750 g de peso suspendida de un hilo. Se dispara contra ella un proyectil de acero de 15 g de peso, cuya velocidad en el momento del impacto es de 300 m/s. El proyectil, que llega horizontalmente, se incrusta en la esfera, produciendo un aumento de temperatura de 6,6° C. Calcular la elevación del desplazamiento que experimenta la esfera. DATOS: Calor específico del plomo: 0,03 cal/g · °C. Calor específico del acero: 0,12 cal/g · °C. Se admite que las temperaturas del proyectil y de la esfera son idénticas en el momento del choque.

Solución

La energía que se transforma en calor en el choque es:

$$Q = M_1 c_1 \Delta t + M_2 c_2 \Delta t = (750 \times 0{,}03 + 15 \times 0{,}12)6{,}6 = 160{,}38 \text{ cal} = 670{,}39 \text{ J}$$

y como:

$$T = U + W \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} M_2 v^2 = W + (M_1 + M_2)gh \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{h = \frac{M_2 v^2 - 2W}{2(M_1 + M_2)g} = \frac{15 \times 10^{-3} \times 300^2 - 2 \times 670{,}39}{2 \times 0{,}765 \times 9{,}8} \text{ m} = 0{,}61 \text{ m} = 61 \text{ cm}}$$

Problema 14. Sobre un cuerpo móvil, cuya masa es de 100 g y que está en reposo, actúa una fuerza de 5 N. Calcular:

1. Camino que recorre durante el cuarto segundo de su movimiento.

2. Energía cinética que tiene cuando lleva moviéndose 10 s.

3. Aumento de temperatura que experimentará si en ese momento choca, se para y toda la energía se convierte en calor, que queda en el cuerpo. Calor específico: 0,09 cal/g · °C.

Solución

1)

$$a = \frac{F}{M} = \frac{5}{0{,}1} = 50 \text{ m/s}^2 \Rightarrow \boxed{s_4 - s_3 = \frac{1}{2}a(t_4^2 - t_3^2) = \frac{1}{2}50(16-9) = 175 \text{ m}}$$

2)

$$v = at = 500 \text{ m/s} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}0{,}1 \times 500^2 = 12\,500 \text{ J}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} Q = \dfrac{T}{J} \\[2ex] Q = Mc\Delta t \end{array}\right| \quad \frac{12\,500}{4{,}18} = 100 \times 0{,}09\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = 332° \text{ C}}$$

Problema 15. Por una pista horizontal cubierta de nieve se desliza un trineo; suponiendo que el peso del trineo es de 105 kg, que su velocidad inicial es de 36 km/h y que el coeficiente de rozamiento vale 0,025, calcular:

1. El tiempo que tardará en pararse.

2. La distancia que habrá recorrido hasta el momento de pararse.

3. La energía del trineo en el momento inicial.

4. La nieve que se licuará al paso del trineo, suponiendo que todo el calor del rozamiento pasa a la nieve y ésta se encuentra a 0° C.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}Mv^2 = \mu Mgs \\[2ex] s = \dfrac{1}{2}vt \end{array}\right| \quad \frac{1}{2}Mv^2 = \mu Mg\frac{1}{2}vt \Rightarrow \boxed{t = \frac{v}{\mu g} = \frac{10}{0{,}025 \times 9{,}8} \simeq 40 \text{ s}}$$

2)

$$\boxed{s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}10 \times 40 = 200 \text{ m}}$$

3)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}105 \times 100 = 5\,250 \text{ J}}$$

4)

$$Q = \frac{T}{J} = ml \Rightarrow \boxed{m = \frac{T}{Jl} = \frac{5\,250}{4{,}18 \times 80} = 15{,}7 \text{ g}}$$

Problema 16. Una fuerza de 30 kg tira de un bloque en reposo, que pesa 40 kg, situado en un plano inclinado 30° sobre la horizontal. La fuerza actúa hacia arriba y paralelamente a la superficie inclinada, y el cuerpo recorre de esta forma 10 m. El coeficiente de rozamiento vale 0,2. Calcular:

1. El trabajo realizado por la fuerza aplicada.
2. El peso de hielo a 0° C que se podría fundir con el calor desprendido por el rozamiento.
3. La velocidad adquirida al final del recorrido.
4. La variación de energía cinética del bloque.

Solución

1)

$$\boxed{W = Fs = 30 \times 10 = 300 \text{ kgm}}$$

2)

$$W_R = \mu Mgs\cos\varphi$$

$$Q = \frac{W_R}{J}$$

$$Q = ml$$

$$\boxed{m = \frac{\mu Mgs\cos\varphi}{Jl} = \frac{0{,}2 \times 40 \times 9{,}8 \times 10\sqrt{3}}{2 \times 4{,}18 \times 80} = 2 \text{ g}}$$

3)

$$Fs = Mgh + \frac{1}{2}Mv^2 + \mu Mgs\cos\varphi$$

$$h = s\,\text{sen}\varphi$$

$$Fs = Mgs\,\text{sen}\varphi + \frac{1}{2}Mv^2 + \mu Mgs\cos\varphi$$

$$v = \sqrt{2s\left[\frac{F}{M} - g(\text{sen}\varphi + \mu\cos\varphi)\right]} = \sqrt{2 \times 10\left[\frac{30 \times 9{,}8}{40} - 9{,}8\left(\frac{1}{2} - 0{,}2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]} = \boxed{9{,}1 \text{ m/s}}$$

4)

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}40 \times 9{,}1^2 = 1\,656 \text{ J}}$$

Problema 17. Un disco homogéneo de 50 cm de radio gira alrededor de su eje.

1. Calcular su momento de inercia si tiene una masa de 2 kg.
2. Si tangencialmente se le aplica una fuerza de 40 N durante 10 s, ¿qué velocidad angular adquirirá y cuál será su energía cinética?
3. Suponiendo que después se frena y toda la energía del disco se convierte en calor, del cual se utiliza el 80 % en calentar 500 g de agua, calcular el aumento de temperatura que experimenta ésta.

Solución

1)

$$\boxed{I = \frac{1}{2}Mr^2 = \frac{1}{2}2 \times 0{,}5^2 = 0{,}25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ \alpha = \dfrac{\omega}{t} \\ N = Fr \end{array}\right| \quad Fr = \frac{1}{2} Mr^2 \frac{\omega}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \frac{2Ft}{Mr} = \frac{2 \times 40 \times 10}{2 \times 0{,}5} = 800 \text{ rad/s}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} 0{,}25 \times 800^2 = 80\,000 \text{ J}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} Q = \dfrac{W}{J} = \dfrac{\eta T}{J} \\ Q = Mc\Delta t \end{array}\right| \quad \boxed{\Delta t = \frac{\eta T}{JMc} = \frac{0{,}8 \times 80\,000}{4{,}18 \times 500} = 30{,}6^\circ \text{ C}}$$

Problema 18. Una rueda de 50 kg de masa, supuesta concentrada en su aro periférico, y 50 cm de radio gira con velocidad de 3 000 rpm. Sobre la periferia se aplica una fuerza constante que la hace parar en un minuto. Calcular:
1. Valor y signo de la aceleración angular.
2. Número de vueltas que da la rueda en el minuto considerado.
3. Valor de la fuerza aplicada.
4. Pérdida de la energía cinética de rotación que experimenta la rueda al pararse.
5. Si el 40 % de esta energía, transformada en calor, se emplea en fundir hielo a 0° C, ¿qué peso de hielo se fundirá?

Solución

1) El movimiento es decelerado; por tanto, el signo es negativo, y el valor será:

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi\nu}{t} = \frac{2\pi\, 3\,000}{60 \times 60} = \frac{5}{3}\pi \text{ rad/s}^2}$$

2)

$$\varphi = \frac{1}{2}\omega t = \frac{1}{2} 2\pi\nu t = \pi\nu t \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\nu t}{2} = \frac{3\,000 \times 60}{60 \times 2} = 1\,500 \text{ vueltas}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} N = I\alpha \\ N = Fr \\ I = Mr^2 \\ \alpha = \dfrac{2\pi\nu}{t} \end{array}\right| \quad Fr = Mr^2 \frac{2\pi\nu}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{Mr2\pi\nu}{t} = \frac{50 \times 0{,}5 \times 2\pi\, 3\,000}{60 \times 60} = \frac{125}{3}\pi \text{ N}}$$

4)

$$\boxed{\Delta T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} Mr^2 4\pi^2\nu^2 = 2Mr^2\pi^2\nu^2 = 2 \times 50 \times 0{,}5^2\pi^2\, 2\,500 = 62\,500\pi^2 \text{ J}}$$

5)

$$\left.\begin{aligned} Q &= \frac{\eta_l \Delta T}{J} \\ Q &= ml \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{m = \frac{\eta_l \Delta T}{Jl} = \frac{0{,}4 \times 62\,500\pi^2}{4{,}18 \times 80} = 738 \text{ g}}$$

Problema 19. Un disco de masa 2 kg y radio 20 cm gira alrededor de un eje horizontal con la velocidad angular $\nu_0 = 10$ Hz. Apoyada sobre una generatriz de su periferia, descansa una lámina metálica de masa M kg, que actúa por su peso frenando el movimiento del disco. Este se detiene al cabo de 2 min de actuar el freno. El coeficiente de rozamiento es 0,2. Calcular:

1. El valor de M.

2. La energía cinética del disco al cabo de un minuto de actuar el freno.

3. Suponiendo que el calor desarrollado quede totalmente acumulado en la lámina, calcular el incremento de temperatura experimentado por la misma cuando el disco se ha parado. (Calor específico de la lámina: 0,1 cal/g · °C.)

Solución

M = masa de la lámina.
M' = masa del disco.

1)

$$\left.\begin{aligned} N &= I\alpha \\ N &= \mu M g r \\ I &= \frac{1}{2} M' r^2 \\ \alpha &= \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi\nu_0}{t} \end{aligned}\right| \quad \mu M g r = \frac{1}{2} M' r^2 \frac{2\pi\nu_0}{t} \Rightarrow$$

$$\boxed{M = \frac{2\pi\nu_0 r}{2\mu g t} M' = \frac{2\pi\, 10 \times 0{,}2}{2 \times 0{,}2 \times 9{,}8 \times 120} 2 = 53 \times 10^{-3} \text{ kg} = 53 \text{ g}}$$

2)

$$\omega = \omega_0 - \alpha t' = 2\pi\nu_0 - \frac{2\pi\nu_0}{t} t' = 2\pi\nu_0 \frac{t - t'}{t} = 2\pi\, 10 \frac{120 - 60}{120} = 10\pi \text{ rad/s}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M' r^2 \omega^2 = \frac{1}{4} M' r^2 \omega^2 = \frac{1}{4} 2 \times 0{,}2^2 \times 100\pi^2 = 2\pi^2 \text{ J}}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{2} I\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} M' r^2 4\pi^2\nu_0^2 = M' r^2 \pi^2 \nu_0^2 \\ Q &= \frac{T_0}{J} \\ Q &= Mc\Delta t \end{aligned}\right| \Rightarrow Mc\Delta t = \frac{M' r^2 \pi^2 \nu_0^2}{J}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{M' r^2 \pi^2 \nu_0^2}{McJ} = \frac{2 \times 0{,}2^2 \pi^2\, 100}{53 \times 0{,}1 \times 4{,}18} = 3{,}6° \text{ C}}$$

Problema 20. Se monta el experimento de Joule para medir el equivalente mecánico del calor, de forma que el árbol giratorio de eje vertical, provisto de paletas, gira a razón de 1 000 vueltas por minuto y se precisa actuar para que no gire, mediante un par de valor $1{,}24 \times 10^7$ dyn · cm. La masa del calorímetro, del árbol y de las paletas es de 500 g. La masa del agua es 2 000 g. El calor específico del material de que está hecho el calorímetro es de 0,1 cal/g · °C. El valor encontrado para J fue de 4,176 J. Calcular el aumento de temperatura que en cada minuto experimenta la masa del agua. Se desprecia el calor absorbido por el termómetro.

Solución

$$\nu = \frac{1\,000}{60} = \frac{50}{3}\ \text{Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{100}{3}\pi\ \text{rad/s}$$

Si las paletas giran uniformemente a tal velocidad angular, el trabajo del par resistente que opone el agua al giro es:

$$W = N\varphi = N\omega t = 1{,}24 \times 10^7\ \frac{100}{3}\pi\ 60\ \text{erg} = 7{,}8 \times 10^{10}\ \text{erg} = \frac{7{,}8 \times 10^{10}}{10^7\ 4{,}176} = 1\ 868\ \text{cal}$$

que se emplean en elevar la temperatura del agua y de todos los accesorios en Δt, que se calculará:

$$1\ 868 = (2\ 000 + 500 \times 0{,}1)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t \simeq 0{,}9^\circ\ \text{C}}$$

B) PRIMER Y SEGUNDO PRINCIPIOS DE TERMODINAMICA

FORMULARIO

TRABAJO:

$$dW = pdv$$

PRIMER PRINCIPIO DE TERMODINÁMICA:

$$dU = dQ - dW$$

VALOR DE LA ENERGÍA INTERNA:

$$dU = nc_v dT$$

Fórmula de Meyer:

$$c_p - c_v = R \qquad R = 2 \text{ cal}$$

Coeficiente de las adiabáticas:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Rendimiento de una máquina térmica:

$$\eta = \frac{W}{Q} = \frac{Q + Q'}{Q} \qquad Q' \text{ (calor cedido)}$$

Rendimiento del ciclo de Carnot:

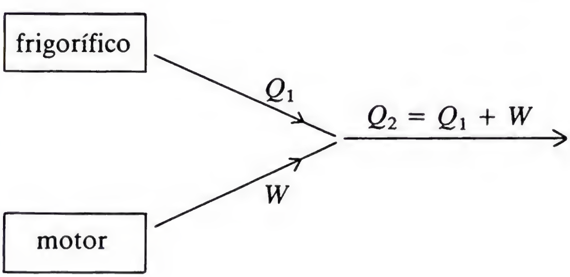
$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} = \frac{T - T'}{T}$$

Segundo principio de termodinámica:

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Máquinas frigoríficas:

T_1 (temp. foco frío) $\qquad T_2$ (temp. foco caliente)



Eficiencia:

$$K = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Transformaciones termodinámicas	*Ecuación*	*Calor*	*Trabajo*	*Energía interna*	*Entropía*
ISOTERMA $dT = 0$	$pV = \mathrm{ct^e}$	$dQ = dW$ $Q_1^2 = nRT\ln \frac{V_2}{V_1} =$ $= nRT\ln \frac{p_1}{p_2}$	$dW = dQ$ $W_1^2 = nRT\ln \frac{V_2}{V_1} =$ $= nRT\ln \frac{p_1}{p_2}$	$dU = 0$ $U_1^2 = 0$	$S_1^2 = \frac{Q_1^2}{T} = nR\ln \frac{V_2}{V_1} =$ $= nR\ln \frac{p_1}{p_2}$
ISOSTÉRICA $dV = 0$	$\frac{P}{T} = \frac{P'}{T'}$	$dQ = dU$ $dQ = nc_v dT$ $Q_1^2 = nc_v(T_2 - T_1)$	$dW = 0$ $W_1^2 = 0$	$dU = nc_v dT$ $U_1^2 = nc_v(T_2 - T_1)$	$S_1^2 = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1}$
ISOBÁRICA $dp = 0$	$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'}$	$dQ = nc_p dT$ $Q_1^2 = nc_p(T_2 - T_1)$	$dW = pdV$ $W_1^2 = p(V_2 - V_1)$	$dU = nc_v dT$ $U_1^2 = nc_v(T_2 - T_1)$	$S_1^2 = nc_p \ln \frac{T_2}{T_1}$
ADIABÁTICA $dQ = 0$	$pV^{\gamma} = \mathrm{ct^e}$ $TV^{\gamma-1} = \mathrm{ct^e}$ $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\, T = \mathrm{ct^e}$	$dQ = 0$ $Q_1^2 = 0$	$dW = -\,dU = -\,nc_v dT$ $W_1^2 = nc_v(T_1 - T_2)$	$dU = -\,dW = nc_v dT$ $U_1^2 = nc_v(T_2 - T_1)$	$dS = 0$ $S_1^2 = 0$

Problema 21. Sabiendo que la ecuación de las isotermas de un gas perfecto es $pV = ct^e$ y la de las adiabáticas $pV^\gamma = ct^e$ y que $\gamma > 1$, demostrar que el valor absoluto de la pendiente de las adiabáticas es mayor que el de las isotermas.

Solución

Pendiente de las isotermas:

La ecuación de las isotermas es:

$$pV = ct^e$$

que diferenciada:

$$pdV + Vdp = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T = ct^e} = -\frac{p}{V}}$$

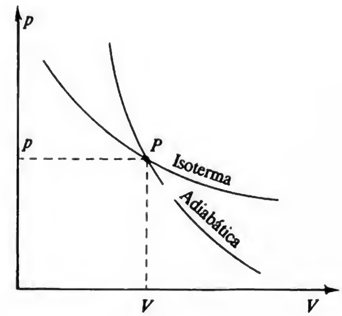
Pendiente de las adiabáticas:

La ecuación de las adiabáticas es:

$$pV^\gamma = ct^e$$

diferenciada nos da:

$$p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{Q = ct^e} = -\gamma\frac{p}{V}}$$



Problema XXIII-21

comparando las dos pendientes y teniendo en cuenta que $\gamma > 1$, obtenemos que:

$$\boxed{\left(\frac{dp}{dV}\right)_{T = ct^e} > \left(\frac{dp}{dV}\right)_{Q = ct^e}}$$

luego la pendiente de las isotermas es mayor (menos negativa) que en las adiabáticas o, lo que es lo mismo: En el diagrama de Clapeiron las abdiabáticas de un gas perfecto son descendentes y tienen en valor absoluto una mayor pendiente (son más inclinadas) que las isotermas (figura).

Problema 22. Teniendo en cuenta que la ecuación de las adiabáticas es:

$$pV^\gamma = ct^e \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

demostrar que:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{1}{1-\gamma}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

Solución

Si llamamos K a la constante de la ecuación de las adiabáticas:

$$p = \frac{K}{V^\gamma} \quad \Rightarrow \quad W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = K\int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma}dV = \frac{1}{1-\gamma}\left[KV^{1-\gamma}\right]_{V_1}^{V_2}$$

pero al establecer que:

$$pV^\gamma = K \quad \Rightarrow \quad p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma = K$$

se obtiene:

$$\boxed{W = \frac{1}{1-\gamma}[p_2V_2 - p_1V_1]} \qquad \text{cqd}$$

Problema 23. **1.** ¿Qué calor se precisa para pasar 1 g de hielo a vapor de agua a la presión de 760 mm de mercurio?
2. ¿Cuál es el aumento de volumen que experimenta el hielo?
3. ¿Cuál es el valor del trabajo realizado por este aumento de volumen?
Densidad del hielo con respecto al agua en las condiciones del problema (0° C y 760 mm de Hg): 0,92.

Solución

1)

$$\boxed{Q = 80 + 100 + 540 = 720 \text{ cal}}$$

2) El volumen que ocupa el vapor de agua en las condiciones del problema se obtiene:

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{nRT}{p} = \frac{1 \times 0{,}082 \times 373}{18 \times 1} = 1{,}7 \text{ l} = 1\,700 \text{ cm}^3$$

El volumen del hielo (0,92 cm^3) es despreciable frente al de vapor de agua, luego:

$$\boxed{\Delta V = 1\,700 \text{ cm}^3}$$

3)

$$dW = pdV \quad \Rightarrow \quad W = \int pdV = p \int dV = p\Delta V$$

$$\boxed{W = 76 \times 13{,}6 \times 980 \times 1\,700 \text{ erg} = 17{,}6 \text{ kgm}}$$

Problema 24. El aire de una habitación de dimensiones 5 × 5 × 4 m se dilata a presión constante (760 mm de Hg), escapándose por las ventanas al pasar su temperatura de 15° a 20° C. Se considera como gas perfecto. Deseamos saber:
1. El volumen de aire que se escapa.
2. El trabajo que realiza en la expansión al empujar al aire exterior.
3. ¿Qué volumen ocuparía todo el aire de la habitación (el que queda y el que escapa) en las condiciones normales de presión y temperatura?
4. La cantidad de calor que ha absorbido al dilatarse en las condiciones arriba expresadas, y aumento de su energía interna.
Calor molar a presión constante: 7 cal/mol °K.

Solución

1) Volumen de la habitación = 5 × 5 × 4 = 100 m^3; y como:

$$\frac{V}{V'} = \frac{T}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{V'} = \frac{288}{293} \quad \Rightarrow \quad V' = 101{,}736 \text{ m}^3$$

el volumen de aire que se escapa será:

$$\boxed{V'' = V' - V = 1{,}736 \text{ m}^3 = 1\,736 \text{ dm}^3}$$

medidos a 20° C y a 760 mm de Hg.

2)

$$dW = pdV \quad \Rightarrow \quad W = \int pdV = p\int dV = p(V' - V)$$

$$\boxed{W = \rho gh(V' - V) = \frac{13\,600}{9{,}8} \times 9{,}8 \times 0{,}76 \times 1{,}736 = 17\,943{,}3 \text{ kgm}}$$

3)

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{V_0} = \frac{288}{273} \quad \Rightarrow \boxed{V_0 = 94{,}792 \text{ m}^3 = 94\,792 \text{ dm}^3}$$

4) El número de moles contenido en la habitación es:

$$n = \frac{V_0}{22{,}4} = \frac{94\,792}{22{,}4}$$

$$\boxed{Q = nc_p\Delta T = \frac{94\,792}{22{,}4}\,7 \times 5 = 148\,112 \text{ cal} = 148{,}112 \text{ kcal}}$$

$$Q = 148{,}112 \times 427 \text{ kgm} = 63\,244 \text{ kgm}$$

$$\boxed{\Delta U = Q - W = 63\,244 - 17\,943{,}3 = 45\,300{,}7 \text{ kgm}}$$

Problema 25. Se tiene 1 g de nitrógeno (peso molecular: 28) a 0° C y a presión normal. Calcular:

1. ¿Cuál es el volumen ocupado por el gas?

2. Se calienta el gas a 100° C a presión constante (calor molar a presión constante: 7 cal/mol °C). ¿Qué cantidad de calor se necesita y cuál es el volumen final?

3. A partir del mismo estado inicial se calienta de nuevo a 100° C a volumen constante. ¿Qué cantidad de calor se necesita y cuál es la presión final?

4. Interpretar físicamente la diferencia observada entre las respuestas a las cuestiones 2.ª y 3.ª

Solución

1)

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad 1\,V = \frac{1}{28}\,0{,}082 \times 273 \quad \Rightarrow \boxed{V = 0{,}8 \text{ l}}$$

2)

$$c_p = 7 \text{ cal/mol °C} = \frac{7}{28} \text{ cal/g} \cdot \text{°C} = 0{,}25 \text{ cal/g} \cdot \text{°C}$$

$$\boxed{\Delta Q_1 = mc_p\Delta T = 1 \times 0{,}25 \times 100 = 25 \text{ cal}}$$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \qquad p = p' \quad \Rightarrow \boxed{V' = \frac{373}{273}\,0{,}8 = 1{,}1 \text{ l}}$$

3)

$$c_p - c_v = R \left| \begin{array}{l} c_p = 7 \text{ cal/mol °C} \\ R = 2 \text{ cal/mol °C} \end{array} \right| c_v = 5 \text{ cal/mol °C} = \frac{5}{28} \text{ cal/g} \cdot \text{°C}$$

$$\boxed{\Delta Q_2 = mc_v\Delta T = 1\,\frac{5}{28}\,100 = 17{,}9 \text{ cal}}$$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} \qquad V = V' \quad \Rightarrow \boxed{p' = \frac{373}{273} = 1{,}37 \text{ atm}}$$

4) Por el primer principio de termodinámica:

$$\Delta U = \Delta Q - p\Delta V$$

La variación de energía interna en ambas transformaciones es la misma:

$$\Delta U = nc_v\Delta T$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{lll} p = \text{ct}^e & & \Delta Q_1 = nc_v\Delta T + p\Delta V \\ V = \text{ct}^e & & \Delta Q_2 = nc_v\Delta T \end{array}\right| \Rightarrow \Delta Q_1 - \Delta Q_2 = p\Delta V \Rightarrow \Delta Q_1 > \Delta Q_2$$

Luego esta diferencia nos mide el trabajo que realiza el gas en su expansión isobara.

Problema 26. ¿Qué cantidad de calor hace falta para duplicar el volumen en transformación isobara de 50 l de oxígeno que se encuentran a 27° C y 2 atm de presión? Calcular la temperatura final y la variación de energía interna.

Solución

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{50}{100} = \frac{300}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 600°\text{ K}}$$

Por ser un gas diatómico:

$$c_v = 5 \text{ cal/mol °K} \Rightarrow c_p = R + c_v = 7 \text{ cal/mol °K}$$

El número de moles que tenemos será:

$$p_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{2 \times 50}{0{,}082 \times 300} \simeq 4 \text{ moles}$$

luego:

$$dQ = nc_p dT \Rightarrow \boxed{\Delta Q = nc_p(T_2 - T_1) = 4 \times 7 \times 300 = 8\,400 \text{ cal}}$$

$$dU = nc_v dT \Rightarrow \boxed{\Delta U = nc_v(T_2 - T_1) = 4 \times 5 \times 300 = 6\,000 \text{ cal}}$$

Problema 27. Una máquina frigorífica gasta 3 kW · h diarios y mantiene en la cámara una temperatura constante de −3° C. ¿Qué variación de entropía experimenta el universo en un día?

Solución

La energía en kilocalorías disipada en un día en el frigorífico será:

$$Q = \frac{3 \times 3\,600\,000}{4{,}18 \times 10^3} \text{ kcal}$$

luego la variación de entropía del universo será:

$$\boxed{\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{3 \times 3\,600\,000}{4{,}18 \times 10^3 \times 270} = 9{,}57 \text{ kcal/°K}}$$

Problema 28. Calcular la variación de energía interna y entropía que experimentan 100 g de He al pasar de 0° C a 100° C en transformación isobara.

Solución

Por ser un gas monoatómico:

$$c_v = 3 \text{ cal/mol °C} \Rightarrow c_p = R + c_v = 5 \text{ cal/mol °C}$$

y como su masa molecular es 4, obtenemos:

$$dU = nc_v dT = \frac{m}{M} c_v dT \Rightarrow \boxed{\Delta U = \frac{m}{M} c_v (T_2 - T_1) = \frac{100}{4} 3 \times 100 = 7\,500 \text{ cal}}$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{nc_p dT}{T} = \frac{mc_p dT}{MT} \Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{mc_p}{M} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{100 \times 5}{4} \ln \frac{373}{273} = 39 \text{ cal/°K}}$$

Problema 29. Sueña un estudiante de termodinámica de 70 kg de peso en poder subir en un ascensor (200 kg) hasta una altura de 15 m, simplemente con la energía interna acumulada por 18 g de agua (1 mol) cuando pasa de líquida a 0° C a vapor a 100° C a la presión normal. ¿Es un sueño matemáticamente correcto? (Despreciar la pequeña variación de volumen del agua líquida al pasar de 0° a 100° C.) Calor de vaporización del agua: 539 cal/g.

Solución

El volumen de 18 g de vapor de agua (1 mol) a 100° C y 760 mm de Hg es:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow \frac{V}{22\,400} = \frac{373}{273} \Rightarrow V = 30\,605 \text{ cm}^3$$

El primer principio de termodinámica expresa:

$$\text{Calor} - \text{trabajo} = \Delta(\text{energía interna})$$

Calor comunicado = calor calentamiento H_2O de 0 a 100° C + calor para vaporizarla:

$$Q = 18 \times 100 + 18 \times 539 = 11\,502 \text{ cal} = 48\,078{,}36 \text{ J}$$

Como la transformación se realiza a presión constante, el trabajo realizado será:

$$W = p\Delta V = \frac{76 \times 13{,}6 \times 980(30\,605 - 18)}{10^7} = 3\,098{,}24 \text{ J}$$

luego la variación de energía interna será:

$$\Delta U = 48\,078{,}36 - 3\,098{,}24 = 44\,980{,}12 \text{ J} = 4\,589{,}81 \text{ kgm}$$

El trabajo que realiza el ascensor es:

$$W = Mgh = (200 + 70)\,15 = 4\,050 \text{ kgm}$$

Como la variación de energía interna es mayor que el trabajo realizado por el ascensor, el sueño es posible.

Problema 30. ¿Qué cantidad de calor hace falta para duplicar la temperatura en una transformación isocora de 100 l de hidrógeno a 3 atm de presión y 300° K de temperatura? Calcúlese la variación de entropía en la transformación.

Solución

Por ser un gas diatómico:

$$c_v = 5 \text{ cal/mol °K} \qquad c_p = 7 \text{ cal/mol °K}$$

El número de moles en la transformación será:

$$p_1 v_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{100 \times 3}{0{,}082 \times 300} = \frac{1}{0{,}082} \text{ moles}$$

luego:

$$dQ = nc_v dT \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_1^2 = nc_v(T_2 - T_1) = \frac{5 \times 300}{0{,}082} \text{ cal} = 18{,}3 \text{ kcal}}$$

$$\boxed{dS = \frac{dQ}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{0{,}082} \ln 2 = 42 \text{ cal/°K}}$$

Problema 31. Se realiza una transformación isoterma en un gas perfecto, desde un volumen de 10 l, presión de 5 atm a la temperatura de 300° K hasta que se reduce el volumen a la mitad. Calcular:

1. La presión final del gas.
2. Número de moles.
3. Trabajo y calor en la transformación.
4. Variación de entropía en la transformación.

Solución

1)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_2 = \frac{V_1}{V_2} p_1 = 2 \times 5 = 10 \text{ atm}}$$

2)

$$p_1 V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{5 \times 10}{0{,}082 \times 300} = 2 \text{ moles}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} dU = nc_v dT \\ T = \text{ct}^{\text{e}} \ \rightarrow \ dU = 0 \\ dU = dQ - dW \end{array}\right| \; dQ = dW \quad \Rightarrow \quad Q_1^2 = W_1^2$$

$$\left.\begin{array}{l} W_1^2 = \displaystyle\int_1^2 p dV \\ p = \dfrac{nRT_1}{V} \end{array}\right| \; W_1^2 = \int_1^2 \frac{nRT_1 dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 2 \times 2 \times 300 \ln \frac{1}{2} = -\,832 \text{ cal}$$

$$\boxed{Q_1^2 = W_1^2 = -\,832 \text{ cal}}$$

es negativo el W, puesto que comprimimos el gas.

4)

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{Q_1^2}{T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S = -\,\frac{832}{300} = -\,2{,}8 \text{ cal/°K}}$$

Problema 32. Se expansiona adiabáticamente un gas perfecto diatómico desde un volumen de 2 l, a presión de 2 atm y temperatura de 300° K, hasta que su temperatura final sea la cuarta parte de la inicial. Se pide calcular:

1. Volumen y presión finales.

2. Trabajo y variación de energía interna en la transformación.

Solución

$$c_v = 5 \text{ cal/mol °K} \qquad c_p = 7 \text{ cal/mol °K} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5}$$

1)

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow 4 = \left(\frac{V_2}{2}\right)^{2/5} \Rightarrow \boxed{V_2 = 2 \times 4^{5/2} = 64 \text{ l}}$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{2 \times 2}{p_2 64} = 4 \Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{1}{64} \text{ atm}}$$

2) Teniendo en cuenta que el número de moles de la transformación es:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow n = \frac{p_1 V_1}{RT_1} = \frac{2 \times 2}{0{,}082 \times 300} = 0{,}16 \text{ moles}$$

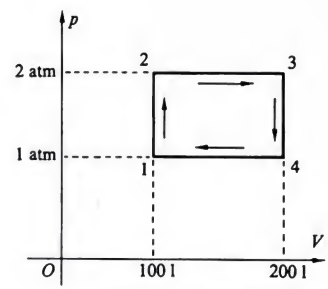
obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} Q = \text{ct}^e \rightarrow dQ = 0 \\ dQ - dW = dU \end{array}\right| \Rightarrow -dW = dU \Rightarrow \boxed{-W_1^2 = U_1^2}$$

$$\boxed{U_1^2 = \int_1^2 nc_v dT = nc_v(T_2 - T_1) = 0{,}16 \times 5 \left(\frac{300}{4} - 300\right) \text{cal} = -180 \text{ cal}}$$

Al ser una expansión, el trabajo (positivo) lo realiza el gas a costa de su energía interna (negativa).

Problema 33. Dos moles de un gas perfecto ($c_v = 3$ cal/mol °K) describen el ciclo de la figura; determinar la temperatura de cada vértice y el trabajo, calor, variación de energía interna y variación de entropía en cada una de las líneas que constituyen el ciclo, y en el ciclo total. Determinar el rendimiento del ciclo.



Problema XXIII-33

Solución

1)

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{p_1 V_1}{nR} = \frac{1 \times 100}{2 \times 0{,}082} \Rightarrow \boxed{T_1 = 610° \text{ K}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \dfrac{T_1}{T_2} \\ V_1 = V_2 \end{array}\right| \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{610}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = 1\,220° \text{ K}}$$

$$\left.\frac{p_1 V_1}{p_3 V_3} = \frac{T_1}{T_3}\right| \frac{1 \times 100}{2 \times 200} = \frac{610}{T_3} \Rightarrow \boxed{T_3 = 2\,440° \text{ K}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1 V_1}{p_4 V_4} = \dfrac{T_1}{T_4} \\ p_1 = p_4 \end{array}\right| \frac{V_1}{V_4} = \frac{T_1}{T_4} \Rightarrow \frac{100}{200} = \frac{610}{T_4} \Rightarrow \boxed{T_4 = 1\,220° \text{ K}}$$

2) ISOCORA $(1 \rightarrow 2)$:

$$\left.\begin{array}{r} W_1^2 = \displaystyle\int_1^2 pdV \\ V = \text{ct}^{\text{e}} \quad \rightarrow \quad dV = 0 \end{array}\right| \boxed{W_1^2 = 0}$$

$$dQ - pdV = dU \quad \Rightarrow \quad dQ = dU = nc_v dT$$

$$Q_1^2 = U_1^2 = \int_1^2 nc_v dT = nc_v \int_1^2 dT = nc_v(T_2 - T_1) = 2 \times 3(1\,220 - 610) \text{ cal}$$

$$\boxed{Q_1^2 = U_1^2 = 3\,660 \text{ cal} = 15\,298{,}8 \text{ J}}$$

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad \Rightarrow \quad S_1^2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_2}{T_1} = 2 \times 3 \ln \frac{1\,220}{610} \text{ cal/°K}$$

$$\boxed{S_1^2 = 4{,}16 \text{ cal/°K} = 17{,}38 \text{ J/°K}}$$

3) ISOBARA $(2 \rightarrow 3)$:

$$dU = nc_v dT \quad \Rightarrow \quad U_2^3 = \int_2^3 nc_v dT = nc_v(T_3 - T_2) = 2 \times 3(2\,440 - 1\,220) \text{ cal}$$

$$\boxed{U_2^3 = 7\,320 \text{ cal} = 30\,597{,}6 \text{ J}}$$

$$\left.\begin{array}{l} dQ = nc_p dT \\ c_p - c_v = R \\ R = 2 \text{ cal/mol °K} \end{array}\right| \quad Q_2^3 = \int_2^3 nc_p dT = n(c_v + R)(T_3 - T_2) = 2(3 + 2)(2\,440 - 1\,220) \text{ cal}$$

$$\boxed{Q_2^3 = 12\,200 \text{ cal} = 50\,996{,}0 \text{ J}}$$

$$dW = dQ - dU \quad \Rightarrow \quad W_2^3 = Q_2^3 - U_2^3 = (12\,200 - 7\,320) \text{ cal}$$

$$\boxed{W_2^3 = 4\,880 \text{ cal} = 20\,398{,}4 \text{ J}}$$

$$S_2^3 = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \int_2^3 \frac{nc_p dT}{T} = n(c_v + R)\ln \frac{T_3}{T_2} = 2(3 + 2)\ln \frac{2\,440}{1\,220} \text{ cal/°K}$$

$$\boxed{S_2^3 = 6{,}93 \text{ cal/°K} = 28{,}97 \text{ J/°K}}$$

4) ISOCORA $(3 \rightarrow 4)$:

$$\left.\begin{array}{r} W_3^4 = \displaystyle\int_3^4 pdV \\ V = \text{ct}^{\text{e}} \quad \Rightarrow \quad dV = 0 \end{array}\right| \boxed{W_3^4 = 0}$$

$$dQ = dU \quad \Rightarrow \quad Q_3^4 = U_3^4 = \int_3^4 nc_v dT = nc_v(T_4 - T_3) = 2 \times 3(1\,220 - 2\,440) \text{ cal}$$

$$\boxed{Q_3^4 = U_3^4 = -\,7\,320 \text{ cal} = -\,30\,597{,}6 \text{ J}}$$

$$S_3^4 = \int_3^4 \frac{dQ}{T} = \int_3^4 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_4}{T_3} = 2 \times 3 \ln \frac{1\,220}{2\,440} \text{ cal/°K}$$

$$\boxed{S_3^4 = -\,4{,}16 \text{ cal/°K} = -\,17{,}38 \text{ J/°K}}$$

5) ISOBARA $(4 \to 1)$:

$$U_4^1 = \int_4^1 nc_v dT = nc_v(T_1 - T_4) = 2 \times 3(610 - 1\,220) \text{ cal}$$

$$\boxed{U_4^1 = -\ 3\,660 \text{ cal} = -\ 15\,298{,}8 \text{ J}}$$

$$Q_4^1 = \int_4^1 nc_p dT = n(c_v + R)\,(T_1 - T_4) = 2(3 + 2)\,(610 - 1\,220) \text{ cal}$$

$$\boxed{Q_4^1 = -\ 6\,100 \text{ cal} = 25\,498{,}0 \text{ J}}$$

$$W_4^1 = Q_4^1 - U_4^1 = (-6\,100 + 3\,660) \text{ cal}$$

$$\boxed{W_4^1 = -\ 2\,440 \text{ cal} = -\ 10\,199{,}2 \text{ J}}$$

$$S_4^1 = \int_4^1 \frac{dQ}{T} = \int_4^1 \frac{nc_p dT}{T} = n(c_v + R)\ln\frac{T_1}{T_4} = 2(3 + 2)\ln\frac{610}{1\,220} \text{ cal/°K}$$

$$\boxed{S_4^1 = -\ 6{,}93 \text{ cal/°K} = -\ 28{,}97 \text{ J/°K}}$$

6) Ciclo completo:

$$\boxed{\Delta U = 0} \qquad \boxed{\Delta S = 0}$$

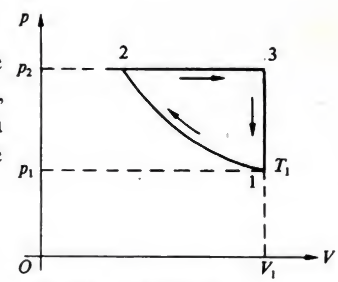
$$Q = W = W_2^3 + W_4^1 = (4\,880 - 2\,440) \text{ cal}$$

$$\boxed{Q = W = 2\,440 \text{ cal} = 10\,199{,}2 \text{ J}}$$

7) Rendimiento:

$$\eta = \frac{W}{Q_1^2 + Q_2^3} = \frac{10\,199{,}2}{15\,298{,}8 + 50\,996{,}0} = 0{,}15 \quad \Rightarrow \boxed{15\ \%}$$

Problema 34. Un cierto número de moles de un gas perfecto describe el ciclo de la figura, siendo conocidos los valores de las variables en ella expresadas (T_1, V_1, p_1, p_2), así como el calor molar a volumen constante (c_v). Determinar a costa de tales datos el valor de p, v y T en cada vértice; el calor, trabajo y variación de energía interna y entropía en cada línea y en el ciclo:
1. Suponiendo isoterma la transformación $(1 \to 2)$.
2. Suponiendo adiabática la transformación $(1 \to 2)$.



Problema XXIII-24

Solución

1)

a)

$$p_1V_1 = nRT_1 \quad \Rightarrow \quad n = \frac{p_1V_1}{RT_1}$$

$$\boxed{T_2 = T_1} \Rightarrow \quad p_1V_1 = p_2V \quad \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{p_1}{p_2}V_1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{p_3 = p_2}\\ \boxed{V_3 = V_1}\end{array}\right| \quad \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_3V_3}{T_3} \quad \Rightarrow \boxed{T_3 = \frac{p_2}{p_1}T_1}$$

b) Isoterma (1 − 2):

$$U_1^2 = \int_1^2 nc_v dT \qquad \boxed{U_1^2 = 0}$$

$$T = \text{ct}^e \rightarrow dT = 0$$

$$Q_1^2 = W_1^2 = \int_1^2 pdV \qquad Q_1^2 = W_1^2 = \int_1^2 \frac{nRTdV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$pV = nRT$$

$$\boxed{Q_1^2 = W_1^2 = p_1V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

$$S_1^2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} Q_1^2 \Rightarrow \boxed{S_1^2 = \frac{p_1V_1}{T_1} \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

Isobara (2 → 3):

$$U_2^3 = \int_2^3 nc_v dT = nc_v(T_3 - T_2) = \frac{p_1V_1}{RT_1} c_v \left(\frac{p_2}{p_1} T_1 - T_1\right)$$

$$\boxed{U_2^3 = \frac{c_v}{R} V_1(p_2 - p_1)}$$

$$W_2^3 = \int_2^3 p_2 dV = p_2(V_3 - V_2) = p_2 \left(V_1 - \frac{p_1}{p_2} V_1\right)$$

$$\boxed{W_2^3 = V_1(p_2 - p_1)}$$

$$Q_2^3 = U_2^3 + W_2^3 \Rightarrow \boxed{Q_2^3 = \left(\frac{c_v}{R} + 1\right) V_1(p_2 - p_1)}$$

$$S_2^3 = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \int_2^3 \frac{nc_p dT}{T} = n(c_v + R) \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$\boxed{S_2^3 = \frac{p_1V_1}{RT_1} (c_v + R) \ln \frac{p_2}{p_1}}$$

d) Isocora (3 → 1):

$$W_3^1 = \int_3^1 pdV \qquad \boxed{W_3^1 = 0}$$

$$V = \text{ct}^e \Rightarrow dV = 0$$

$$Q_3^1 = U_3^1 = \int_3^1 nc_v dT = nc_v(T_1 - T_3) = \frac{p_1V_1}{RT_1} c_v \left(T_1 - \frac{p_2}{p_1} T_1\right)$$

$$\boxed{Q_3^1 = U_3^1 = \frac{c_v}{R} V_1(p_1 - p_2)}$$

$$S_3^1 = \int_3^1 \frac{dQ}{T} = \int_3^1 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_1}{T_3}$$

$$\boxed{S_3^1 = \frac{p_1V_1}{RT_1} c_v \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

e) Ciclo completo:

$$\boxed{\Delta U = 0} \quad \boxed{\Delta S = 0}$$

$$\boxed{Q = W = V_1 \left[p_1 \ln \frac{p_1}{p_2} + (p_2 - p_1) \right]}$$

2) a)

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_v + R}{c_v} \qquad n = \frac{p_1 V_1}{R T_1}$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \qquad V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{c_v}{c_v + R}}}$$

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_v + R}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{p_3 = p_2} \\ \boxed{V_3 = V_1} \end{array} \right| \quad \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} = \frac{T_3}{T_1} \Rightarrow \boxed{T_3 = T_1 \frac{p_2}{p_1}}$$

b) ADIABÁTICA $(1 \rightarrow 2)$:

$$Q = \text{ct}^{\text{e}} \Rightarrow \boxed{Q_1^2 = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1^2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dQ}{T} \\ dQ = 0 \end{array} \right| \quad \boxed{S_1^2 = 0}$$

$$- W_1^2 = U_1^2 = \int_1^2 n c_v dT = n c_v (T_2 - T_1) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} c_v \left[T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - T_1 \right]$$

$$\boxed{U_1^2 = - W_1^2 = \frac{c_v}{R} p_1 V_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{R}{c_v + R}} - 1 \right]}$$

c) ISOBARA $(2 \rightarrow 3)$:

$$U_2^3 = \int_2^3 n c_v dT = n c_v (T_3 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} c_v \left[T_1 \frac{p_2}{p_1} - T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] =$$

$$\boxed{U_2^3 = \frac{c_v}{R} p_2 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{c_v}{c_v + R}} \right]}$$

$$Q_2^3 = \int_2^3 n c_p dT = n c_p (T_3 - T_2) = \frac{p_1 V_1}{R T_1} (R + c_v) \left[T_1 \frac{p_2}{p_1} - T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]$$

$$\boxed{Q_2^3 = \left(1 + \frac{c_v}{R} \right) p_2 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{c_v}{c_v + R}} \right]}$$

$$W_2^3 = Q_2^3 - U_2^3 \Rightarrow \boxed{W_2^3 = p_2 V_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{c_v}{c_v + R}} \right]}$$

$$S_2^3 = \int_2^3 \frac{dQ}{T} = \int_2^3 \frac{n c_p dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$\boxed{S_2^3 = \frac{p_1 V_1}{R T_1} (R + c_v) \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{c_v}{c_v + R}}}$$

d) ISOCORA $(3 \rightarrow 1)$:

$$\left.\begin{array}{l} W_3^1 = \displaystyle\int_3^1 p dV \\ V = \text{ct}^{\text{e}} \Rightarrow dV = 0 \end{array}\right| \boxed{W_3^1 = 0}$$

$$Q_3^1 = U_3^1 = \int_3^1 nc_v dT = nc_v(T_1 - T_3) = \frac{p_1 V_1}{RT_1} c_v \left(T_1 - T_1 \frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\boxed{Q_3^1 = U_3^1 = \frac{c_v}{R} V_1(p_1 - p_2)}$$

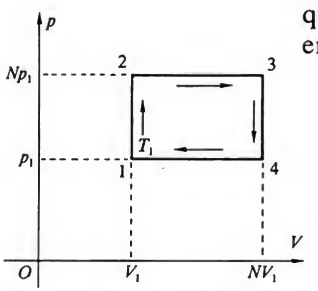
$$S_3^1 = \int_3^1 \frac{dQ}{T} = \int_3^1 \frac{nc_v dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_1}{T_3}$$

$$\boxed{S_3^1 = \frac{p_1 V_1}{RT_1} c_v \ln \frac{p_1}{p_2}}$$

e) Ciclo completo:

$$\boxed{\Delta U = 0} \qquad \boxed{\Delta S = 0}$$

$$\boxed{Q = W = \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{c_v}{c_v + R}}\right] V_1 \left(\frac{c_v}{R} p_1 - p_2\right)}$$



Problema XXIII-35

Problema 35. Calcular el rendimiento térmico en función de $N > 1$ de un motor que funciona con un gas perfecto monoatómico, y recorre el ciclo representado en la figura.

Solución

Calculemos las temperaturas de los vértices 2, 3 y 4 en función de T_1:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1 V_1}{p_2 V_2} = \dfrac{T_1}{T_2} \\ V_1 = V_2 \\ p_2 = Np_1 \end{array}\right| \frac{1}{N} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow T_2 = NT_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1 V_1}{p_3 V_3} = \dfrac{T_1}{T_3} \\ p_3 = Np_1 \\ V_3 = NV_1 \end{array}\right| \frac{1}{N^2} = \frac{T_1}{T_3} \Rightarrow T_3 = N^2 T_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{p_1 V_1}{p_4 V_4} = \dfrac{T_1}{T_4} \\ p_4 = p_1 \\ V_4 = NV_1 \end{array}\right| \frac{1}{N} = \frac{T_1}{T_4} \Rightarrow T_4 = NT_1$$

Cálculo del trabajo realizado por el motor:

$$W_1^2 = 0$$

$$W_2^3 = \int_2^3 p_2 dV = p_2(V_3 - V_2) = Np_1(NV_1 - V_1) = p_1V_1(N-1)N$$

$$W_3^4 = 0$$

$$W_4^1 = \int_4^1 p_1 dV = p_1(V_1 - V_4) = p_1V_1(1 - N) = -p_1V_1(N-1)$$

$$W = W_1^2 + W_2^3 + W_3^4 + W_4^1 = p_1V_1(N-1)^2$$

Cálculo del calor comunicado (positivo) al sistema:

$$Q_1^2 = \int_1^2 nc_v dT = nc_v(T_2 - T_1) = nT_1c_v(N-1)$$

$$Q_2^3 = \int_2^3 nc_p dT = nc_p(T_3 - T_2) = nT_1c_pN\ (N-1)$$

$$Q = Q_1^2 + Q_2^3 = nT_1(N-1)\,[c_v + c_p(N-1)]$$

luego, como:

$$\left.\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q} \\ R &= \frac{p_1V_1}{nT_1} \end{aligned}\right| \quad \eta = \frac{R(N-1)}{c_v + c_p(N-1)}$$

y teniendo en cuenta que:

$$c_v = 3 \text{ cal/mol °K} \qquad c_p = 5 \text{ cal/mol °K} \qquad R = 2 \text{ cal/mol °K}$$

obtenemos:

$$\boxed{\eta = \frac{2(N-1)}{3 + 5(N-1)} = \frac{2N-2}{5N-2}}$$

Problema 36. Dos moles de un gas perfecto monoatómico describen un ciclo de Carnot, realizando en la expansión adiabática 9 932 J de trabajo. Siendo 1 000° K la temperatura del foco caliente, calcular el rendimiento del ciclo.

Solución

En la expansión adiabática:

$$\left.\begin{aligned} Q = \text{ct}^e \ &\Rightarrow\ dQ = 0 \\ dQ - dW &= dU \end{aligned}\right| - dW = dU = nc_v dT$$

$$W = \int_2^1 nc_v dT = nc_v(T_1 - T_2) \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{W}{nc_v}$$

y como el gas es monoatómico:

$$c_v = 3 \text{ cal/mol °K} \quad \Rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{9\,932}{4{,}18 \times 2 \times 3} = 396° \text{ K}$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{396}{1\,000} \simeq 0{,}4 \quad \Rightarrow \boxed{40\ \%}$$

Problema 37. Un alpinista que pesa 70 kg, cargado con una mochila de 30 kg, sube una montaña de 300 m, estando el ambiente a una temperatura de 20° C. Para la realización de este trabajo, sin pérdidas teóricas de las reservas de su organismo, le basta con ingerir en su comida 400 g más de patatas que en los días que no ejercita su deporte. Sabiendo que el calor de combustión de las patatas es de 90 kcal cada 100 g, demostrar que el hombre es una máquina más perfecta que la ideal de Carnot.

Solución

Si el hombre fuera una máquina de Carnot, teniendo en cuenta que la temperatura media del cuerpo humano es 37°, el rendimiento sería:

$$\eta = \frac{T - T'}{T} = \frac{310{,}16 - 293{,}16}{310{,}16} = 0{,}055$$

El trabajo realizado por el alpinista es:

$$W = (M + M')gh = (70 + 30)300 = 3 \times 10^4 \text{ kgm}$$

El trabajo correspondiente a las calorías producidas por las patatas es:

$$W = 90 \times 4 \times 427 = 153\,720 \text{ kgm}$$

El rendimiento es:

$$\eta' = \frac{3 \times 10^4}{153\,720} = 0{,}19 \Rightarrow \boxed{\eta' > \eta}$$

El hombre es una máquina más perfecta que la de Carnot.

Problema 38. Queremos multiplicar por n el rendimiento de un ciclo reversible de Carnot, aumentando al hogar y disminuyendo al refrigerante el mismo número de grados (ΔT). Hallar una fórmula general relacionando ΔT con el primitivo rendimiento η, n y la temperatura del hogar T.

Solución

El rendimiento de un cielo de Carnot:

$$\eta = \frac{T - T'}{T}$$

Queremos multiplicar por n; incrementando T y T' en forma conveniente, tendremos:

$$\eta n = \frac{(T + \Delta T) - (T' - \Delta T)}{T + \Delta T} = \frac{T - T' + 2\Delta T}{T + \Delta T} = \frac{\eta T + 2\Delta T}{T + \Delta T}$$

$$\boxed{\Delta T = \frac{\eta T(n - 1)}{2 - n\eta}}$$

Problema 39. En una nevera de compresión se trata de fabricar 5 kg de hielo cada hora, partiendo de agua a 0° C. El ambiente exterior está a 27° C. Calcular:

1. La eficiencia de la nevera.
2. La potencia teórica del motor.
3. La potencia real si el rendimiento de la operación es el 75 %.
4. El costo de la energía eléctrica necesaria para fabricar 100 kg de hielo a 5 pesetas el kW · h.

Solución

1)

$$\boxed{K = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{273}{300 - 273} \simeq 10}$$

2)

$$W = Q_2 - Q_1 = \frac{Q_1}{\eta}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

$$\boxed{P = \frac{Q_1}{\eta t} = \frac{5\,000 \times 80 \times 4{,}18}{10 \times 3\,600} \simeq 46 \text{ W}}$$

3)

$$\boxed{P_r = \frac{P}{\eta} = \frac{46}{0{,}75} \simeq 61 \text{ W}}$$

4) Para 100 kg de hielo son necesarias 20 horas:

$$W = Pt = 0{,}061 \times 20 = 1{,}22 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \boxed{p = 1{,}22 \times 5 = 6{,}10 \text{ ptas}}$$

Problema 40. Hallar la variación de energía interna y de entropía que se produce al fundir 1 kg de hielo a la presión normal. (Considérese que la densidad del hielo es 0,9 y la del agua 1.)

Solución

1)

$$\Delta U = Q_1^2 - W_1^2$$

$$Q_1^2 = Ml = 10^3 \times 80 = 80\,000 \text{ cal}$$

$$W_1^2 = p(V_2 - V_1)$$

$$p = 1 \text{ atm}$$

$$V_2 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = \frac{1\,000}{0{,}9} \text{ cm}^3$$

$$W_1^2 = \frac{76 \times 13{,}6 \times 980 \left[1\,000 - \frac{10^3}{0{,}9}\right]}{10^7 \times 4{,}18} = -\,2{,}69 \text{ cal}$$

$$\boxed{\Delta U = 80\,000 + 2{,}69 = 80\,002{,}69 \text{ cal}}$$

2)

$$dS \geqslant \frac{dQ}{T} \quad \rightarrow \Delta S \geqslant \int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

Al ser $T = \text{ct}^{\text{e}} = 273°\ \text{K}$ en el cambio de estado:

$$\boxed{\Delta S \geqslant \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q_1^2}{T} = \frac{80\,000}{273} = 293{,}04 \text{ cal/°K}}$$

El signo = corresponde a transformaciones reversibles, y el >, a las reales o irreversibles.

Problema 41. Calcular el aumento de entropía al mezclar 100 kg de hielo a 0° C con 80 kg de agua a 100° C. (Se supone nula la influencia del medio exterior.)

Solución

Llamaremos S_0 a la entropía de 1 kg de hielo a 0° C. La correspondiente a 100 kg de hielo es 100 S_0. La entropía de 80 kg de H_2O a 100° C es la que corresponde a 80 kg de hielo a 0° C; más la variación de entropía al transformar estos 80 kg en agua líquida a 0°; más la variación de entropía para elevar 100° C la temperatura. Por tanto, la entropía total del sistema antes de la mezcla es:

$$S_1 = 100S_0 + 80S_0 + \frac{80 \times 80}{273} + \int_{273}^{373} \frac{80dT}{T} = 180S_0 + \frac{6\,400}{273} + 80\ln\frac{373}{273} = (180S_0 + 48{,}4)\ \text{kcal/°K}$$

80 kg de H_2O al pasar de 100° C a 0° C desprenden 80 × 100 kcal, los cuales son capaces de fundir, justamente, los 100 kg de hielo. El estado final del sistema es, por tanto, 180 kg de H_2O a 0° C. Su entropía es:

$$S_2 = \left[180S_0 + \frac{180 \times 80}{273}\right] \text{kcal/° K} = (180S_0 + 52{,}7)\ \text{kcal/°K}$$

El aumento de entropía del sistema es:

$$\boxed{\Delta S = S_2 - S_1 = (180S_0 + 52{,}7) - (180S_0 + 48{,}4) = 4{,}3\ \text{kcal/°K}}$$

Problema 42. La temperatura del foco caliente de un motor de Carnot que funciona por vía reversible es de 300° K, y la del foco frío, 273° K. Si el número de calorías que recibe el motor del foco a 300° K es de 2 000, calcular:

1. Rendimiento.
2. Calorías cedidas al foco frío.
3. Si el motor funciona como frigorífico (recorrido a la inversa) y recibe 2 000 calorías del foco a 273° K. Calcular la eficiencia.
4. Cuántas calorías cede al foco caliente.

Solución

1)

$$\eta = \frac{Q + Q'}{Q} = \frac{T - T'}{T} = \frac{300 - 273}{300} = 0{,}09 \qquad \boxed{9\ \%}$$

2)

$$\frac{2\,000 + Q'}{2\,000} = \frac{300 - 273}{300} \Rightarrow \boxed{Q' = -\,1\,820\ \text{cal}}$$

3) (Ver figura del formulario.)

$$\boxed{K = \frac{Q_1}{W} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} = \frac{T_1}{300 - 273} \simeq 10}$$

4)

$$\frac{2\,000}{Q_1 - 2\,000} = \frac{273}{300 - 273} \Rightarrow \boxed{Q_2 \simeq 2\,200\ \text{cal}}$$

Capítulo XXIV

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTATICA

FORMULARIO

$$\boldsymbol{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \boldsymbol{r}$$

(UEE) $\quad \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi}$

(Giorgi) $\quad \varepsilon_0 = \dfrac{1}{4\pi 9 \times 10^9} \dfrac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}$

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0$$

Problema 1. Calcular la carga que deben tener dos conductores para que colocados en el vacío y a la distancia de 1 m se atraigan o repelan con una fuerza igual a 91,843 t.

Solución

Si las dos cargas son iguales, la expresión de la ley de Coulomb toma la forma:

$$F = K \frac{Q^2}{r^2}$$

y como:

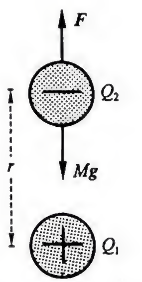
$$\left.\begin{array}{l} F = 91{,}843 \text{ t} = 91\,843 \times 9{,}8 \text{ N} \\ K = 9 \times 10^9 \dfrac{\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} \end{array}\right| \Rightarrow \quad 91\,843 \times 9{,}8 = 9 \times 10^9 Q^2 \quad \Rightarrow \boxed{Q = 10^{-2} \text{ C}}$$

Problema 2. Dos cuerpos cargados con 1 C se repelen entre sí en el vacío con una fuerza de 102 kp. ¿A qué distancia están uno de otro?

Solución

$$F = K\,\frac{Q^2}{r^2} \quad \left| \begin{array}{l} F = 102 \times 9{,}8\ \text{N} \\ Q = 1\ \text{C} \\ K = 9 \times 10^9\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \end{array} \right| \Rightarrow \quad 102 \times 9{,}8 = 9 \times 10^9\ \frac{1}{r^2} \Rightarrow \boxed{r = 3\,000\ \text{m} = 3\ \text{km}}$$

Problema 3. De uno de los platillos de una balanza se cuelga un cuerpo cargado con 1 000 UEE de carga positiva; en el otro platillo se pone una tara para equilibrar la masa del cuerpo. En estas condiciones se coloca debajo del cuerpo cargado otro también cargado positivamente, de forma que la distancia entre sus centros sea 1 m. Siendo la carga eléctrica de este último 0,0098 C, calcular qué pesa se debe poner en el platillo correspondiente al cuerpo para que la balanza siga en equilibrio. Se supone que la experiencia se realiza en el vacío.



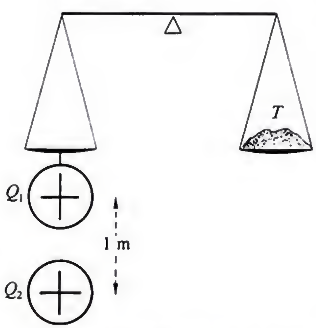
Problema XXIV-3

Solución

$$F = K\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad \left| \begin{array}{l} Q_1 = 10^3\ \text{UEE} \\ Q_2 = 98 \times 10^{-4}\ \text{C} = 98 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^9\ \text{UEE} \\ r\ = 10^2\ \text{cm} \\ K\ = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{F = \frac{10^3 \times 98 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^9}{10^4} = 3 \times 980\,000\ \text{dyn} = 3\ \text{kp}}$$

Problema 4. Un cuerpo cuyo peso es 100 g está cargado con 9 800 UEE. ¿A qué distancia sobre él debe colocarse otro cuerpo cargado con 100 000 UEE de signo contrario, para que el primero no caiga por la acción de su peso? Se supone que la experiencia se realiza en el vacío.



Problema XXIV-4

Solución

$$\left. \begin{array}{l} F = K\,\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2} \\ F = Mg \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{KQ_1Q_2}{Mg}} = \sqrt{\frac{9\,800 \times 10^5}{10^2 \times 980}} = 100\ \text{cm} = 1\ \text{m}}$$

Problema 5. Separamos los electrones de los protones de 1 mol de H_2 y los situamos a una distancia de 10^3 km. Determínese la fuerza con que se atraen. (Carga del protón: $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Número de Avogadro: $6{,}02 \times 10^{23}$.)

Solución

Un mol de hidrógeno contiene $6{,}02 \times 10^{23}$ moléculas de H_2 y cada molécula contendrá 2 protones y 2 electrones, con lo que la carga total, una vez separados, será:

$$Q = 2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 6{,}02 \times 10^{23} = 192\,640 \text{ C}$$

La fuerza de atracción es:

$$\boxed{F = K\frac{Q^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{192\,640^2}{10^{12}} = 3{,}34 \times 10^8 \text{ N}}$$

Problema 6. Dos partículas alfa están separadas una distancia de 10^{-11} cm. Calcular la fuerza electrostática con que se repelen, la fuerza gravitatoria con que se atraen y comparar ambas entre sí.

$$K = 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

$$e = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C} \qquad G = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Masa de una partícula α:

$$m = 6{,}68 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Solución

La carga de una partícula α es $2e$.

$$F_E = K\frac{Q^2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{4 \times 1{,}6^2 \times 10^{-38}}{10^{-26}} = 92{,}16 \times 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_G = G\frac{m^2}{r^2} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{6{,}68^2 \times 10^{-54}}{10^{-26}} = 29{,}76 \times 10^{-40} \text{ N}$$

La fuerza gravitatoria es del orden de 10^{37} veces menor que la electrostática y, por tanto, despreciable frente a ella.

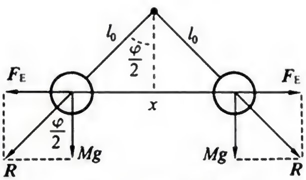
Problema 7. Calcular cuántas veces es menor la atracción gravitatoria que la repulsión electrostática entre dos núcleos de hidrógeno. DATOS: Masa del hidrógeno: $1{,}67 \times 10-^{27}$ kg. Carga del núcleo de hidrógeno: $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Constante de la gravitación $6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg². Constante de la ley de Coulomb: 9×10^9 N · m²/C².

Solución

$$\left.\begin{aligned} F_E &= K\frac{Q^2}{r^2} \\ F_G &= G\frac{m^2}{r^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{F_E}{F_G} = \frac{KQ^2}{Gm^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 1{,}6^2 \times 10^{-38}}{6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}67^2 \times 10^{-54}} = 1{,}24 \times 10^{36}}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es del orden de 10^{36} veces menor que la de atracción electrostática y, por tanto, despreciable en comparación con esta última.

Problema 8. Dos esferas iguales de radio 1 cm y masa 9,81 g están suspendidas del mismo punto por medio de sendos hilos de seda de longitud 19 cm. Ambas esferas están cargadas negativamente con la misma carga eléctrica en magnitud. ¿Cuánto vale esta carga si en el equilibrio el ángulo que forman los dos hilos es de 90°? ¿A cuántos electrones equivale la carga contenida en cada esfera? ¿Cuál es la fuerza de gravitación que existe entre las esferas en el equilibrio? Carga del electrón = $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. G = constante de gravitación universal = $6{,}67 \times 10^{-11}$ unidades Giorgi.



Problema XXIV-8

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tag} \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{F_E}{Mg} \\[2ex] \dfrac{\varphi}{2} = 45^\circ \end{array}\right| \quad F_E = Mg \quad \Rightarrow \quad K \frac{Q^2}{x^2} = Mg$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2l \operatorname{sen} \dfrac{\varphi}{2} \\[2ex] l = l_0 + r \end{array}\right| \quad \frac{KQ^2}{4l^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\varphi}{2}} = Mg \quad \Rightarrow \quad Q = 2l \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{Mg}{K}}$$

trabajando en UEE:

$$\boxed{Q = 2 \times 20 \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{9{,}81 \times 980} = 2\,773{,}2 \text{ UEE} = 924{,}4 \times 10^{-9} \text{ C}}$$

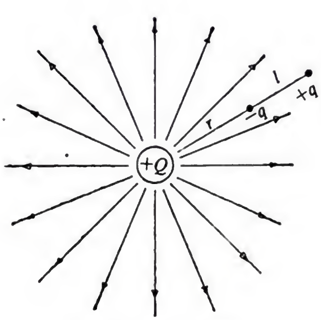
2)

$$\boxed{n = \frac{Q}{e} = \frac{924{,}4 \times 10^{-9}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 57\,775 \times 10^8 \text{ electrones}}$$

3)

$$\boxed{F = G \frac{M^2}{x^2} = G \frac{M^2}{4l^2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\varphi}{2}} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{9{,}81^2 \times 10^{-6} \times 2}{4 \times 4 \times 10^{-2}} = 0{,}802 \times 10^{-17} \text{ N}}$$

Problema 9. Calcular la fuerza que actúa sobre un dipolo eléctrico de longitud l sumergido en un campo eléctrico radial creado por una carga Q. Suponer que $r \gg l$.



Problema XXIV-9

Solución

La fuerza resultante es:

$$F = K \frac{Qq}{(r+l)^2} - K \frac{Qq}{r^2} = \frac{KQq}{r^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \dfrac{l}{r}\right)^2} - 1 \right]$$

siendo $r \gg l$, podemos poner:

$$\boxed{F \simeq \frac{KQq}{r^2} \left(\frac{1}{1 + \dfrac{2l}{r}} - 1 \right) = \frac{KQq}{r^2} \frac{\dfrac{-2l}{r}}{1 + \dfrac{2l}{r}} \simeq - \frac{2KQql}{r^3} = - \frac{2KQp}{r^3}}$$

el signo menos nos indica que la fuerza resultante es de atracción (p = módulo del vector momento del dipolo).

Problema 10. La fuerza con que se atraen dos cuerpos iguales cargados cuando se encuentran a una distancia de 3 m es de 1 N. Se ponen en contacto y la carga se distribuye por igual entre los dos cuerpos. Colocándolas a continuación a la misma distancia, se repelen con una fuerza de 2 N. Calcular la carga que inicialmente tenían los dos cuerpos.

Solución

$$F = K\,\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Inicialmente se tiene:

$$1 = 9 \times 10^9\,\frac{Q_1 Q_2}{9} \quad \Rightarrow \quad Q_1 Q_2 = 10^{-9}\ \mathrm{C}^2$$

después de ponerlas en contacto y separarlas de nuevo, la carga de cada cuerpo es $(Q_1 - Q_2)/2$; luego:

$$2 = 9 \times 10^9\,\frac{(Q_1 - Q_2)^2}{4 \times 9} \Rightarrow (Q_1 - Q_2)^2 = 8 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}^2 \Rightarrow \boxed{Q_1 = 99{,}5\ \mu\mathrm{C}} \quad \boxed{Q_2 = 10{,}0\ \mu\mathrm{C}}$$

Problema 11. Calcular la fuerza que actúa sobre una carga de 1 μC colocada en (0,4) m debida a la siguiente distribución: en (0,0), una carga $Q_1 = -3\ \mu$C; en (4,0) m, una carga $Q_2 = 4\ \mu$C, y en (1,1) m, una carga $Q_3 = 2\ \mu$C.

Solución

$$\boldsymbol{F} = KQ\Sigma\,\frac{Q_i}{r_i^3}\,\boldsymbol{r}_i = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j}$$

$$F_1 = K\,\frac{QQ_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9\,\frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{16} = \frac{27}{16}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\cos\varphi_1 = 0 \quad \Big| \quad F_{x1} = F_1\cos\varphi_1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\varphi_1 = -1 \quad \Big| \quad F_{y1} = F_1\operatorname{sen}\varphi_1 = -\frac{27}{16}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_2 = K\,\frac{QQ_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9\,\frac{10^{-6} \times 4 \times 10^{-6}}{32} = \frac{9}{8}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

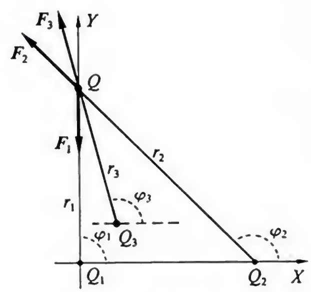
$$\cos\varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Big| \quad F_{x_2} = F_2\cos\varphi_2 = -\frac{9\sqrt{2}}{16}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Big| \quad F_{y_2} = F_2\operatorname{sen}\varphi_1 = \frac{9\sqrt{2}}{16}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_3 = K\,\frac{QQ_3}{r_3^2} = 9 \times 10^9\,\frac{10^{-6} \times 2 \times 10^{-6}}{10} = \frac{9}{5}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\cos\varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \Big| \quad F_{x_3} = F_3\cos\varphi_3 = -\frac{9}{5\sqrt{10}}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \Big| \quad F_{y_3} = F_3\operatorname{sen}\varphi_3 = \frac{27}{5\sqrt{10}}\,10^{-3}\ \mathrm{N}$$



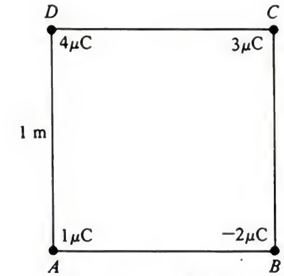
Problema XXIV-11

$$F_x = F_{x_1} + F_{x_2} + F_{x_3} = \left(-\frac{9\sqrt{2}}{16} - \frac{9}{5\sqrt{10}}\right)10^{-3} = -1{,}36 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$F_y = F_{y_1} + F_{y_2} + F_{y_3} = \left(-\frac{27}{16} + \frac{9\sqrt{2}}{16} + \frac{27}{5\sqrt{10}}\right)10^{-3} = 0{,}81 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (-1{,}36\boldsymbol{i} + 0{,}81\boldsymbol{j})\,10^{-3}\ \mathrm{N}}$$

(Este problema se puede resolver más fácilmente calculando el potencial en el punto (0, 4) m, debido a la distribución dada, a continuación el valor del campo en dicho punto y, por tanto, la fuerza sobre 1 μC. Esta forma de operar se hará en los capítulos XXV y XXVI.)



Problema XXIV-12

Problema 12. El cuadrado de la figura tiene 1 m de lado. Determinar la fuerza que actúa sobre la carga situada en el vértice C.

Solución

$$F_A = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{2} = 13{,}5 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

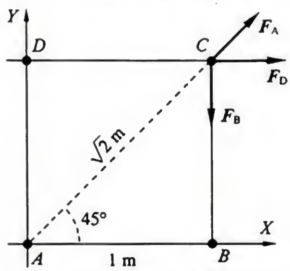
$$F_B = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{1} = 54 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

$$F_D = 9 \times 10^9 \frac{4 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{1} = 108 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

$$\boldsymbol{F}_A \left| \begin{array}{l} F_{Ax} = 13{,}5 \times 10^{-3} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{N} \\ F_{Ay} = 13{,}5 \times 10^{-3} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ \text{N} \end{array} \right.$$

$$\boldsymbol{F}_B = -\ 54 \times 10^{-3} \boldsymbol{j}\ \text{N}$$

$$\boldsymbol{F}_D = \ 108 \times 10^{-3} \boldsymbol{i}\ \text{N}$$



Problema XXIV-12-1.ª

$$\boxed{\boldsymbol{F} = 10^{-3} \left[\left(\frac{13{,}5\sqrt{2}}{2} + 108 \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{13{,}5\sqrt{2}}{2} - 54 \right) \boldsymbol{j} \right] = 10^{-3}(117{,}5\boldsymbol{i} - 44{,}4\boldsymbol{j})\ \text{N}}$$

Problema 13. Dos cargas puntuales de −200 y 300 μC se encuentran situadas en los puntos A (1,2,1) m y B (3,0,2) m, respectivamente. Calcular la fuerza que ejercen sobre una tercera de 100 μC situada en C (−1,2,3) m.

Solución

La $\boldsymbol{F}_{13}$ tiene la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{CA}$:

$$\boldsymbol{CA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r_{13} = |\boldsymbol{CA}| = 2\sqrt{2}\ \text{m}$$

el vector unitario en la dirección y sentido de $\boldsymbol{CA}$ será:

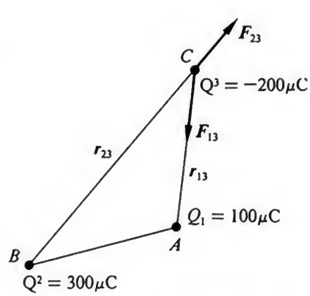
$$\frac{\boldsymbol{CA}}{CA} = \frac{2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{k}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$$

y como:

$$F_{13} = 9 \times 10^9 \frac{200 \times 10^{-6}\ 100 \times 10^{-6}}{8} = \frac{45}{2}\ \text{N}$$

tendremos:

$$\boldsymbol{F}_{13} = \frac{45}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}) = \frac{45\sqrt{2}}{4}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})\ \text{N}$$



Problema XXIV-13

La $\boldsymbol{F}_{23}$ tendrá la dirección y sentido del vector $\boldsymbol{BC}$:

$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{B} = -\ 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad r_{23} = \boldsymbol{BC} = \sqrt{21}\ \text{m}$$

además:

$$\frac{\boldsymbol{BC}}{BC} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = \frac{\sqrt{21}}{21}(-4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

y como:

$$F_{23} = 9 \times 10^9 \frac{300 \times 10^{-6}\ 100 \times 10^{-6}}{21} = \frac{90}{7}\ \text{N}$$

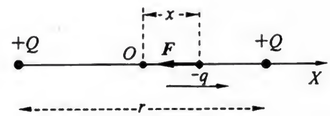
luego:

$$F_{23} = \frac{90}{7}\,\frac{\sqrt{21}}{21}\,(-4i + 2j + k) = \frac{30\sqrt{21}}{49}\,(-4i + 2j + k)\ \mathrm{N}$$

obteniéndose para valor de la fuerza total:

$$\boxed{F = F_{13} + F_{23} = \left(\frac{45\sqrt{2}}{4} - \frac{120\sqrt{21}}{49}\right) i + \frac{60\sqrt{21}}{49}\, j + \left(\frac{30\sqrt{21}}{49} - \frac{45\sqrt{2}}{4}\right) k\ \mathrm{N}}$$

Problema 14. Una partícula de masa m y carga $-q$ se encuentra en el punto medio de la línea que une otras dos cargadas con $+Q$ fijas y situadas a una distancia r la una de la otra. La partícula m está obligada a permanecer en la línea que une las dos cargas $+Q$; si separamos de la posición de equilibrio estable $a - q$ una distancia $A \ll r$, determinar su período de oscilación.



Problema XXIV-14

Solución

$$F = K_0 \frac{qQ}{\left(\frac{r}{2} + x\right)^2} - K_0 \frac{qQ}{\left(\frac{r}{2} - x\right)^2} = -\,K_0 qQ \frac{2rx}{\left(\frac{r^2}{4} - x^2\right)^2}$$

y como $x \ll r$, queda:

$$F = -\frac{32 K_0 qQ}{r^3}\,x = -\,kx \quad \Rightarrow \quad k = \frac{32 K_0 qQ}{r^3}$$

y como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\pi r}{2} \sqrt{\frac{mr}{2 K_0 qQ}}}$$

Problema 15. Calcular la fuerza que ejerce una varilla de longitud L cargada con una densidad lineal de carga λ, sobre una partícula cargada con q situada en la misma línea de la varilla y a una distancia a de su extremo.

Solución

El valor de la fuerza dF debida al elemento dx será:

Problema XXIV-15

$$dF = K_0 \frac{q\,dQ}{x^2}$$

y como:

$$dQ = \lambda dx$$

nos queda:

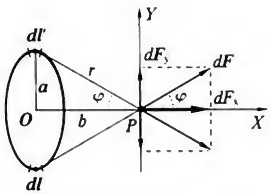
$$dF = K_0 q \lambda \frac{dx}{x^2}$$

el valor de la fuerza total resultante debida a todos los elementos de la varilla será:

$$\boxed{F = \int_a^{a+L} K_0 q\lambda \frac{dx}{x^2} = K_0 q \lambda \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a + L}\right] = K_0 q \lambda \frac{L}{a(a + L)}}$$

Problema 16. Un anillo de radio a está cargado con una densidad lineal de carga uniforme λ. Colocamos en un punto de su eje, y a una distancia b, una carga Q'. Calcular, en función de estos datos, la fuerza que actúa sobre esta carga.

Solución



Problema XXIV-16

El valor de la fuerza dF debida al elemento dl será:

$$dF = K\,\frac{Q'dQ}{r^2}$$

y como:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= \lambda dl \\ r^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}\right| \quad dF = K\,\frac{Q'\lambda dl}{a^2 + b^2}$$

que descompuesta en los ejes X e Y (ver figura) y teniendo en cuenta que la componente según el eje Y se nos anulará con la componente de la fuerza que actúa debida al elemento dl' y que esto nos ocurrirá con todas las componentes de las fuerzas debidas a todos los elementos que constituyen el anillo que se encuentran en un plano perpendicular al eje por P, sacamos en consecuencia que la fuerza activa será la suma (integral) de todas las componentes de las fuerzas creadas por todos los elementos del anillo en la dirección del eje X:

$$F = \oint dF_x$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} dF_x &= dF\cos\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad dF_x = \frac{KQ'\lambda b dl}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$$

luego:

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{KQ'\lambda b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \oint dl \\ \oint dl &= 2\pi a \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{2\pi KQ'\lambda ab}{(a^2 + b^2)^{3/2}}}$$

Capítulo XXV

EL CAMPO ELECTRICO

FORMULARIO

CAMPO ELÉCTRICO:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q'}$$

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA CARGA PUNTUAL:

$$\boldsymbol{E} = K_0 \frac{Q}{r^3} \boldsymbol{r}$$

CAMPO ELÉCTRICO CREADO POR UNA DISTRIBUCIÓN DE CARGAS PUNTUALES:

$$\boldsymbol{E} = K_0 \sum_i \frac{Q_i}{r_i^3} \boldsymbol{r}_i$$

FLUJO ELÉCTRICO:

$$\Phi = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

TEOREMA DE GAUSS:

$$\Phi = \frac{\sum_i^n Q_i}{\varepsilon_0}$$

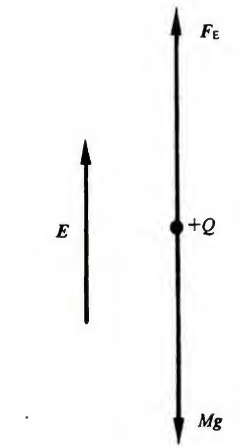
DENSIDAD LINEAL, SUPERFICIAL Y CÚBICA DE CARGA:

$$\lambda = \frac{dQ}{dl} \qquad \sigma = \frac{dQ}{dA} \qquad \rho = \frac{dQ}{dV}$$

EL CAMPO ELECTROSTÁTICO ES CONSERVATIVO:

$$\Gamma = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \qquad \boldsymbol{rot\ E} = 0$$

Problema 1. Una partícula de 5 g de masa cargada con 1 μC queda en equilibrio en el espacio, dentro de un campo eléctrico. Calcular módulo, dirección y sentido de la intensidad de este campo eléctrico.



Problema XXV-1

Solución

El campo eléctrico será vertical y hacia arriba:

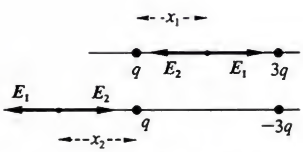
$$Mg = F_E \quad \Rightarrow \quad Mg = EQ \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Mg}{Q} = \frac{5 \times 10^{-3} \times 9{,}8}{10^{-6}} = 49 \times 10^3 \text{ N/C}}$$

Problema 2. Dos cargas eléctricas puntuales, la una, A, triple que la otra, B, están separadas 1 m. Determinar el punto en que la unidad de carga positiva estaría en equilibrio.

1. Cuando A y B tienen el mismo signo.

2. Cuando tienen signos opuestos.

Solución



Problema XXV-2

$$E_1 + E_2 = 0$$

$$K_0 \frac{Q}{r^2} - K_0 \frac{3q}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{3}{(x-1)^2} \quad \left| \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 0{,}366 \text{ m}} \\ \boxed{x_2 = -\ 1{,}366 \text{ m}} \end{array} \right.$$

x_1 = solución cuando las cargas son positivas.
x_2 = solución cuando tienen signos opuestos.

Problema 3. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual negativa de -2×10^{-2} μC está sobre el eje de ordenadas y a 1 m del origen. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por esta distribución en puntos:

1. A (2,0) m.
2. B (1,3) m.
3. C (1/2, 1/2) m.
4. D (3,4) m.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = E_x \boldsymbol{i} + E_y \boldsymbol{j}$$

$$E_x = E_{x_1} + E_{x_2}$$
$$E_y = E_{y_1} + E_{y_2}$$

$$E_1 = K_0 \frac{Q_1}{r_1^2} \quad \left| \begin{array}{l} E_{x_1} = E_1 \cos \varphi_1 \\ E_{y_1} = E_1 \operatorname{sen} \varphi_1 \end{array} \right.$$

$$E_2 = K_0 \frac{Q_2}{r_2^2} \quad \left| \begin{array}{l} E_{x_2} = E_2 \cos \varphi_2 \\ E_{y_2} = E_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \end{array} \right.$$

1)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \, \frac{10^{-8}}{4} = \frac{45}{2} \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-8}}{5} = 36 \text{ N/C}$$

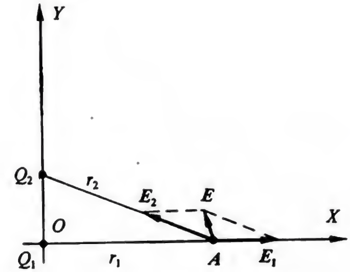
$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = 1 \\ \operatorname{sen}\varphi_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_1} = \dfrac{45}{2} \text{ N/C} \\ E_{y_1} = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_2} = -\dfrac{72}{\sqrt{5}} \text{ N/C} \\ E_{y_2} = \dfrac{36}{\sqrt{5}} \text{ N/C} \end{array}$$

$$E_x = \frac{45}{2} - \frac{72}{\sqrt{5}} = -9{,}7 \text{ N/C}$$

$$E_y = \frac{36}{\sqrt{5}} = 16{,}1 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -9{,}7\boldsymbol{i} + 16{,}1\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-3-1.ª

2)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \, \frac{10^{-8}}{10} = 9 \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-8}}{5} = 36 \text{ N/C}$$

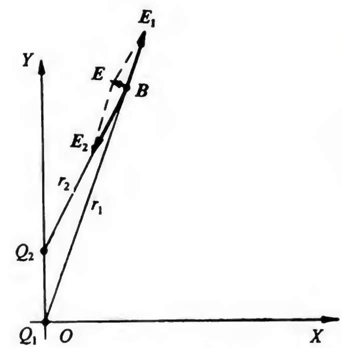
$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \operatorname{sen}\varphi_1 = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_1} = \dfrac{9}{\sqrt{10}} \\ E_{y_1} = \dfrac{27}{\sqrt{10}} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \operatorname{sen}\varphi_2 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_2} = -\dfrac{36}{\sqrt{5}} \\ E_{y_2} = -\dfrac{72}{\sqrt{5}} \end{array}$$

$$E_x = \frac{9}{\sqrt{10}} - \frac{36}{\sqrt{5}} = -13{,}2 \text{ N/C}$$

$$E_y = \frac{27}{\sqrt{10}} - \frac{72}{\sqrt{5}} = -23{,}7 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -13{,}2\boldsymbol{i} - 23{,}7\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-3-2.ª

3)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \, \frac{10^{-8}}{1/2} = 180 \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-8}}{1/2} = 360 \text{ N/C}$$

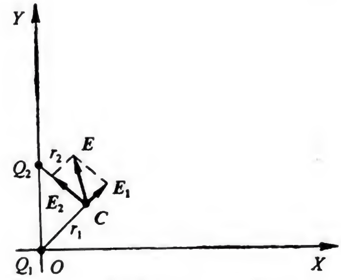
$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_1} = 90\sqrt{2} \text{ N/C} \\ E_{y_1} = 90\sqrt{2} \text{ N/C} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\varphi_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_{x_2} = -180\sqrt{2} \text{ N/C} \\ E_{y_2} = 180\sqrt{2} \text{ N/C} \end{array}$$

$$E_x = 90\sqrt{2} - 180\sqrt{2} = -127{,}3 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\sqrt{2} + 180\sqrt{2} = 381{,}8 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -127{,}3\boldsymbol{i} + 381{,}8\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

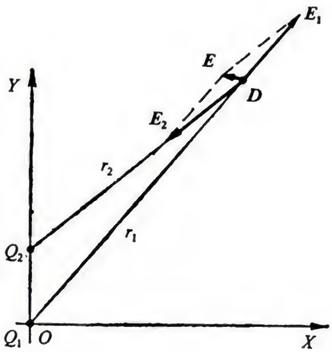


Problema XXV-3-3.ª

4)

$$E_1 = 9 \times 10^9 \, \frac{10^{-8}}{25} = \frac{18}{5} \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \, \frac{2 \times 10^{-8}}{18} = 10 \text{ N/C}$$



Problema XXV-3-4.ª

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos\varphi_1 = \dfrac{3}{5} & E_{x_1} = \dfrac{54}{25} \text{ N/C} \\[2ex] \operatorname{sen}\varphi_1 = \dfrac{4}{5} & E_{y_1} = \dfrac{72}{25} \text{ N/C} \\[2ex] \cos\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & E_{x_2} = -5\sqrt{2} \text{ N/C} \\[2ex] \operatorname{sen}\varphi_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & E_{y_2} = -5\sqrt{2} \text{ N/C} \end{array}\right| \begin{array}{l} E_x = \dfrac{54}{25} - 5\sqrt{2} = -4{,}9 \text{ N/C} \\[2ex] E_y = \dfrac{72}{25} - 5\sqrt{2} = -4{,}2 \text{ N/C} \end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -4{,}9\boldsymbol{i} - 4{,}2\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

2.º MÉTODO:

Calculamos el potencial $V(P)$ en un punto cualquiera $P(x, y)$ del plano debido a la distribución dada:

$$V(P) = K_0 \Sigma \frac{Q_i}{r_i} = K_0 \left[\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right]$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 10^{-2} \, \mu\text{C} \\ Q_2 = -2 \times 10^{-2} \, \mu\text{C} \\ r_1 = OP = \sqrt{x^2 + y^2} \\ r_2 = EP = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \end{array}\right| \; V(P) = 90 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \right]$$

y como:

$$\boldsymbol{E}(P) = -\,\boldsymbol{grad}\,V(P) = -\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} \;\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 90 \left[\dfrac{x}{[x^2 + y^2]^{3/2}} - \dfrac{2x}{[x^2 + (y-1)^2]^{3/2}} \right] \\[3ex] E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 90 \left[\dfrac{y}{[x^2 + y^2]^{3/2}} - \dfrac{2(y-1)}{[x^2 + (y-1)^2]^{3/2}} \right] \end{array}\right.$$

1) En el punto $A(2,0)$ m:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 90 \left[\dfrac{2}{4^{3/2}} - \dfrac{4}{5^{3/2}} \right] = -9{,}7 \text{ N/C} \\[3ex] E_y = 90 \, \dfrac{2}{5^{3/2}} = 16{,}1 \text{ N/C} \end{array}\right| \; \boxed{\boldsymbol{E} = -9{,}7\boldsymbol{i} + 16{,}1\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

2) En el punto $B(1,3)$ m:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 90 \left[\dfrac{1}{10^{3/2}} - \dfrac{2}{5^{3/2}} \right] = -13{,}2 \text{ N/C} \\[3ex] E_y = 90 \left[\dfrac{3}{10^{3/2}} - \dfrac{4}{5^{3/2}} \right] = -23{,}7 \text{ N/C} \end{array}\right| \; \boxed{\boldsymbol{E} = -13{,}2\boldsymbol{i} - 23{,}7\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

3) En el punto $C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{1/2}{(1/2)^{3/2}} - \frac{1}{(1/2)^{3/2}}\right] = -127{,}3 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\left[\frac{1/2}{(1/2)^{3/2}} + \frac{1}{(1/2)^{3/2}}\right] = 381{,}8 \text{ N/C}$$

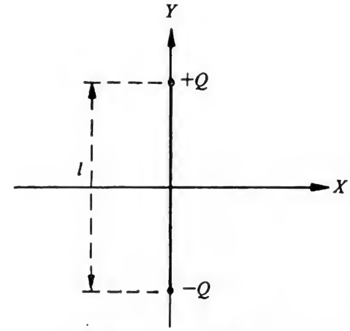
$$\boxed{\boldsymbol{E} = -127{,}3\boldsymbol{i} + 381{,}8\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

4) En el punto $D(3{,}4)$ m:

$$E_x = 90\left[\frac{3}{25^{3/2}} - \frac{6}{18^{3/2}}\right] = -4{,}9 \text{ N/C}$$

$$E_y = 90\left[\frac{4}{25^{3/2}} - \frac{6}{18^{3/2}}\right] = -4{,}2 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -4{,}9\boldsymbol{i} - 4{,}2\boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-4

Problema 4. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por el dipolo eléctrico de la figura en los puntos:

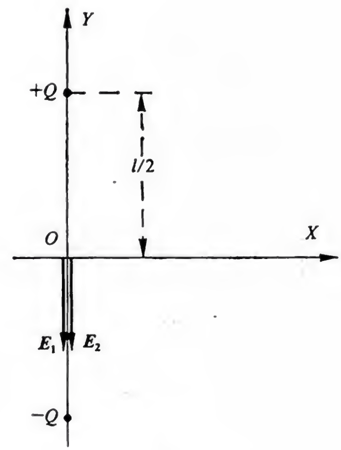
1. $O(0{,}0)$.
2. $P(x{,}0)$.
3. $S(0, y)$.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

1)

$$E_1 = E_2 = \frac{4K_0Q}{l^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = -2E_1\boldsymbol{j} = -\frac{8K_0Q}{l^2}\boldsymbol{j}}$$

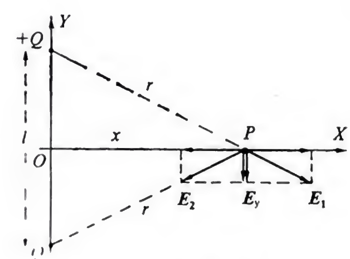


Problema XXV-4-1.ª

2)

$$E_1 = E_2 = K_0\frac{Q}{r^2} = K_0\frac{Q}{x^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{4K_0Q}{4x^2 + l^2} \Rightarrow \boldsymbol{E} = -2E_{y_1}\boldsymbol{j} = -2E_1 \operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{j}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{l/2}{\sqrt{x^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{l}{\sqrt{4x^2 + l^2}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8K_0Ql}{(4x^2 + l^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}}$$



Problema XXV-4-2.ª

3)

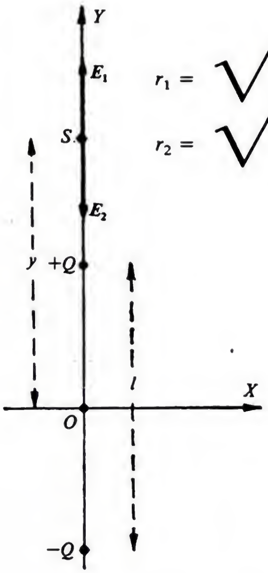
$$E_1 = K_0\frac{Q}{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$E_2 = K_0\frac{Q}{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2}$$

$$\boldsymbol{E} = (E_1 - E_2)\boldsymbol{j}$$

$$E_1 - E_2 = K_0Q\left[\frac{1}{\left(y - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{2K_0Qly}{\left(y^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{32K_0Qly}{(42y^2 - l^2)^2}\boldsymbol{j}}$$

2.º MÉTODO:



Problema XXV-4-3.

Calculamos $V(A)$, siendo $A(x,y)$:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2} \\ r_2 &= \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2} \end{aligned}\right| \quad V(P) = K_0Q\left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2}}\right]$$

$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}V \left|\begin{aligned} E_x &= K_0Q\left[\frac{x}{\left[x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{x}{\left[x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] \\ E_y &= K_0Q\left[\frac{y - \frac{l}{2}}{\left[x^2 + \left(y - \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{y + \frac{l}{2}}{\left[x^2 + \left(y + \frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] \end{aligned}\right.$$

1) En $O(0,0)$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= K_0Q\left[\frac{-l/2}{(l/2)^3} - \frac{l/2}{(l/2)^3}\right] = -\frac{4K_0Q}{l^2} \end{aligned}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8\,K_0Q}{l^2}\boldsymbol{j}}$$

2) En $P(x,0)$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= K_0Qx\left[\frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] = 0 \\ E_y &= K_0Q\left[\frac{-l/2}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{l/2}{\left[x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{3/2}}\right] = -\frac{8K_0Ql}{(4x^2 + l^2)^{3/2}} \end{aligned}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{8K_0Ql}{(4x^2 + l^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}}$$

3) En $S(0,y)$:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= K_0Q\left[\frac{y - \frac{l}{2}}{\left[y - \frac{l}{2}\right]^3} - \frac{y + \frac{l}{2}}{\left[y + \frac{l}{2}\right]^3}\right] = \frac{2K_0Qly}{\left[y^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^2} \end{aligned}\right| \quad \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{32K_0Qly}{(4y^2 - l^2)^2}\boldsymbol{j}}$$

Problema 5. En el centro geométrico de un cubo de 2 m de arista tenemos una carga de 50 μC. Calcular el módulo de la intensidad del campo en el centro de una cara y el flujo que atravesará a cada una de ellas. (El medio que se considera es el vacío.)

Solución

1) La distancia del centro del cubo al centro de una cara será la mitad de la arista, o sea, 1 m:

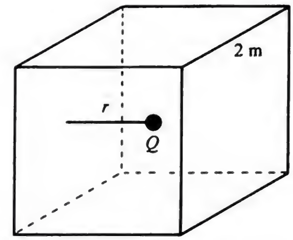
$$E = K_0 \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{50 \times 10^{-6}}{1^2} \text{ N/C} \Rightarrow \boxed{E = 45 \times 10^4 \text{ N/C}}$$

2) Según el teorema de Gauss, el flujo que atraviesa a una superficie cerrada que envuelve a una Carga Q es:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Phi = 50 \times 10^{-6} \times 4\pi \times 9 \times 10^9 = 18\pi 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}$$

como el cubo tiene seis caras, el flujo que atraviesa una de ellas será:

$$\boxed{\Phi = \frac{18\pi 10^5}{6} = 3\pi 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}}$$



Problema XXV-5

Problema 6. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC se encuentra en el origen de un sistema de referencia. Determinar la intensidad del campo eléctrico creado por ella en el punto $P(2, -4, 5)$ m.

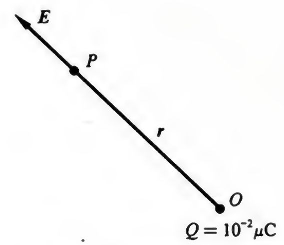
Solución

$$\boldsymbol{E} = K \frac{Q}{r^3} \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OP} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow r = \sqrt{4 + 16 + 25} = 3\sqrt{5} \text{ m}$$

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{\sqrt{5}}{15}(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})$$

$$E = K \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-2} \times 10^{-6}}{45} = 2 \text{ N/C} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{2\sqrt{5}}{15}(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}) \text{ N/C}}$$



Problema XXV-6

Problema 7. Una carga puntual positiva de 10^{-2} μC se encuentra en el punto $A(-1, 2, -1)$ m. Otra carga puntual negativa de -2×10^{-2} μC se encuentra en $B(2, -2, 2)$ m. Determinar el campo eléctrico creado por esta distribución en el punto $C(3,4,0)$ m.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{AC} = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{21} \text{ m} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_1}{r_1} = \dfrac{\sqrt{21}}{21}(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \end{array} \right.$$

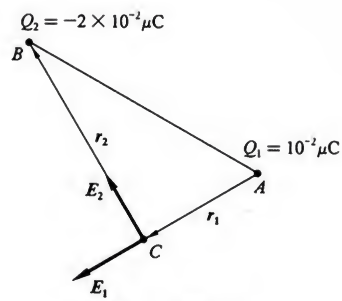
$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{CB} = -\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} r_2 = \sqrt{41} \text{ m} \\ \dfrac{\boldsymbol{r}_2}{r_2} = \dfrac{\sqrt{41}}{41}(-\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \end{array} \right.$$

$$E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-8}}{21} = \frac{30}{7} \text{ N/C} \Rightarrow \boldsymbol{E}_1 = \frac{10\sqrt{21}}{49}(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \text{ N/C}$$

$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-8}}{41} = \frac{180}{41} \text{ N/C} \Rightarrow \boldsymbol{E}_2 = \frac{180\sqrt{41}}{1\,681}(-\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \text{ N/C}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = \left(\frac{40\sqrt{21}}{49} - \frac{180\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{20\sqrt{21}}{49} - \frac{1\,080\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{10\sqrt{21}}{49} + \frac{360\sqrt{41}}{1\,681}\right)\boldsymbol{k} \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = 3{,}05\boldsymbol{i} - 2{,}24\boldsymbol{j} + 2{,}31\boldsymbol{k} \text{ N/C}}$$



Problema XXV-7

2.º MÉTODO:

Calculamos el potencial V en un punto cualquiera $P(x,y,z)$, debido a la distribución dada:

$$\left.\begin{array}{l} V(P) = K_0 \left[\dfrac{Q_1}{r_1} + \dfrac{Q_2}{r_2} \right] \\ K_0 = 9 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \\ Q_1 = 10^{-8} \text{ C} \\ Q_2 = -2 \times 10^{-8} \text{ C} \\ r_1 = AP = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2} \\ r_2 = BP = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2} \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V(P) = 90 \left[\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2}} - \frac{2}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2}} \right]$$

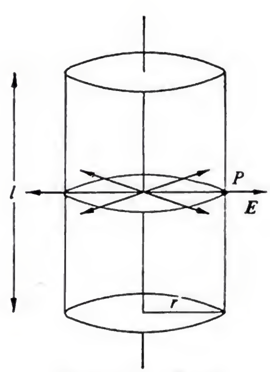
$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\,V \left| \begin{array}{l} E_x = 90 \left[\dfrac{x+1}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(x-2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}} \right] \\ E_y = 90 \left[\dfrac{y-2}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(y+2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}} \right] \\ E_z = 90 \left[\dfrac{z+1}{[(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2]^{3/2}} - \dfrac{2(z-2)}{[(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2]^{3/2}} \right] \end{array} \right.$$

En el punto $C(3,4,0)$ m:

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 90 \left[\dfrac{4}{21^{3/2}} - \dfrac{2}{41^{3/2}} \right] = 3{,}05 \text{ N/C} \\ E_y = 90 \left[\dfrac{2}{21^{3/2}} - \dfrac{12}{41^{3/2}} \right] = -\,2{,}24 \text{ N/C} \\ E_z = 90 \left[\dfrac{1}{21^{3/2}} + \dfrac{4}{41^{3/2}} \right] = 2{,}31 \text{ N/C} \end{array} \right| \quad \boxed{\boldsymbol{E} = 3{,}05\boldsymbol{i} - 2{,}24\boldsymbol{j} + 2{,}31\boldsymbol{k}}$$

Problema 8. En un hilo largo y muy fino tenemos distribuida uniformemente una carga positiva. Sabiendo que λ es la carga por unidad de longitud del hilo, calcular la intensidad del campo eléctrico a una distancia r de él.

Solución



Problema XXV-8

Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cilíndrica cerrada cuyo eje es el hilo (ver figura), nos queda:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\int_0^l \lambda dl}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \int_0^l dl}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte, aplicamos el concepto de flujo a la superficie lateral de este cilindro y nos queda:

$$\Phi = \int_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_A E dA \cos\varphi$$

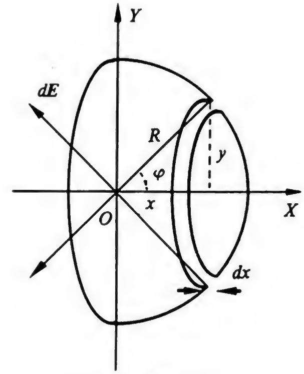
pero $\cos\varphi = 1$, ya que $\varphi = 0$ por ir el campo en la dirección del radio del cilindro y estar definido el vector área, normal a la superficie, por tanto:

$$\Phi = \int_A E dA = E \int_A dA = E 2\pi r l \;\cdot$$

Los dos flujos calculados son iguales, puesto que el flujo que atraviesa los círculos superior e inferior son nulos, ya que el vector área y el vector campo son perpendiculares; luego:

$$\frac{\lambda l}{\varepsilon_0} = E2\pi rl \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2K_0\lambda}{r}}$$

Problema 9. Determinar el valor de la intensidad del campo electrostático en el centro de una semiesfera cargada uniformemente su superficie con una densidad superficial de 1 μC/cm^2.



Problema XXV-9

Solución

$$dE_x = dE\cos\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} dE &= K_0 \frac{dQ}{R^2} \\ dQ &= \sigma 2\pi y dx \end{aligned}\right| \Rightarrow dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi y dx}{R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^2} y dx$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{x}{R} \\ y &= \sqrt{R^2 - x^2} \end{aligned}\right| \Rightarrow dE_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^3} x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

integrando:

$$E = \int_0^R dE_x = \int_0^R \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 R^3} x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0 R^3}\int_0^R (-2x)\ (R^2 - x^2)^{1/2}\, dx =$$

$$= -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{(R^2 - x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^R = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$$

Sustituyendo valores en el SI nos quedará:

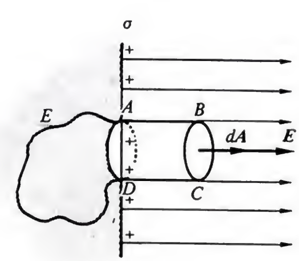
$$\boxed{E = \frac{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^{-6}}{6 \times 10^{-4}} = 6\pi 10^7 \text{ N/C}}$$

Problema 10. Supongamos una distribución homogénea de carga sobre un conductor plano e indefinido; siendo σ su densidad superficial de carga, calcúlese la intensidad del campo eléctrico creado por esta distribución en un punto.

Solución

Apliquemos el teorema de Gauss a la superficie elemental dA_T cerrada de la figura ($ABCDE$), y queda:

$$d\Phi = \frac{dQ}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0}$$



Problema XXV-10

Este flujo es idéntico al que atraviesa la superficie dA (ya que en masa conductora $E = 0$, luego el flujo a través de DEA será nulo, y por otra parte, el flujo a través de la superficie lateral del cilindro $ABCD$ también es nulo, por ser perpendiculares el vector campo y el vector área), y toma el valor:

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = EdA\cos\varphi$$

pero $\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi = 1$; luego:

$$d\Phi = EdA$$

igualando nos queda:

$$EdA = \frac{\sigma dA}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 4\pi K_0\sigma}$$

lo que nos indica que el campo eléctrico creado por una distribución de este tipo es homogéneo (toma el mismo valor en todos los puntos).

Problema 11. Calcular la intensidad del campo eléctrico creado por un volumen cilíndrico muy largo de radio a, en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen ρ; en puntos situados a una distancia r del eje en los casos siguientes:

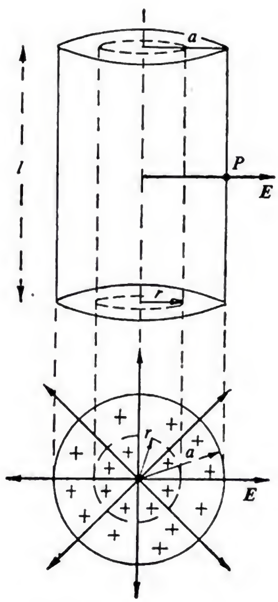
1. $r \leqslant a$.

2. $r \geqslant a$.

Solución

El campo eléctrico en ambos casos tiene la dirección del radio de los cilindros coaxiales con el dado y toma el mismo valor en todos los puntos de la superficie lateral de cada cilindro.

1) Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cerrada cilíndrica de radio r y longitud l (ver fig. 1.ª), tendremos:



Problema XXV-11-1.ª

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

siendo Q la carga de su interior, y como:

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \Rightarrow \quad Q = \oint_V \rho dV = \rho \oint_V dV = \rho\pi r^2 l \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte, aplicamos el concepto de flujo a la superficie lateral de este cilindro y nos quedará:

$$\Phi = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A EdA\cos\varphi$$

pero $\cos\varphi = 1$, ya que $\varphi = 0$, por ir en la misma dirección ambos vectores y, además, por ser $\mathbf{E}$ el mismo en todos los puntos del área, nos quedará:

$$\Phi = \int_A EdA = E\int_A dA = E2\pi rl$$

Los dos flujos calculados son iguales, puesto que el flujo que atraviesa los círculos superior e inferior son nulos, ya que el vector área y el vector campo son perpendiculares; luego:

$$\frac{\rho\pi r^2 l}{\varepsilon_0} = E2\pi rl \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} = 2\pi K_0\rho r}$$

para $r = a$ obtenemos:

$$E = 2\pi K_0\rho a$$

2) Haciendo parecido razonamiento que antes. Aplicamos el teorema de Gauss:

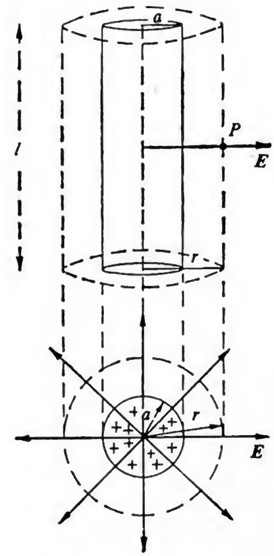
$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

pero en este caso:

$$Q = \oint_V \rho dV = \rho \oint dV = \rho\pi a^2 l \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{\rho\pi a^2 l}{\varepsilon_0}$$

Por otra parte:

$$\Phi = \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_A E dA = E \int_A dA = E 2\pi r l$$



Problema XXV-11-2.ª

igualando por las mismas razones que en el caso anterior, nos queda:

$$\frac{\rho \pi a^2 l}{\varepsilon_0} = E 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} = \frac{2\pi K_0 \rho a^2}{r}}$$

para $r = a$ se obtiene el mismo resultado que antes:

$$E = 2\pi K_0 \rho a$$

Capítulo XXVI

LA FUNCION POTENCIAL ELECTROSTATICA

A) EL POTENCIAL

FORMULARIO

POTENCIAL:

1) Entre dos puntos:

$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\,V$$

$$dV = -\,\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad V_1 - V_2 = \int_1^2 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad V_1 - V_2 = \frac{W_1^2}{Q}$$

2) De un campo homogéneo:

$$V_1 - V_2 = Er$$

3) En un punto:

$$V(P) = \int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad V(P) = \frac{W}{Q}$$

POTENCIAL DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL:

$$V = K_0\,\frac{Q}{r}$$

POTENCIAL DEBIDO A UN SISTEMA DE CARGAS PUNTUALES:

$$V = K_0 \sum_i \frac{Q_i}{r_i}$$

EXPRESIÓN GENERAL DEL POTENCIAL EN UN PUNTO EN FUNCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN (DISCONTINUA O CONTINUA) DE LA CARGA QUE CREA EL CAMPO:

$$V(P) = K_0 \sum \frac{q_i}{r_i} + K_0 \int_A \frac{\sigma(\boldsymbol{r})}{r}\,dA + K_0 \int_v \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{r}\,dv$$

ECUACIÓN DE POISSON:

$$\nabla^2 V = -\,\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\,\frac{\rho(xyz)}{\varepsilon_0}$$

Problema 1. Entre dos puntos de un campo eléctrico uniforme (intensidad constante), de valor 0,1 UEE, supuestos en la misma línea de fuerza, hay una distancia de 10 cm. Calcular la diferencia de potencial entre tales puntos.

Solución

$$\boxed{V_1 - V_2 = Er = 0{,}1 \times 10 = 1 \text{ UEE} = 300 \text{ V}}$$

Problema 2. Calcular la distancia que separa a dos puntos situados en la misma línea de fuerza de un campo eléctrico uniforme de intensidad 0,01 UEE, existiendo entre ellos la diferencia de potencial de 60 V. Calcular, también, el trabajo realizado al transportar de uno a otro una carga de 5 UEE, suponiendo que tal carga no introduce modificaciones en el campo considerado.

Solución

1)

$$V_1 - V_2 = Er \left| \begin{array}{l} V_1 - V_2 = 60 \text{ V} = \dfrac{60}{300} \text{ UEE} \\ \\ E = 0{,}01 \text{ UEE} \end{array} \right| \dfrac{60}{300} = 0{,}01 r \quad \Rightarrow \boxed{r = 20 \text{ cm}}$$

2)

$$W_1^2 = (V_1 - V_2) Q \left| \begin{array}{l} Q = 5 \text{ UEE} \\ \\ V_1 - V_2 = \dfrac{60}{300} \text{ UEE} \end{array} \right| \boxed{W_1^2 = \dfrac{60}{300} 5 = 1 \text{ erg}}$$

Problema 3. El potencial a una cierta distancia de una carga puntual es 600 V, y el campo eléctrico es 200 N/C.

1. ¿Cuál es la distancia a la carga puntual?

2. ¿Cuál es el valor de la carga?

Solución

1)

$$\left. \begin{array}{l} E = K_0 \dfrac{Q}{r^2} \\ \\ V = K_0 \dfrac{Q}{r} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{V}{E} = \dfrac{600}{200} = 3 \text{ m}}$$

2)

$$Q = \frac{Vr}{K_0} = \frac{600 \times 3}{9 \times 10^9} \text{ C} \quad \Rightarrow \boxed{Q = 0{,}2 \ \mu\text{C}}$$

Problema 4. Se tienen dos cargas eléctricas puntuales de $+2\ \mu C$ y $-5\ \mu C$ colocadas a una distancia de 10 cm. Calcúlese el campo y el potencial en los siguientes puntos:

1. A 20 cm de la carga positiva, tomados en la dirección de la recta que une a las cargas y en el sentido de la negativa a la positiva.

2. A 20 cm de la negativa, contados en la misma dirección, pero de sentido de la positiva a la negativa.

3. ¿En qué punto de dicha recta el potencial es nulo?

Solución

1)

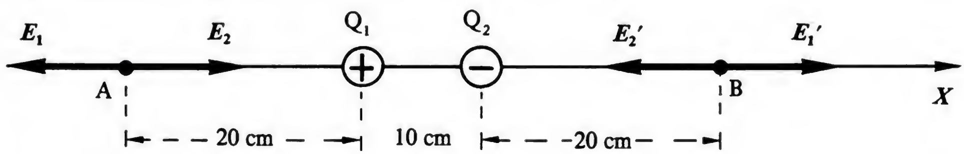
$$E_1 = K_0 \frac{Q_1}{r_1^2} = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-6}}{0{,}2^2} = 45 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$E_2 = K_0 \frac{Q_2}{r_2^2} = 9 \times 10^9 \frac{5 \times 10^{-6}}{0{,}3^2} = 50 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = E_2 - E_1 = 5 \times 10^4 \text{ V/m}}$$

en el sentido indicado en la figura.

$$\boxed{V = K_0 \left[\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right] = 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{0{,}2} - \frac{5 \times 10^{-6}}{0{,}3} \right] = -6 \times 10^4 \text{ V}}$$



Problema XXVI-4

2)

$$E'_1 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-6}}{0{,}3^2} = 20 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$E'_2 = 9 \times 10^9 \frac{5 \times 10^{-6}}{0{,}2^2} = 112{,}5 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$\Rightarrow \boxed{E' = E'_1 - E'_2 = -92{,}5 \times 10^4 \text{ V/m}}$$

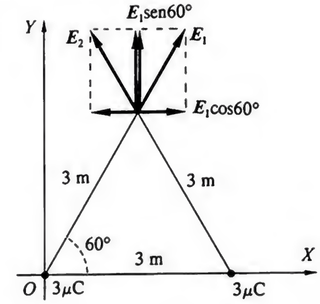
en sentido contrario al anterior.

$$\boxed{V' = K_0 \left[\frac{Q_1}{r'_1} + \frac{Q_2}{r'_2} \right] = 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{0{,}3} - \frac{5 \times 10^{-6}}{0{,}2} \right] = -165 \times 10^3 \text{ V}}$$

3)

$$V = 0 = K_0 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{r} - \frac{5 \times 10^{-6}}{0{,}1 - r} \right] \Rightarrow \boxed{r = \frac{0{,}2}{7} \text{ m} = \frac{20}{7} \text{ cm}}$$

Problema 5. En cada uno de los vértices de la base de un triángulo equilátero de 3 m de lado hay una carga de 3 μC. Calcular el campo y el potencial electrostático en el tercer vértice.



Problema XXVI-5

Solución

$$E_1 = E_2 = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-6}}{9} = 3 \times 10^3 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = 2E_1 \operatorname{sen} 60^\circ \boldsymbol{j} = 2 \times 3 \times 10^3 \frac{\sqrt{3}}{2} \boldsymbol{j} = 3\sqrt{3}\, 10^3 \boldsymbol{j} \text{ N/C}}$$

$$\boxed{V = 9 \times 10^9 \times 10^{-6} \left[\frac{3}{3} + \frac{3}{3} \right] = 18 \times 10^3 \text{ V}}$$

NOTA.—Otro método de resolución del problema sería calcular la función potencial electrostática V en cualquier punto $P(x,y)$ del plano, debida a la distribución dada, y a continuación obtener el vector campo en el punto que nos piden, aplicando: $\boldsymbol{E} = -\, \boldsymbol{grad}\, V$ (ver los problemas del capítulo anterior).

Problema 6. En tres vértices de un cuadrado de 1 m de lado existen cargas de 10 μC cada una. Cálcular:

1. La intensidad del campo eléctrico en el cuarto vértice.

2. El trabajo necesario para llevar una carga negativa de 5 μC desde el cuarto vértice al centro del cuadrado.

Solución

1)

$$E_1 = E_3 = 9 \times 10^9 \frac{10 \times 10^{-6}}{1^2} = 9 \times 10^4 \text{ N/C}$$

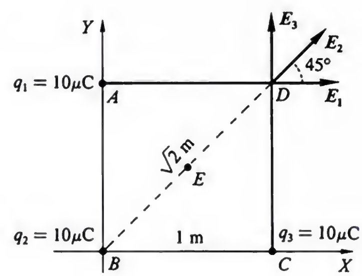
$$E_2 = 9 \times 10^9 \frac{10 \times 10^{-6}}{2} = 4{,}5 \times 10^4 \text{ N/C}$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3 = E_x \boldsymbol{i} + E_y \boldsymbol{j}$$

$$E_x = E_1 + E_2 \cos 45^\circ = \left(9 + \frac{4{,}5\sqrt{2}}{2}\right) 10^4 \text{ N/C}$$

$$E_y = E_x = \left(9 + \frac{4{,}5\sqrt{2}}{2}\right) 10^4 \text{ N/C}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = \left(9 + \frac{4{,}5\sqrt{2}}{2}\right) 10^4 (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \text{ N/C} = 12{,}18 \times 10^4 (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \text{ N/C}}$$



Problema XXVI-6

2)

$$V_D = 9 \times 10^9 \times 10^{-6} \left[\frac{10}{1} + \frac{10}{1} + \frac{10}{\sqrt{2}} \right] = \frac{9(2\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} 10^4 \text{ V}$$

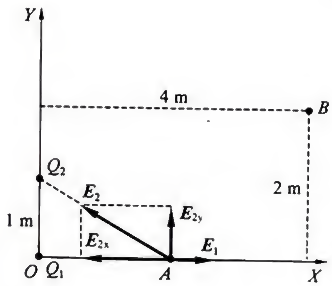
$$W_D^E = q(V_D - V_E)$$

$$V_E = 9 \times 10^9 \times 10^{-6} \left[\frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right] = \frac{54}{\sqrt{2}} 10^4 \text{ V}$$

$$\boxed{W_D^E = 5 \times 10^{-2} \left[\frac{9(2\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} - \frac{54}{\sqrt{2}} \right] = -\,0{,}7 \text{ J}}$$

NOTA.—El alumno resolverá el problema calculando $V(x,y)$, debido a la distribución dada, y a continuación calculará $E(x,y) = -\, \boldsymbol{grad}\, V(x,y)$; este segundo método le servirá como comprobación del problema.

Problema 7. Una carga puntual, positiva, de 10^{-9} C está situada en el origen de un sistema de coordenadas ortogonales. Otra carga puntual, negativa, de -2×10^{-9} C está situada sobre el eje de ordenadas a 1 m del origen. Determinar: **1.** Las intensidades de los campos eléctricos, creados por cada una de las cargas mencionadas, en el punto A, situado a 2 m del origen sobre el eje de las X. **2.** Las componentes coordenadas del campo total existente en A. **3.** El trabajo que es necesario realizar para trasladar 3 C de A a B, cuyas coordenadas son (4,2) m.



Problema XXVI-7

Solución

$$E = K_0 \frac{Q}{r^2}$$

1)

$$\boxed{E_1 = 9 \times 10^9 \frac{10^{-9}}{4} = \frac{9}{4} \text{ V/m}}$$

$$\boxed{E_2 = 9 \times 10^9 \frac{2 \times 10^{-9}}{5} = \frac{18}{5} \text{ V/m}}$$

2)

$$\begin{array}{l|l|l}
\cos\varphi_1 = 1 & E_{x_1} = \dfrac{9}{4} \text{ V/m} & \\
 & & E_x = \dfrac{9}{4} - \dfrac{36}{5\sqrt{5}} = -0{,}97 \text{ V/m} \\
\operatorname{sen}\varphi_1 = 0 & E_{y_1} = 0 & \\
\cos\varphi_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & E_{x_2} = -\dfrac{36}{5\sqrt{5}} \text{ V/m} & \\
 & & E_y = \dfrac{18}{5\sqrt{5}} = 1{,}61 \text{ V/m} \\
\operatorname{sen}\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} & E_{y_2} = \dfrac{18}{5\sqrt{5}} \text{ V/m} &
\end{array}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -0{,}97\boldsymbol{i} + 1{,}61\boldsymbol{j}}$$

3)

$$W_A^B = Q(V_A - V_B)$$

$$V_A = K_0 \left[\frac{Q_1}{r_{1B}} + \frac{Q_2}{r_{2B}}\right] = 9 \times 10^9 \left[\frac{10^{-9}}{\sqrt{20}} - \frac{2 \times 10^{-9}}{\sqrt{17}}\right] = -2{,}35 \text{ V}$$

$$V_B = K_0 \left[\frac{Q_1}{r_{1A}} - \frac{Q_2}{r_{2A}}\right] = 9 \times 10^9 \left[\frac{10^{-9}}{2} - \frac{2 \times 10^{-9}}{\sqrt{5}}\right] = -3{,}55 \text{ V}$$

$$\boxed{W_A^B = 3\,(-2{,}35 + 3{,}55) = 3{,}60 \text{ J}}$$

NOTA.—Comprobar el problema calculando $\boldsymbol{E}(A)$ por medio del potencial $V(xy)$ y aplicando $\boldsymbol{E}(A) = -\,\boldsymbol{grad}\,V(A)$.

Problema 8. Una carga puntual positiva de 2 μC está situada en el punto $A(2, -1, 3)$ m y otra puntual negativa de -3 μC se encuentra localizada en B (3,3,5) m. Calcular el trabajo realizado para trasladar -1 μC desde el punto C (1,2,1) m hasta el $D(-2, 6, -4)$ m.

Solución

$$W_C^D = Q(V_C - V_D)$$

$$V_C = K_0 \left(\frac{Q_1}{r_{AC}} + \frac{Q_2}{r_{BC}} \right) \qquad V_D = K_0 \left(\frac{Q_1}{r_{AD}} + \frac{Q_2}{r_{BD}} \right)$$

$$r_{AC} = \boldsymbol{AC} = -\ \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow r_{AC} = \sqrt{14} \text{ m}$$

$$r_{BC} = \boldsymbol{BC} = -2\boldsymbol{i} - \ \boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow r_{BC} = \sqrt{21} \text{ m}$$

$$r_{AD} = \boldsymbol{AD} = -4\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} - 7\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow r_{AD} = \sqrt{114} \text{ m}$$

$$r_{BD} = \boldsymbol{BD} = -5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 9\boldsymbol{k} \text{ m} \Rightarrow r_{BD} = \sqrt{115} \text{ m}$$

$$V_C = 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{14}} - \frac{3 \times 10^{-6}}{\sqrt{21}} \right] = -1\,081{,}2 \text{ V}$$

$$V_D = 9 \times 10^9 \left[\frac{2 \times 10^{-6}}{\sqrt{114}} - \frac{3 \times 10^{-6}}{\sqrt{115}} \right] = -831{,}9 \text{ V}$$

$$\boxed{W_C^D = -10^{-6}(-1\,081{,}2 + 831{,}9) = 249{,}3 \ \mu\text{J}}$$

Problema 9. Un disco plano de radio R está cargado uniformemente con una densidad superficial de carga σ. Determínese el potencial eléctrico en un punto P de su eje y a una distancia a del centro.

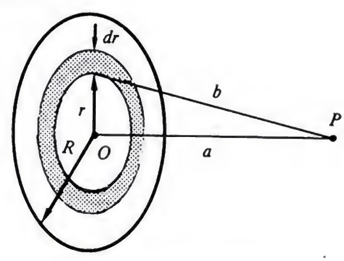
Solución

El valor del potencial eléctrico en el punto P debido a la distribución de la carga dQ que se encuentra distribuida en el anillo de espesor dr, indicado en la figura (obsérvese que cualquier parte de esta carga se encuentra a la misma distancia b), será:

$$dV = K_0 \frac{dQ}{b} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{r dr}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

luego:

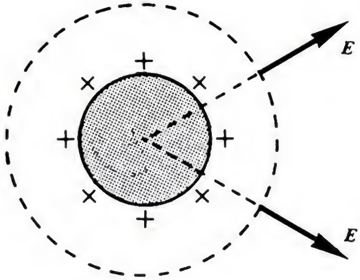
$$\boxed{V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} [\sqrt{a^2 + R^2} - R]}$$



Problema XXVI-9

Problema 10. Calcular el campo y el potencial electrostático creado por una esfera conductora cargada con una carga Q.

1. En un punto exterior.
2. En su interior.
3. Representar grágicamente las funciones $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(r)$ y $V = V(r)$.



Problema XXVI-10-1.ª

Solución

1) Supongamos una esfera conductora en la que la carga se ha distribuido uniformemente sobre su superficie y un punto P exterior a ella a distancia r del centro. Con radio r tracemos una esfera concéntrica con la electrizada; el flujo a través de su superficie es:

$$\Phi = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4\pi^2 r^2$$

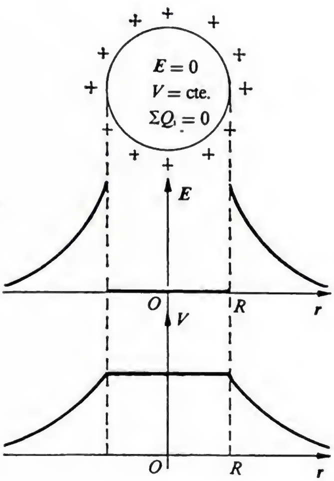
pasando de la primera igualdad a la segunda, considerando que el ángulo que forman $\boldsymbol{E}$ y $d\boldsymbol{A}$ es cero, y por tanto el coseno es uno; de la segunda a la tercera, considerando que, por simetría, el *módulo* del campo es constante en todos los puntos de la superficie esférica; de la tercera a la cuarta, teniendo en cuenta el valor de la superficie de una esfera. Si Q es la carga total localizada en la superficie de la esfera, la aplicación del teorema de Gauss conduce a:

$$\Phi = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = K_0 \frac{Q}{r^2}}$$

En cuanto al potencial, lo obtenemos:

$$\boxed{V = \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = K_0 \frac{Q}{r}}$$

«Las dos ecuaciones obtenidas nos indican que *el campo y el potencial producidos por una esfera uniformemente cargada en un punto exterior a ella son los mismos que los que originaría su carga localizada en el centro de la esfera.*»



Problema XXVI-10-2.ª

2) Puesto que todos los puntos de un conductor esférico en equilibrio eléctrico están al mismo potencial, calcularemos el potencial en un punto de su superficie externa, y el resultado obtenido tendrá validez para todos sus puntos.

La aplicación de la fórmula anterior conduce a:

$$\boxed{V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = K_0 \frac{Q}{R}}$$

siendo Q la carga del total del conductor y R su radio.

Problema 11. Calcular el potencial creado por un volumen esférico de radio a, en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen ρ; en puntos situados a una distancia r del centro en los siguientes casos:

1. $r \geqslant a$.

2. $r \leqslant a$.

Solución

1) Calculemos primero el campo en un punto para $r > a$:

Al ser la distribución uniforme y la simetría esférica, no existe ninguna dirección privilegiada; por consiguiente, el campo tiene que ser radial.

Tomamos una superficie de integración esférica de radio r, concéntrica con la distribución. El campo en P, por ser radial, será paralelo a $\boldsymbol{r}$ y también a $d\boldsymbol{A}$. Calculamos el flujo del campo a través de A:

$$\Phi = \oint_A \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_A E dA \cos\varphi = \oint_A E dA = E \oint_A dA = E 4\pi r^2$$

Por otra parte, la aplicación del teorema de Gauss a la misma superficie nos da:

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi a^3}{3\varepsilon_0}$$

igualando:

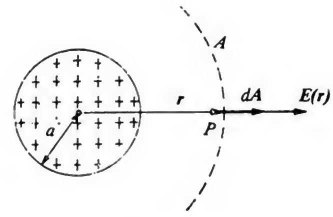
$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi a^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}}$$

Para calcular el potencial en ese punto mediremos el trabajo realizado al transportar la unidad de carga del infinito al punto, que viene dado por:

$$V = \int_r^\infty \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

esta integral es independiente del camino recorrido; haciendo el transporte de la unidad de carga a lo largo de una línea de fuerza $\boldsymbol{E}$ y $d\boldsymbol{r}$ son paralelos; luego:

$$V = \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty \Rightarrow \boxed{V = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}}$$



Problema XXVI-11-1.ª

2) Calculemos primeramente el campo en un punto $r < a$: los argumentos de simetría son exactamente iguales que los expuestos anteriormente. Para integrar tomaremos una esfera A' de radio $r < a$ que pase por P.

Igual que anteriormente, $\boldsymbol{E}$ es paralelo a $d\boldsymbol{A}$; luego:

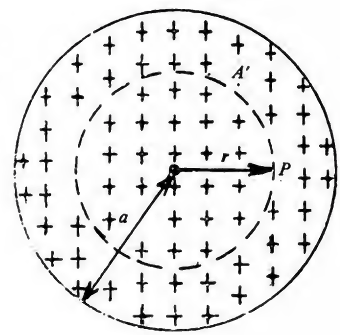
$$\Phi = \oint_{A'} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \oint_{A'} E dA = E \oint_{A'} dA = E 4\pi r^2$$

Por otra parte:

$$\Phi = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0}$$

(Q' es la carga encerrada en A'.) Igualando:

$$E 4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}}$$



Problema XXVI-11-2.ª

Para calcular el potencial en este punto mediremos el trabajo realizado al transportar la unidad de carga del infinito hasta la superficie de la esfera, más el realizado al transportar la unidad de carga de la superficie al punto considerado. Viene dado por:

$$V = \int_a^\infty \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} + \int_r^a \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

estas integrales son independientes del camino recorrido; haciendo el transporte de la unidad de carga a lo largo de una línea de fuerza $\boldsymbol{E}$ y $d\boldsymbol{r}$, son paralelos; luego:

$$V = \int_a^\infty E dr + \int_r^a E dr = \int_a^\infty \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr$$

integrando:

$$\boxed{V = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2}\right]_r^a = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right]}$$

Si en ambos casos 1) y 2) hacemos $r = a$, queda:

$$V = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0}$$

Problema 12. Calcular el potencial creado por un volumen cilíndrico de radio a, en el que se halla distribuida uniformemente una carga positiva, conociendo la carga por unidad de volumen ρ, en puntos situados a una distancia r del eje en los siguientes casos:

1. $r > a$.

2. $r < a$.

(Tomar el potencial cero en la superficie del cilindro.)

Solución

En el problema XXV-11 hemos calculado el campo en ambos casos, y nos daba:

$$r > a \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r} \qquad\qquad r < a \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

1) El potencial para $r > a$ estará medido por el trabajo realizado al transportar la unidad de carga desde la superficie del cilindro al punto, y viene dado por:

$$V = \int_r^a \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r}$$

esta integral es independiente del camino recorrido; haciendo el transporte de la unidad de carga a lo largo de una línea de fuerza $\boldsymbol{E}$ y $d\boldsymbol{r}$ son paralelos; luego:

$$V = \int_r^a E dr = \int_r^a \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} \frac{dr}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} \ln \frac{a}{r}}$$

2) El potencial para $r < a$ está medido por el trabajo realizado al transportar la unidad de carga desde la superficie del cilindro al punto, y razonando igual que en el apartado anterior, nos queda:

$$V = \int_r^a \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_r^a E dr = \int_r^a \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\rho}{6\varepsilon_0} (a^2 - r^2)}$$

Problema 13. El potencial en un punto de coordenadas (x, y, z) queda determinado por la ecuación: $V = -5x - 2y^2 + z^3$, en la que x, y, z se expresan en metros y V en voltios. Determinar el campo eléctrico en el punto $(3, 1, -1)$ m.

Solución

$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\,V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = 5 \text{ V/m}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 4y \qquad y = 1 \text{ m} \qquad \Bigg| \quad E_y = 4 \text{ V/m}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial z} = -3z^2 \qquad z = -1 \text{ m} \qquad \Bigg| \quad E_x = 3 \text{ V/m}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E} = 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \text{ V/m}}$$

Problema 14. Calcular el potencial y el campo eléctrico creados por un dipolo eléctrico de longitud l en un punto. Supóngase que la distancia r del centro del dipolo al punto P es muy grande en comparación con l.

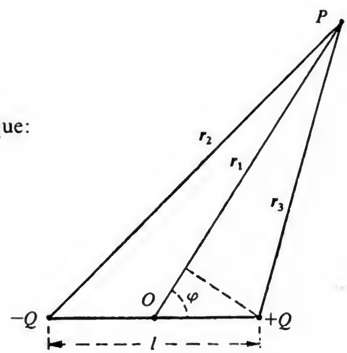
Solución

Teniendo en cuenta la relación:

$$\boldsymbol{E} = -\, \boldsymbol{grad}\, V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\, i + \frac{\partial V}{\partial y}\, j + \frac{\partial V}{\partial z}\, k\right)$$

siempre será más fácil calcular primero el escalar V (potencial) en cualquier problema, y después por derivación hacer el cálculo de $\boldsymbol{E}$.

En efecto: el potencial creado por el dipolo de la figura en un punto P a distancias r_1 y r_2 de la carga positiva y negativa, respectivamente, será:



Problema XXVI-14-1.ª

$$V = k\left[\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2}\right]$$

Llamando r a la distancia desde el centro del dipolo (0) hasta el punto P, y considerando que:

$$r \gg l$$

podemos poner:

$$r_1 = r - \frac{l}{2}\cos\varphi \qquad r_2 = r + \frac{l}{2}\cos\varphi$$

sustituyendo en V:

$$V = KQ\left[\frac{1}{r - \frac{l}{2}\cos\varphi} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}\cos\varphi}\right] = KQl\,\frac{\cos\varphi}{r^2 - \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi}$$

y como $r \gg l$, nos quedará después de eliminar el infinitésimo $l^2\cos^2\varphi/4$:

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{KQl\cos\varphi}{r^2} \\[2ex] \boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{l} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} = Qlr\cos\varphi \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V = K\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}}$$

obtendremos las componentes del campo por derivación:

$$\boldsymbol{E}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}\, \boldsymbol{i} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\partial r^3}\right)\right]\boldsymbol{i} = -K\left[\boldsymbol{p}\cdot -\frac{\partial}{x}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)\right]\boldsymbol{i}$$

sabemos que:

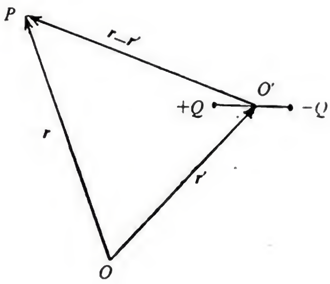
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

luego:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{r^3\,\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} - 3r^2\,\dfrac{\partial r}{\partial x}\,\boldsymbol{r}}{r^6} = \frac{r\boldsymbol{i} - 3\,\dfrac{x}{r}\,\boldsymbol{r}}{r^4} = \frac{1}{r^3}\,\boldsymbol{i} - \frac{3x}{r^5}\,\boldsymbol{r}$$

multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{p} = p_x\boldsymbol{i} + p_y\boldsymbol{j} + p_z\boldsymbol{k}$ y teniendo en cuenta las propiedades de este producto, nos queda:

$$\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{p_x\boldsymbol{i}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\, x$$



Problema XXVI-14-2.ª

Sustituyendo y generalizando para las demás componentes del campo:

$$E_x = K\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\,x\boldsymbol{i} - \frac{p_x\boldsymbol{i}}{r^3}\right)$$

$$E_y = K\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\,y\boldsymbol{j} - \frac{p_y\boldsymbol{j}}{r^3}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{E} = K\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\,\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right)}$$

$$E_z = K\left(\frac{3\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^5}\,z\boldsymbol{k} - \frac{p_z\boldsymbol{k}}{r^3}\right)$$

los cálculos los hemos realizado refiriéndonos al centro del dipolo como origen; si tomamos otro punto cualquiera O (fig. 2.ª), realizaremos una traslación de ejes y las fórmulas serán las mismas sin más que sustituir $\boldsymbol{r}$ por $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ y r por $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

Problema 15. Un campo electrostático viene dado en el SI por: $\boldsymbol{E} = 6xy\boldsymbol{i} + (3x^2 - 3y^2)\boldsymbol{j}$. Calcular el trabajo realizado al mover una carga puntual de 10 μC desde $O(0,0)$ hasta el punto $A(3,2)$.

Solución

Demostramos primeramente que $\boldsymbol{E}$ es un campo conservativo o, lo que es lo mismo, que es irrotacional. En efecto, al ser:

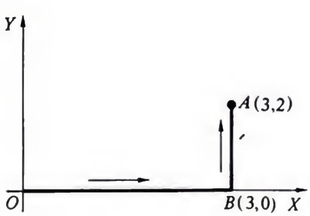
$$\boldsymbol{rot E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

en nuestro caso:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} = 6x$$



Problema XXVI-15

cumpliéndose las condiciones de un campo conservativo; siendo el trabajo realizado para trasladar los 10 μC de O hasta A independiente de la trayectoria, dependiendo únicamente del punto inicial y final. Siguiendo la trayectoria indicada en la figura, los cálculos serán:

$$W_O^A = -Q\int_O^A \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -Q\int_O^A (E_x dx + E_y dy)$$

$$W_O^A = W_O^B + W_B^A = -Q\left[\int_O^B (E_x dx + E_y dy) + \int_B^A (E_x dx + E_y dy)\right].$$

la trayectoria de O a B tiene por ecuación $y = 0$; luego:

$$\int_O^B E_x dx = \int_0^3 6xy dx = 0$$

$$\int_O^B E_y dy = \int_0^0 (3x^2 - 3y^2)dy = 0$$

la trayectoria de B a A tiene por ecuación $x = 3$; luego:

$$\int_B^A E_x dx = \int_3^3 6xy dx = 0$$

$$\int_B^A E_y dy = \int_0^2 (3x^2 - 3y^2) dy = \int_0^2 (27 - 3y^2) dy = [27 - y^3]_0^2 = 19 \text{ V}$$

por tanto:

$$\boxed{W_O^A = -10 \times 10^{-6}\, 19 = -190 \ \mu\text{J}}$$

Problema 16. La función potencial electrostática en el SI viene dada por la expresión:

$$V = 3x + \frac{y^2}{x} - 3yz + 35 \text{ V}$$

Calcular:

1. La fuerza que actúa sobre una carga puntual de 200 μC localizada en el punto A (1,2,1) m.

2. El trabajo realizado cuando desplazamos dicha carga del punto A al $B\,(-1, 3, 2)$ m.

Solución

1) Las derivadas parciales de V serán:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 3 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2 - y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2y}{x} - 3z = \frac{2y - 3xz}{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3y$$

y como:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q} = -\,\boldsymbol{grad}\,V = -\frac{3x^2 - y^2}{x^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y - 3xz}{x}\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$$

en el punto $A(1,2,1)$:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = 200(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}) \ \mu\text{N}}$$

2) $V(A) = 36$ V y $V(B) = 5$ V y como:

$$\boxed{W_A^B = Q[V(A) - V(B)] = 200 \times 10^{-6} \ 31 \text{ J} = 6{,}2 \times 10^{-3} \text{ J}}$$

Problema 17. Consideremos dos placas infinitas, paralelas, separadas una distancia d y a potenciales 0 y V_0, respectivamente. En la región comprendida entre las placas existe una densidad volumétrica de carga dada por:

$$\rho = \rho_0 \frac{x}{d} \qquad (\rho_0 = \text{cte})$$

donde la distancia x se mide desde la placa a potencial cero. Calcular $\boldsymbol{E}$ en cualquier punto entre las placas y el valor de las densidades superficiales de carga en cada placa.

Solución

El problema adquiere, al aplicar la ecuación de Poisson, una expresión sencilla, debido a la distribución particular de la carga; en efecto, la ecuación de Poisson es:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

donde, en general, V es una función de xyz:

$$V = V(xyz)$$

Como las placas son de extensión infinita, es inmediato suponer que la función V no dependerá ni de y ni de z, ya que todos los puntos que están a una distancia x de la placa a potencial cero son «eléctricamente equivalentes». En estas consiciones:

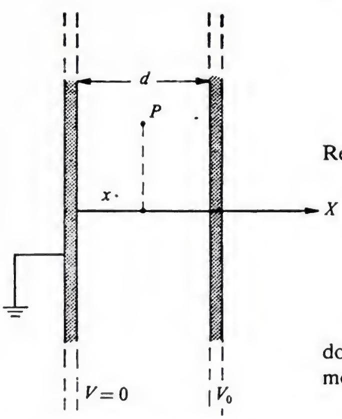
$$V = V(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

y se podrá escribir:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{dV}{dx}$$

así que la ecuación de Poisson adoptará la forma:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2V}{dx^2} = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\[2ex] \rho = \rho_0 \dfrac{x}{d} \end{array}\right| \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d} x$$



Problema XXVI-17

Resolvamos esta ecuación diferencial, para ello la escribimos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d} x \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d} x\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\int d\left(\frac{dV}{dx}\right) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d}\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 d}\,\frac{x^2}{2} + C_1$$

donde C_1 es una constante de integración. Multipliquemos por dx ambos miembros e integremos nuevamente:

$$\int dV = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 d}\int x^2 dx + C_1 \int dx \quad \Rightarrow \quad V(x) = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d} x^3 + C_1 x + C_2$$

donde C_2 es una nueva constante de integración.

La función que hemos obtenido será la solución que buscábamos, es decir, el valor del potencial en cada punto de la región comprendida entre las placas, una vez que conozcamos los valores de las constantes C_1 y C_2; el cálculo de estas constantes es el problema de las «condiciones de contorno» propio de toda resolución de ecuaciones diferenciales.

Tenemos que obligar a la función $V(x)$ que satisfaga las condiciones impuestas de antemano al problema. En nuestro caso estas condiciones consisten en fijar los potenciales de ambas placas. Es decir, en lenguaje matemático, todos los puntos del plano $x = 0$, placa de la izquierda (figura), deben estar a potencial nulo, y los puntos del plano $x = d$ deben estar a potencia V_0; analíticamente:

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad V(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \left(-\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 d}\right) \times 0 + C_1 \times 0 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

de la segunda condición:

$$x = d \;\Rightarrow\; V(d) = V_0 \;\Rightarrow\; V_0 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0 d}\,d^3 + C_1 d \;\Rightarrow\; C_1 = \left(V_0 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\,d^2\right)\frac{1}{d}$$

por lo tanto, la solución buscada es:

$$V(x) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0 d}\,x^3 + \left(V_0 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\,d^2\right)\frac{1}{d}\,x$$

Encontrada la función potencial en cada punto, tenemos el problema electrostático totalmente resuelto, sin más que aplicar:

$$\boldsymbol{E} = -\,\boldsymbol{grad}\,V(x)$$

y como V es sólo función de x:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{dV}{dx}\,\boldsymbol{i} \;\Rightarrow\; \boxed{\boldsymbol{E} = \left[\frac{\rho}{2\varepsilon_0 d}\,x^2 - \left(V_0 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\,d^2\right)\frac{1}{d}\right]\boldsymbol{i}}$$

Las densidades de carga son también fáciles de calcular, pues, como sabemos, en las proximidades de un conductor el campo es:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

El campo en las proximidades de la placa a potencial cero se calculará haciendo $x = 0$; luego:

$$E_{x=0} = -\left(V_0 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\,d^2\right)\frac{1}{d}$$

por lo que la densidad de carga en esa placa será:

$$\boxed{\sigma = -\left(V_0 + \frac{\rho}{6\varepsilon_0}\,d^2\right)\frac{\varepsilon_0}{d}}$$

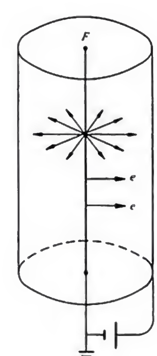
La densidad en la otra placa se haría exactamente igual, salvo que calculando el campo en $x = d$. Dejamos al lector como ejercicio que resuelva ese caso.

B) ACCION DE UN CAMPO ELECTRICO SOBRE PARTICULAS CARGADAS EN MOVIMIENTO

FORMULARIO

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a} = \frac{q}{m}\,\boldsymbol{E}$$

Problema 18. Un electrón es emitido por emisión termoiónica por un filamento caliente a potencial cero respecto a otro electrodo que se encuentra a un potencial de 1 000 V. Este electrodo es un cilindro coaxial con el filamento. Calcúlese la velocidad adquirida por el electrón al llegar al cilindro exterior y su energía cinética en electronvoltios. (Masa del electrón: $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; carga del electrón: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.)



Problema XXVI-18

Solución

El electrón (negativo) se dirigirá a la zona de más alto potencial (cilindro exterior), y cuando llegue a su proximidad habrá adquirido una energía cinética:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$

esta energía será igual, en virtud del *principio de conservación*, a la energía potencial en la posición inicial:

$$e\Delta V = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^3}{9{,}1 \times 10^{-31}}} = 1\,875 \times 10^4 \text{ m/s}}$$

y su energía será:

$$\boxed{T = e\Delta V = 1{,}6 \times 10^{-19} \times 10^3 \text{ J} = 10^3 \text{ eV}}$$

Problema 19. Se crea un campo eléctrico uniforme de intensidad 6×10^4 N/C, entre las láminas de un condensador plano que distan 2,5 cm. Calcular:

1. La aceleración a que está sometido un electrón situado en dicho campo.

2. Partiendo el electrón del reposo, y de una de las láminas, ¿con qué velocidad llegará a la otra lámina?

3. ¿Cuál será entonces su energía cinética?

4. ¿Cuánto tiempo tardará el electrón en cruzar el espacio que separa ambas láminas?

Solución

1)

$$Ee = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{Ee}{m} = \frac{6 \times 10^4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{9{,}1 \times 10^{-31}} = 10^{16} \text{ m/s}^2$$

2)

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \times 10^{16} \times 2{,}5 \times 10^{-2}} = \sqrt{5} \times 10^7 \text{ m/s}$$

3)

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\, 9{,}1 \times 10^{-31}\; 5 \times 10^{14} = 23 \times 10^{-17} \text{ J} = 1\,422 \text{ eV}$$

4)

$$s = \frac{1}{2} vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \times 2{,}5 \times 10^{-2}}{\sqrt{5} \times 10^7} = \sqrt{5} \times 10^{-9} \text{ s}$$

Problema 20. Tenemos un campo eléctrico uniforme dirigido verticalmente de abajo hacia arriba cuya intensidad es de 10^4 N/C.

1. Calcular la fuerza ejercida por este campo sobre un electrón.

2. Comparar la fuerza anterior con el peso del electrón.

3. Calcular la velocidad que adquirirá un electrón en el campo anterior cuando haya recorrido 1 cm partiendo del reposo.

4. Calcular su energía cinética en el caso anterior.
5. Calcular el tiempo que necesita para recorrer 1 cm.

Solución

1)

$$\boxed{F = Ee = 10^4 \times 1{,}6 \times 10^{-19} = 1{,}6 \times 10^{-15}\ \text{N}}$$

2)

$$\boxed{\frac{F}{P} = \frac{Ee}{mg} = \frac{1{,}6 \times 10^{-15}}{9{,}1 \times 10^{-31} \times 9{,}8} \simeq 1{,}8 \times 10^{14}}$$

el peso es despreciable frente a la fuerza electrostática.

3)

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2Ees}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-15} \times 10^{-2}}{9{,}1 \times 10^{-31}}}\ \text{m/s} = 5\,930\ \text{km/s}}$$

4)

$$T = Fs = Ees = 1{,}6 \times 10^{-15} \times 10^{-2} = 1{,}6 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

y como $1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}$ J, la energía es:

$$\boxed{T = 100\ \text{eV}}$$

5)

$$s = \frac{1}{2}vt \Rightarrow \boxed{t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \times 10^{-2}}{5{,}93 \times 10^6} = 3{,}4 \times 10^{-9}\ \text{s}}$$

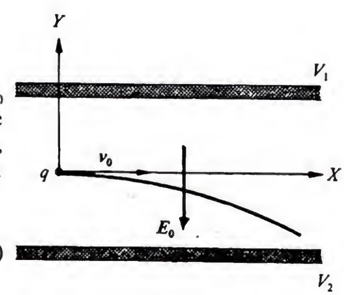
Problema 21. Calcular la trayectoria que seguirá una partícula de masa m y carga q que se mueve inicialmente con una velocidad v_0 perpendicular a un campo eléctrico uniforme.

Solución

Supongamos que en una región del espacio tenemos localizado un campo eléctrico uniforme de magnitid E_0. Puede ser el campo existente entre dos placas conductoras paralelas a potenciales V_1 y V_2 separadas una distancia pequeña comparada con su tamaño; de esta manera es fácil comprobar y lo dejamos como ejercicio que el campo entre las placas es uniforme, y su valor es:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

Si por un punto equidistante de las placas lanzamos una partícula cargada con una velocidad v_0 paralela a las placas (perpendicular al campo, por lo tanto), en la región comprendida entre dichas placas la partícula será sometida a la acción del campo y describirá cierta trayectoria, que es lo que deseamos calcular. Tomemos unos ejes de referencia como los que indica la figura:



Problema XXVI-21

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{qE_0}{m} \tag{a}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \tag{b}$$

pues las componentes del campo son:

$$E_x = 0$$
$$E_y = E_0$$
$$E_z = 0$$

De la ecuación (b) se deduce que:

$$v_x = \int 0 \times dt + C_1$$

y teniendo en cuenta las condiciones iniciales para $t = 0$, $v_x = v_0$, luego:

$$v_x = C_1 = v_0$$

De la ecuación (a) obtenemos:

$$v_y = -\int \frac{qE_0}{m}\, dt \;\Rightarrow\; v_y = -\frac{qE_0}{m} t + C_2$$

según las condiciones iniciales, para $t = 0$, $v_y = 0 \Rightarrow C_z = 0$, resulta, pues:

$$v_y = -\frac{qE_0}{m} t$$

pero:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} \end{aligned}\right| \;\Rightarrow\; dx = v_0 dt \;\Rightarrow\; x = v_0 t + x_0$$

pata $t = 0$, $x = 0$, luego $x_0 = 0$, quedando:

$$x = v_0 t \qquad \text{(c)}$$

y también:

$$dy = -\frac{qE_0}{m} t dt \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2}\frac{qE_0}{m} t^2 + y_0$$

para:

$$t = 0, \qquad y = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = 0$$

por lo que:

$$y = -\frac{1}{2}\frac{qE_0}{m} t^2 \qquad \text{(d)}$$

Si entre (c) y (d) eliminamos t, nos queda la ecuación de la trayectoria:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}\frac{qE_0}{mv_0^2} x^2}$$

que corresponde a una trayectoria parabólica. El caso ha resultado ser exactamente igual al del «tiro horizontal».

Problema 22. Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme normalmente a sus líneas de fuerza, con una velocidad $v_0 = 10^4$ m/s. La intensidad del cam-

po es $E = 10^5$ V/m. Calcular:
1. La aceleración que experimenta el electrón.
2. La ecuación de su trayectoria.

Solución

1)

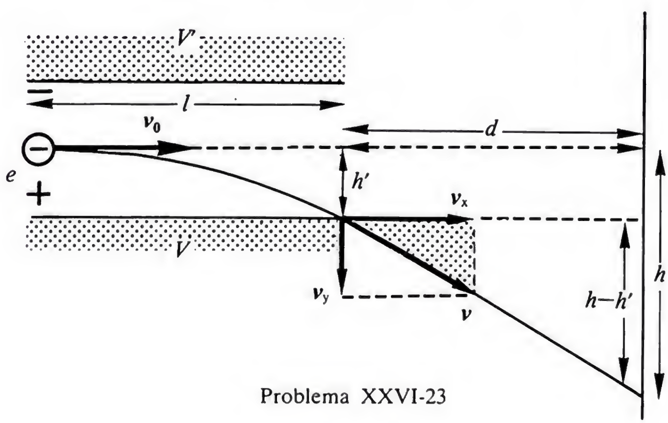
$$Ee = ma \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{Ee}{m} = \frac{10^5 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{9{,}1 \times 10^{-31}} = 17{,}58 \times 10^{15}\ \text{m/s}^2}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 t \\[2ex] y = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{Ee}{m}\,t^2 \end{array}\right| \quad y = \frac{Ee}{2mv_0^2}\,x^2 = \frac{17{,}58 \times 10^{15}}{2 \times 10^8}\,x^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 8{,}79 \times 10^7 x^2}$$

Problema 23. Un electrón se lanza horizontalmente, con una velocidad inicial de $v_0 = 1\,000$ km/s, a lo largo de la dirección equidistante de las placas de un condensador plano, cuya longitud es $l = 50$ cm, y sale por el otro extremo, justamente por el borde de la placa positiva. El electrón cae sobre una pantalla fluorescente vertical situada a una distancia $d = 50$ cm del borde de salida del condensador, sobre la que se mide un desplazamiento vertical del electrón $h = 20$ cm. Se pide:
1. Valor del campo eléctrico existente entre las placas del condensador.
2. Diferencia de potencial entre dichas placas.
3. Desplazamiento vertical experimentado por el electrón justamente a la salida de las placas del condensador.

Solución



Problema XXVI-23

Las ecuaciones que podemos plantear son:

$$\left.\begin{array}{l} F = Ee = ma \\ l = v_0 t \\ h' = \dfrac{1}{2} at^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} a = \dfrac{Ee}{m} \\ t = \dfrac{l}{v_0} \end{array} \left| \; h' = \frac{Eel^2}{2mv_0^2}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = at \\ \dfrac{v_x}{v_y} = \dfrac{d}{h - h'} \\ l = d \end{array}\right| \Rightarrow \frac{mv_0^2}{Eel} = \frac{l}{h - h'} \Rightarrow h - h' = \frac{Eel^2}{mv_0^2}$$

$$h = \frac{3}{2}\frac{Eel^2}{mv_0^2} \Rightarrow E = \frac{2mv_0^2 h}{3el^2}$$

sustituyendo valores

$$\boxed{E = \frac{2 \times 9{,}1 \times 10^{-31} \times 10^{12} \times 2 \times 10^{-1}}{3 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 25 \times 10^{-2}} = 3 \text{ N/C}}$$

$$\boxed{h' = h - \frac{Eel^2}{mv_0^2} = h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}h = \frac{20}{3} \text{ cm}}$$

$$\boxed{V - V' = Er = E2h' = 3 \times 2\frac{0{,}2}{3} = 0{,}4 \text{ V}}$$

Problema 24. Un electrón de carga $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C y masa $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg se lanza horizontalmente con una velocidad inicial $v_0 = 1\,000$ km/s, a lo largo de una dirección equidistante de las placas de un condensador plano de $l = 40$ cm de longitud. El campo eléctrico entre las placas es $E = 50$ V/m. El electrón cae sobre una pantalla fluorescente vertical, situada a una distancia $d = 0{,}40$ m del borde de salida del condensador. Hallar:

1. El desplazamiento vertical h' que experimenta el electrón justamente a la salida de las placas del condensador.

2. El desplazamiento vertical h, medido en la pantalla fluorescente.

Solución

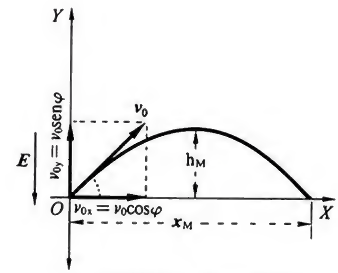
Operando como en el problema anterior:

$$\boxed{h' = \frac{Eel^2}{2mv_0^2} = \frac{50 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}16}{2 \times 9{,}1 \times 10^{-31} \times 10^{12}} = 0{,}7 \text{ m}}$$

$$\boxed{h = 3h' = 2{,}1 \text{ m}}$$

Problema 25. En ausencia del campo gravitatorio terrestre, lanzamos una partícula material de masa m y carga $+Q$ a una velocidad v_0, en el seno de un campo eléctrico E homogéneo, vertical y hacia abajo. La velocidad de lanzamiento forma un ángulo φ con la dirección horizontal. Calcular en función de estos datos:

1. Las ecuaciones del movimiento.
2. Ecuación de la trayectoria.
3. Alcance sobre la horizontal.
4. Altura máxima alcanzada por la partícula.



Problema XXVI-25

Solución

1)

$$F = EQ = ma \Rightarrow a = \frac{EQ}{m} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \boxed{v_x = v_0 \cos\varphi \qquad v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{EQ}{m} t} \\[2ex] \boxed{x = v_0 t \cos\varphi \qquad y = v_0 t \operatorname{sen}\varphi - \dfrac{EQ}{2m} t^2} \end{array} \right.$$

2) De las dos últimas ecuaciones sacamos:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\varphi} \Rightarrow \boxed{y = x \operatorname{tag}\varphi - \frac{EQ}{2mv_0^2 \cos^2\varphi} x^2}$$

La trayectoria es parabólica.

3)

$$y = 0 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \text{ (en el origen)} \\[2ex] t = \dfrac{2mv_0 \operatorname{sen}\varphi}{EQ} \quad (\text{para } x = x_M) \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{2mv_0^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{EQ} = \frac{mv_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{EQ}}$$

4)

$$v_y = 0 \Rightarrow t = \frac{mv_0 \operatorname{sen}\varphi}{EQ} \quad (\text{para } y = h_M) \Rightarrow \boxed{h_M = \frac{mv_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{EQ} - \frac{EQ}{2m} \frac{m^2 v_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{E^2 Q^2} = \frac{mv_0^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{2EQ}}$$

Capítulo XXVII

EL CAMPO ELECTRICO EN LA MATERIA. CONDUCTORES Y DIELECTRICOS. CAPACIDAD

A) CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO

FORMULARIO

CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR: $C = \dfrac{Q}{V}$

CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR ESFÉRICO:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$\text{(UEE)} \qquad C = R$$

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA ALMACENADA EN UN CONDUCTOR CARGADO EN EQUILIBRIO:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

Problema 1. Calcular en μF la capacidad de la Tierra. Radio terrestre = 6 367 km.

Solución

La capacidad de la tierra en UEE es su radio expresado en centímetros, o sea:

$$\boxed{C = 6\,367 \times 10^5 \text{ cm} = \frac{6\,367 \times 10^5}{9 \times 10^{11}} \text{ F} = 707 \times 10^{-6} \text{ F} = 707\ \mu\text{F}}$$

Problema 2. Una esfera metálica de 10 cm de radio tiene una carga de 1 μC. Se pide calcular en unidades del SI:

1. La capacidad de la esfera.
2. El potencial en un punto de su superficie.
3. La energía eléctrica que tiene almacenada la esfera.
4. La densidad eléctrica superficial.

Solución

1)

$$C = 10 \text{ cm} = \frac{10}{9 \times 10^{11}} \text{ F} = \frac{1}{9} 10^{-10} \text{ F}$$

2) 1.er MÉTODO:

$$V = \frac{Q}{C} = 10^{-6} \times 9 \times 10^{10} = 9 \times 10^4 \text{ V}$$

2.º MÉTODO:

$$V = K_0 \frac{Q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{10^{-6}}{10^{-1}} = 9 \times 10^4 \text{ V}$$

3)

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9} 10^{-10} \times 81 \times 10^8 = 4{,}5 \times 10^{-2} \text{ J}$$

4)

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{10^{-6}}{4\pi 0{,}1^2} = \frac{10^{-4}}{4\pi} \text{ C/m}^2$$

Problema 3. Una esfera de 8 cm de radio posee una carga eléctrica de 0,3 μC. Calcular en unidades del SI:

1. El potencial en un punto de su superficie.
2. La densidad superficial de carga, de la esfera.
3. El campo y el potencial en un punto situado a 12 cm de la superficie esférica.
4. La energía eléctrica almacenada en la esfera.

Solución

1)

$$V = \frac{Q}{C} \left| \begin{array}{l} Q = 3 \times 10^{-7} \text{ C} \\ \\ C = \dfrac{8}{9 \times 10^{11}} \text{ F} \end{array} \right| V = \frac{3 \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{11}}{8} = 33\,750 \text{ V}$$

2)

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{3 \times 10^{-7}}{4\pi 0{,}08^2} = 3{,}73 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

3)

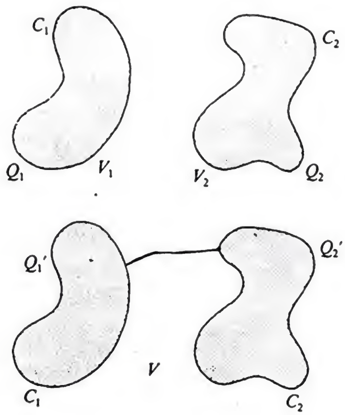
$$E = K_0 \frac{Q}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-7}}{0{,}2^2} = 6{,}75 \times 10^4 \text{ V/m}$$

$$V = K_0 \frac{Q}{r} = 9 \times 10^9 \frac{3 \times 10^{-7}}{0{,}2} = 13\,500 \text{ V}$$

4)

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{8}{9 \times 10^{11}} 13\,500^2 = 8{,}1 \times 10^{-4} \text{ J}$$

Problema 4. Demostrar que si unimos dos cuerpos por un hilo conductor de capacidad despreciable, la capacidad de la unión es la suma de las capacidades de los dos cuerpos.



Problema XXVII-4

Solución

Después de la unión el sistema quedará al potencial V (común a ambos conductores), y la carga total habrá tenido que permanecer constante.

$$Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' = Q$$

La capacidad del conjunto será, pues:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1' + Q_2'}{V} = \frac{Q_1'}{V} + \frac{Q_2'}{V}$$

pero:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_1'}{V} \\ C_2 &= \frac{Q_2}{V_2} = \frac{Q_2'}{V} \end{aligned} \right| \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Problema 5. Una esfera metálica de 10 cm de radio, aislada, se carga a una tensión de 5 000 V. ¿Cuál es su carga en culombios? A continuación se une a otra esfera descargada y aislada de 8 cm de radio. Determinar:

1. La carga de cada esfera.

2. El potencial común de ambas.

Solución

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{10}{9 \times 10^{11}} \text{ F} \\ V_1 &= 5 \times 10^3 \text{ V} \end{aligned} \right| \boxed{Q_1 = C_1 V_1 = \frac{10}{9 \times 10^{11}} 5 \times 10^3 = \frac{50}{9} 10^{-8} \text{ C}}$$

$$\left. \begin{aligned} C &= C_1 + C_2 = 18 \text{ cm} = \frac{18}{9 \times 10^{11}} \text{ F} \\ Q &= Q_1 + Q_2 = \frac{50}{9} 10^{-8} \text{ C} \end{aligned} \right| \boxed{V = \frac{Q}{C} = \frac{50 \times 10^{-8} \times 9 \times 10^{11}}{9 \times 18} = \frac{25}{9} 10^3 \text{ V}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1' &= C_1 V = \frac{10}{9 \times 10^{11}} \frac{25}{9} 10^3 = \frac{250}{81} 10^{-8} \text{ C} \\ Q_2' &= C_2 V = \frac{8}{9 \times 10^{11}} \frac{25}{9} 10^3 = \frac{200}{81} 10^{-8} \text{ C} \end{aligned}}$$

COMPROBACIÓN:

$$Q = Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 = \left(\frac{250}{81} + \frac{200}{81} \right) 10^{-8} = \frac{50}{9} 10^{-8} \text{ C}$$

Problema 6. Dos esferas metálicas de radios 6 y 9 cm se cargan con 1 μC cada una y luego se unen con un hilo conductor de capacidad despreciable. Calcular:
1. El potencial de cada esfera aislada.
2. Potencial después de la unión.
3. Carga de cada esfera después de la unión, y cantidad de carga que circuló por el hilo.

Solución

1)

$$C_1 = \frac{6}{9 \times 10^{11}}\ \text{F} \qquad Q_1 = 10^{-6}\ \text{C} \qquad \boxed{V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{10^{-6} \times 9 \times 10^{11}}{6} = 15 \times 10^4}$$

$$C_2 = \frac{9}{9 \times 10^{11}}\ \text{F} \qquad Q_2 = 10^{-6}\ \text{C} \qquad \boxed{V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{10^{-6} \times 9 \times 10^{11}}{9} = 10^5\ \text{V}}$$

2)

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2 \times 10^{-6}\ \text{C} \qquad C = C_1 + C_2 = \frac{15}{9 \times 10^{11}}\ \text{F} \qquad \boxed{V = \frac{Q}{C} = \frac{2 \times 10^{-6} \times 9 \times 10^{11}}{15} = 12 \times 10^4\ \text{V}}$$

3)

$$\boxed{\begin{array}{l} Q'_1 = C_1V = \dfrac{6}{9 \times 10^{11}}\, 12 \times 10^4 = 0{,}8 \times 10^{-6}\ \text{C} = 0{,}8\ \mu\text{C} \\ Q'_2 = C_2V = \dfrac{9}{9 \times 10^{11}}\, 12 \times 10^4 = 1{,}2 \times 10^{-6}\ \text{C} = 1{,}2\ \mu\text{C} \end{array}}$$

De la primera a la segunda esfera ha pasado:

$$\boxed{Q'_2 - Q_2 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2\ \mu\text{C}}$$

Problema 7. Una esfera metálica aislada, de 10 cm de radio, se carga a un potencial de 1 000 V. Se toca esta esfera con otra, también aislada, de 2 cm de radio, que a continuación se descarga; se repite esta operación cinco veces. Determinar:
1. La carga de la primera esfera, antes de ser tocada.
2. La carga de dicha esfera después de la quinta operación.
3. Su potencial en este momento.

Solución

1)

$$\boxed{Q = C_1V = \frac{10}{9 \times 10^{11}}\, 10^3 = \frac{10^{-7}}{9}\ \text{C} = \frac{1}{90}\ \mu\text{C}}$$

2) y 3) La capacidad conjunta de las dos esferas será:

$$C_1 + C_2 = 12 \text{ cm}$$

Potencial y carga del conjunto después del primer contacto:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = V \frac{C_1}{C_1 + C_2} \qquad Q_1 = C_1 V_1 = V \frac{C_1^2}{C_1 + C_2}$$

después del segundo contacto:

$$V_2 = \frac{Q_1}{C_1 + C_2} = V \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2 \qquad Q_2 = C_1 V_2 = V \frac{C_1^3}{(C_1 + C_2)^2}$$

al cabo de n contactos:

$$V_n = V \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^n \qquad Q_n = V \frac{C_1^{n+1}}{(C_1 + C_2)^n}$$

luego:

$$\boxed{V_5 = 10^3 \left(\frac{10}{12} \right)^5 = 402 \text{ V}} \qquad \boxed{Q_5 = C_1 V_5 = \frac{10}{9 \times 10^{11}} \, 402 = \frac{134}{3} \, 10^{-10} \text{ C}}$$

Problema 8. Cincuenta gotas idénticas de mercurio se cargan simultáneamente al mismo potencial de 100 V. ¿Cuál será el potencial de la gran gota formada por aglomeración de aquéllas? (Se supone que las gotas son de forma esférica.)

Solución

Obsérvese que la capacidad de la unión en este caso *no es la suma de capacidades*, puesto que el radio de la gota formada por las 50 no es la suma de los radios de cada una de las gotas pequeñas.

El potencial de una gota será:

$$V_1 = K_0 \frac{Q_1}{r_1} = 100 \text{ V}$$

El potencial de la gota total:

$$V = K_0 \frac{Q}{R} \quad \left| \begin{array}{l} Q = 50 Q_1 \\[2ex] \dfrac{4}{3} \pi R^3 = 50 \, \dfrac{4}{3} \pi r_1^3 \quad \Rightarrow \quad R = r_1 \sqrt[3]{50} \end{array} \right.$$

sustituyendo:

$$\boxed{V = \frac{50}{\sqrt[3]{50}} K_0 \frac{Q_1}{r_1} = \frac{50 \times 100}{\sqrt[3]{50}} = 1\,357{,}2 \text{ V}}$$

B) CONDENSADORES: ASOCIACION

FORMULARIO

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR PLANO:

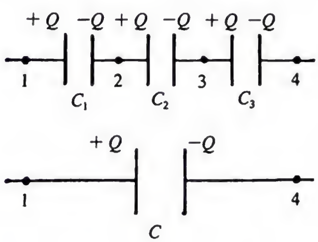
$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR ESFÉRICO:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}}$$

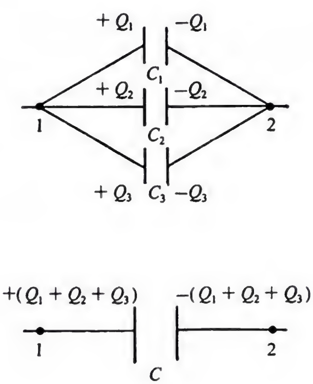
ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES:

SERIE



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

PARALELO



$$C = C_1 + C_2 + C_3$$

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR CARGADO:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q(V_1 - V_2) = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2$$

ENERGÍA DE LA UNIDAD DE VOLUMEN:

$$u = \frac{U}{v} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

Problema 9. Un condensador de 100 μF está cargado al potencial de 2 500 V.
1. Calcular la carga del condensador y su energía.
2. Determinar el peso del hielo a 0° C que se podría fundir con el calor que desprendiese la descarga del condensador, suponiendo que en esta descarga toda la energía se transformase en calor.
3. Determinar el volumen que tomaría 1 g de oxígeno, primitivamente en condiciones normales, si manteniendo la presión constante se le hiciese absorber el calor producido en la descarga precedente.
Calor específico del oxígeno a presión constante: 0,237 cal/g · °C.

Solución

1)

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= CV = 100 \times 10^{-6} \times 2\,500 = 0{,}25 \text{ C} \\ U &= \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 10^{-4} \times 2\,500^2 = 312{,}5 \text{ J} \end{aligned}}$$

2) La energía en calorías es:

$$Q = 312{,}5 \times 0{,}24 \text{ cal} = 75 \text{ cal}$$

que se emplean en fundir M g de hielo a 80 calorías por gramo; luego:

$$75 = 80M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 0{,}94 \text{ g}}$$

3)

$$\Delta Q = Mc_p\Delta t \quad \Rightarrow \quad 75 = 1 \times 0{,}237t \quad \Rightarrow \quad t = 316{,}5° \text{ C} \quad \Rightarrow \quad T = 589{,}5° \text{ K}$$

$$v_0 = \frac{22\,400}{32} \text{ cm}^3$$

$$\frac{v}{v_0} = \frac{T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{32v}{22\,400} = \frac{589{,}5}{273} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 1\,511{,}5 \text{ cm}^3}$$

Problema 10. Un lago circular de 1 000 km^2 tiene exactamente encima, a una altura de 500 m, una nube tormentosa, también circular, de la misma área. El lago, de 2 m de profundidad, está lleno de agua. Calcular la energía disipada en el agua en forma de calor, si la nube se descarga totalmente sobre ella, perdiendo toda su carga eléctrica y todo el calor fuera absorbido por el agua. ¿Sería apreciable la elevación de la temperatura experimentada por el agua? El campo eléctrico existente entre la nube y el estanque es de 100 V/m.

Solución

La densidad cúbica de energía de un campo eléctrico es:

$$u = \frac{U}{v} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

La energía que existe en el espacio comprendido entre la nube y el lago será:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 v = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 Ah = \frac{0{,}24 \times 10^4 \times 1\,000 \times 10^6 \times 500}{2 \times 4\pi 9 \times 10^9} = 5\,305 \text{ cal}}$$

La masa de agua del lago es:

$$M = 2 \times 10^{12}\ \text{g} \Rightarrow Q = Mc\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{Q}{Mc} = \frac{5\,305}{2 \times 10^{12}} = 2{,}6 \times 10^{-9}\ ^\circ\text{C}$$

$\boxed{\text{la elevación de temperatura es inapreciable.}}$

Problema 11. Un sistema formado por dos condensadores asociados en serie tiene una capacidad de 0,09 μF. Asociados en paralelo, la capacidad del conjunto es 1 μF. ¿Qué capacidad tiene cada condensador?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{0{,}09} \\ C_1 + C_2 = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} C_2 = 1 - C_1 \\ \dfrac{1}{0{,}09} = \dfrac{C_1 + C_2}{C_1C_2} = \dfrac{C_1 + 1 - C_1}{C_1(1 - C_1)} \end{array}$$

$$C_1^2 - C_1 + 0{,}09 = 0 \left| \begin{array}{l} C_1 = 0{,}9\ \mu\text{F} \\ C_1' = 0{,}1\ \mu\text{F} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} C_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1\ \mu\text{F} \\ C_2' = 1 - 0{,}1 = 0{,}9\ \mu\text{F} \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{En consecuencia, las capacidades son } 0{,}1\ \mu\text{F y } 0{,}9\ \mu\text{F.}}$

Problema 12. ¿Qué capacidad tendrá un acoplamiento mixto de 10 condensadores de 5 μF cada uno cuando estén dispuestos en 5 series de 2 condensadores cada una?

Solución

La capacidad de cada serie será:

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_s} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{C_s} \Rightarrow C_s = \frac{5}{2}$$

Al haber cinco series en paralelo la capacidad será:

$$\boxed{C = 5C_s = 5\,\frac{5}{2} = 12{,}5\ \mu\text{F}}$$

Problema 13. Resolver el problema anterior cuando los condensadores estén dispuestos en dos series de cinco condensadores cada una.

Solución

La capacidad de cada serie será:

$$\frac{1}{C_s} = 5\,\frac{1}{C_1} = 5\,\frac{1}{5} \Rightarrow C_s = 1\ \mu\text{F}$$

La capacidad del conjunto será:

$$\boxed{C = 2C_s = 2\ \mu\text{F}}$$

Problema 14. Se disponen dos condensadores, de capacidad 1 y 2 μF, respectivamente, en serie, cargando el conjunto con una tensión de 3 000 V. Se produce la descarga del conjunto, en 1 l de aire, que se encuentra a 0° C y presión de 760 mm. Suponiendo que todo el calor desprendido en la descarga se invierte en calentar el aire y que el volumen de éste no varía, determinar:

1. Diferencia de potencial entre las armaduras de cada condensador, antes de la descarga.

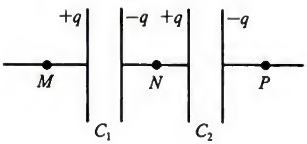
2. Energía liberada en la descarga.

3. Elevación de la temperatura del aire.

4. Presión final del mismo.

Calor específico del aire a volumen constante: 0,17 cal/g · °C. Peso de 1 l de aire en condiciones normales: 1,293 g.

Solución



Problema XXVII-14

1) En el condensador equivalente:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}\ \mu\text{F}$$

$$q = C(V_M - V_P) = \frac{2}{3}\, 10^{-6} \times 3\,000 = 2 \times 10^{-3}\ \text{C}$$

esta carga es la que tiene cada uno de los condensadores así acoplados; luego:

$$\boxed{V_{MN} = \frac{q}{C_1} = \frac{2 \times 10^{-3}}{10^{-6}} = 2\,000\ \text{V}}$$

$$\boxed{V_{NP} = \frac{q}{C_2} = \frac{2 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}} = 1\,000\ \text{V}}$$

COMPROBACIÓN:

$$V_{MP} = V_{MN} + V_{NP} = 3\,000\ \text{V}$$

2)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\, CV^2 = \frac{1}{2}\, \frac{2}{3}\, 10^{-6} \times 9 \times 10^6 = 3\ \text{J}}$$

3) La cantidad de calor que se produce en la descarga es:

$$\Delta Q = 3 \times 0{,}24\ \text{cal}$$

luego:

$$\Delta Q = Mc_v \Delta t \quad \Rightarrow \quad 3 \times 0{,}24 = 1{,}293 \times 0{,}17 \Delta t \quad \Rightarrow \boxed{\Delta t = 3{,}3°\ \text{C}}$$

4)

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{760} = \frac{276{,}3}{273} \quad \Rightarrow \boxed{p = 769\ \text{mm}}$$

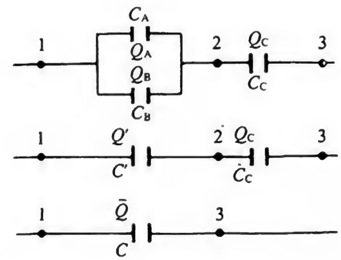
Problema 15. Tenemos tres condensadores iguales de 2 μF cada uno. Dos de ellos, A y B, los montamos en paralelo, y el tercero, C, en serie con los anteriores. Al conjunto se le aplica una diferencia de potencial de 1 000 V. Se pide:
1. La capacidad equivalente del sistema.
2. La carga de cada condensador.
3. La tensión entre las armaduras de cada condensador.
4. La energía eléctrica almacenada en el conjunto.

Solución

1)

$$C' = C_A + C_B = 4\ \mu F$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C_C} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{4}{3}\ \mu F}$$



Problema XXVII-15

2) y 3)

$$Q_C = Q' = Q = CV_{13} = \frac{4}{3}\, 10^{-6} \times 10^3 = \frac{4}{3}\, 10^{-3}\ C$$

$$V_2 - V_3 = \frac{Q_C}{C_C} = \frac{4 \times 10^{-3}}{3 \times 2 \times 10^{-6}} = \frac{2}{3}\, 10^3\ V$$

$$V_1 - V_2 = \frac{Q'}{C'} = \frac{4 \times 10^{-3}}{3 \times 4 \times 10^{-6}} = \frac{1}{3}\, 10^3\ V$$

$$Q_A = Q_B = C_A(V_1 - V_2) = 2 \times 10^{-6}\, \frac{1}{3}\, 10^3 = \frac{2}{3}\, 10^{-3}\ C$$

COMPROBACIÓN:

$$(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) = \frac{2}{3}\, 10^3 + \frac{1}{3}\, 10^3 = 1\,000\ V$$

4)

$$\boxed{U = \frac{1}{2} C (V_1 - V_3)^2 = \frac{1}{2}\, \frac{4}{3}\, 10^{-6}\, 10^6 = \frac{2}{3}\ J}$$

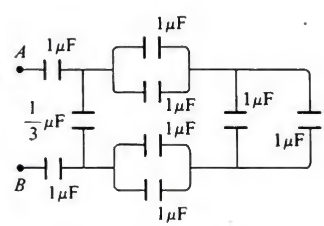
COMPROBACIÓN:

$$U_A = U_B = \frac{1}{2}\, 2 \times 10^{-6}\, \frac{1}{9}\, 10^6 = \frac{1}{9}\ J$$

$$U_C = \frac{1}{2}\, 2 \times 10^{-6}\, \frac{4}{9}\, 10^6 = \frac{4}{9}\ J$$

$$U = U_A + U_B + U_C = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}\ J$$

Problema 16. Calcular la capacidad del sistema de la figura. Calcular la carga y el voltaje de cada condensador si establecemos entre A y B una diferencia de potencial de 3 000 V.



Problema XXVII-16

Solución

Las asociaciones N_1N_2, N_3N_4 y N_5N_6 tienen de capacidad:

$$C = 1 + 1 = 2\ \mu F$$

quedando la asociación abreviada como en la figura segunda. La serie de los tres condensadores $N_7N_8N_9$ tiene por capacidad:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}\ \mu\text{F}$$

quedando la asociación como en la figura tercera. La asociación en paralelo MN tiene por capacidad:

$$C = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1\ \mu\text{F}$$

obteniendo el sistema en serie de la figura cuarta, cuya capacidad es:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{3}\ \mu\text{F}}$$

La carga de los condensadores K y L son iguales e igual a la del condensador equivalente:

$$Q_\text{K} = Q_\text{L} = CV = \frac{1}{3}\ 3\,000 = 10^3\ \mu\text{C} = 10^{-3}\ \text{C}$$

por otra parte:

$$V_\text{AC} = V_\text{CD} = V_\text{DB} = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 1\,000\ \text{V}$$

luego:

$$Q_\text{M} = C_\text{M}V_\text{CD} = \frac{1}{3}\ 10^{-6} \times 10^3 = \frac{1}{3}\ 10^{-3}\ \text{C}$$

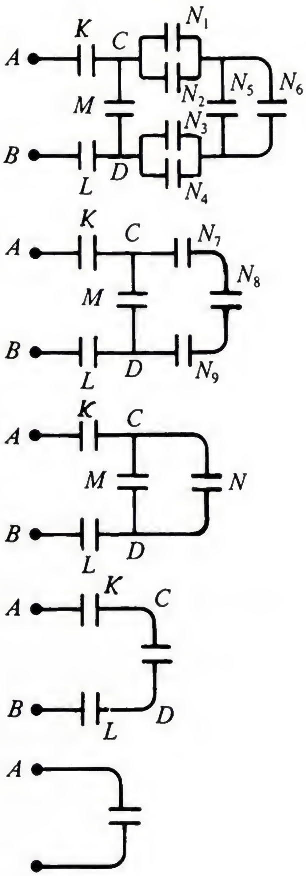
$$Q_\text{N} = Q_{\text{N}_7} = Q_{\text{N}_8} = Q_{\text{N}_9} = C_\text{N}V_\text{CD} = \frac{2}{3}\ 10^{-6} \times 10^3 = \frac{2}{3}\ 10^{-3}\ \text{C}$$

esta Q_N se distribuye en cada caso entre los N_1 y N_2, N_3 y N_4, N_5 y N_6. A cada uno de ellos le corresponde:

$$Q = \frac{1}{3}\ 10^{-3}\ \text{C}$$

La diferencia de potencial entre las armaduras de cada uno de estos condensadores es:

$$V - V' = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}}{3 \times 10^{-6}} = \frac{10^3}{3}\ \text{V}$$



Problema XXVII-16-1.ª

Problema 17. Para formar una batería de 1,6 μF que pueda resistir una diferencia de potencial de 5 000 V disponemos de condensadores de 2×10^{-6} F, que pueden soportar 1 000 V. Calcular:

1. El número de consensadores y la forma de agruparlos.

2. La energía de la batería.

3. La energía máxima almacenada se emplea para fundir 2 g de hielo a 0° C. ¿Cuál es el estado final?

Solución

1) La batería constará de un cierto número de series en paralelo. Cada serie debe tener como mínimo cinco condensadores para que cada uno de ellos soporte como máximo 1 000 V de tensión. La capacidad de cada serie con cinco condensadores será:

$$\frac{1}{C'} = 5\,\frac{1}{C_1} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad C' = \frac{2}{5}\ \mu\text{F}$$

el número de series será tal que la capacidad del condensador equivalente sea $C = 1{,}6\ \mu F$; luego:

$$C = nC' \quad \Rightarrow \quad 1{,}6 = n\frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad n = 4$$

La batería está formada por cuatro series de cinco condensadores cada una.

2)

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}1{,}6 \times 10^{-6} \times 25 \times 10^6 = 20\ J$$

3) Como 20 J equivalen a:

$$Q = 20 \times 0{,}24 = 4{,}8\ cal$$

insuficientes para fundir los 2 g de hielo, el hielo fundido es:

$$4{,}8 = M80 \quad \Rightarrow \quad M = 0{,}06\ g$$

el estado final es:

0,06 g de agua líquida	$t = 0°\ C$
1,94 g de hielo	

Problema 18. Un condensador de 0,1 μF está cargado a 10 000 V y se unen sus armaduras a las de otro descargado, de 0,3 μF. Determinar:

1. La carga de cada condensador después de la unión.
2. La diferencia de potencial común entre las armaduras.
3. La energía que ha pasado del primero al segundo condensador.

Solución

$C_1 = 0{,}1\ \mu F$	$V_1 = 10\,000\ V$	$Q_1 = C_1V_1 = 10^{-3}\ C$
$C_2 = 0{,}3\ \mu F$	$V_2 = 0$	$Q_2 = 0$

1) y 2) Unidos en paralelo la capacidad equivalente es:

$$C = C_1 + C_2 = 0{,}4\ \mu F$$

y la carga del condensador equivalente será:

$$Q = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 10^{-3}\ C$$

la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador equivalente es la misma que la que tienen los dos condensadores así acoplados; luego:

$$\boxed{V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-3}}{0{,}4 \times 10^{-6}} = 2\,500\ V} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} \boxed{Q'_1 = C_1V = 0{,}1 \times 10^{-6} \times 2\,500 = 25 \times 10^{-5}\ C} \\ \boxed{Q'_2 = C_2V = 0{,}3 \times 10^{-6} \times 2\,500 = 75 \times 10^{-5}\ C} \end{array}$$

3) La energía que pasa del primero al segundo será la final de éste:

$$\boxed{U_2 = \frac{1}{2}C_2V^2 = \frac{1}{2}0{,}3 \times 10^{-6}\ 2\,500^2 = 9\,375 \times 10^{-4}\ J}$$

Problema 19. Un condensador de 1 μF se carga a la tensión de 300 V, e independientemente otro condensador de 3 μF se carga a 500 V. Si una vez cargados unimos sus armaduras:

1. ¿Qué valor adquirirá la tensión en ambos condensadores?
2. ¿Qué carga tendrá ahora cada condensador?
3. ¿Qué energía tiene ahora el conjunto de los dos condensadores?

Solución

$C_1 = 1\ \mu F$	$V_1 = 300\ V$	$Q_1 = C_1V_1 = 3 \times 10^{-4}\ C$
$C_2 = 3\ \mu F$	$V_2 = 500\ V$	$Q_2 = C_2V_2 = 15 \times 10^{-4}\ C$

1) Unidos en paralelo la capacidad equivalente es:

$$C = C_1 + C_2 = 4\ \mu F$$

y la carga del condensador equivalente será:

$$Q = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 18 \times 10^{-4}\ C$$

la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador equivalente es la misma que la que tienen los dos así acoplados; luego:

$$\boxed{V = \frac{Q}{C} = \frac{18 \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-6}} = 450\ V}$$

2)

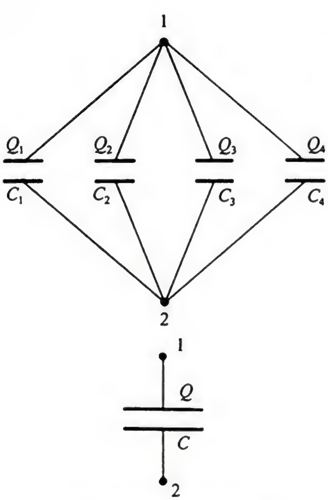
$$\boxed{\begin{aligned} Q'_1 &= C_1V = 10^{-6} \times 450 = 4{,}5 \times 10^{-4}\ C \\ Q'_2 &= C_2V = 3 \times 10^{-6} \times 450 = 13{,}5 \times 10^{-4}\ C \end{aligned}}$$

3)

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\, CV^2 = \frac{1}{2}\, 4 \times 10^{-6} \times 450^2 = 405 \times 10^{-3}\ J}$$

Problema 20. Se tienen tres condensadores, C_1, C_2, C_3, de 2, 3 y 5 μF, respectivamente. El primero se carga a 2 000 V, el segundo a 1 500 V y el tercero a 3 000 V. Calcúlese:

1. La energía almacenada en cada uno de ellos.
2. La diferencia de potencial que existirá entre las placas terminales del sistema formado por dichos condensadores cargados, al conectarlos en paralelo.
3. La energía electrostática del acoplamiento.



Problema XXVII-20

Solución

$C_1 = 2\ \mu F$	$V_1 = 2\,000\ V$	$Q_1 = C_1V_1 = 4 \times 10^{-3}\ C$
$C_2 = 3\ \mu F$	$V_2 = 1\,500\ V$	$Q_2 = C_2V_2 = 4{,}5 \times 10^{-3}\ C$
$C_3 = 5\ \mu F$	$V_3 = 3\,000\ V$	$Q_3 = C_3V_3 = 15 \times 10^{-3}\ C$

1)

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}\, C_1V_1^2 = \frac{1}{2}\, 2 \times 10^{-6} \times 2\,000^2 = 4\ J \\ U_2 &= \frac{1}{2}\, C_2V_2^2 = \frac{1}{2}\, 3 \times 10^{-6} \times 1\,500^2 = 3{,}375\ J \\ U_3 &= \frac{1}{2}\, C_3V_3^2 = \frac{1}{2}\, 5 \times 10^{-6} \times 3\,000^2 = 22{,}5\ J \end{aligned}}$$

2) En el condensador equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q'_1 + Q'_2 + Q'_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 23{,}5 \times 10^{-3}\ \mathrm{C} \\ C = C_1 + C_2 + C_3 = 10\ \mu\mathrm{F} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_A - V_B = \frac{Q}{C} = \frac{23{,}5 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-6}} = 2\,350\ \mathrm{V}}$$

3) La energía asociada al acoplamiento es:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 10^{-5} \times 2\,350^2 = 27{,}6\ \mathrm{J}}$$

Problema 21. Se tienen dos condensadores de 0,1 μF y 0,15 μF dispuestos en serie: se cargan a una tensión de 5 000 V. Determinar la carga de cada condensador. Se desconectan los condensadores de la fuente de alimentación y ellos entre sí y sin descargarse, se unen entre sí las armaduras de igual signo; determinar:

1. La diferencia de potencial entre las armaduras.

2. La carga de cada condensador.

Solución

El condensador equivalente a los dos en serie tiene una capacidad:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{0{,}1} + \frac{1}{0{,}15} = \frac{0{,}25}{0{,}015} = \frac{50}{3} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{3}{50}\ \mu\mathrm{F}$$

La carga del condensador equivalente es la misma que la que tienen los dos así acoplados, y toma el valor:

$$\boxed{Q = Q_1 = Q_2 = CV = \frac{3}{50} 10^{-6} \times 5\,000 = 3 \times 10^{-4}\ \mathrm{C}}$$

1) El condensador equivalente a la asociación de los dos en derivación tiene una capacidad:

$$C' = C_1 + C_2 = 0{,}25\ \mu\mathrm{F}$$

y su carga será:

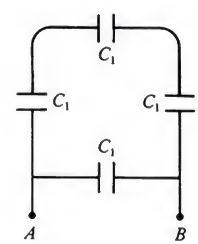
$$Q' = Q'_1 + Q'_2 = Q_1 + Q_2 = 6 \times 10^{-4}\ \mathrm{C}$$

la diferencia de potencial entre las armaduras del condensador equivalente es la misma que la que tienen los dos condensadores así acoplados; luego:

$$\boxed{V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{6 \times 10^{-4}}{0{,}25 \times 10^{-6}} = 2\,400\ \mathrm{V}}$$

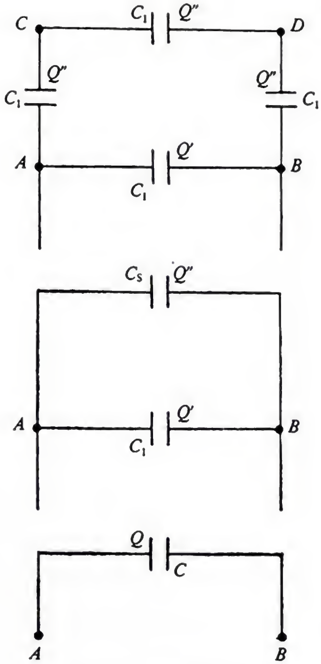
2)

$$\boxed{\begin{array}{l} Q'_1 = C_1 V' = 0{,}1 \times 10^{-6} \times 2\,400 = 24 \times 10^{-5}\ \mathrm{C} \\ Q'_2 = C_2 V' = 0{,}15 \times 10^{-6} \times 2\,400 = 36 \times 10^{-5}\ \mathrm{C} \end{array}}$$



Problema XXVII-22

Problema 22. Calcular la capacidad intercalada entre los puntos A y B. Cada uno de los condensadores es de 1 μF de capacidad. Establecemos entre A y B una diferencia de potencial de 300 V; calcular la carga, el potencial y la energía de cada uno de los condensadores y la energía de la asociación.



Problema XXVII-22-1.ª

Solución

La capacidad de los tres condensadores en serie es:

$$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 3 \quad \Rightarrow \quad C_S = \frac{1}{3}\ \mu\text{F}$$

luego la capacidad total es:

$$\boxed{C = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}\ \mu\text{F}}$$

La carga para los tres condensadores en serie es:

$$Q'' = V_{AB}\ C_S = 300\,\frac{1}{3} = 100\ \mu\text{C}$$

luego la tensión entre las armaduras de cada uno de ellos es:

$$V = V_{AC} = V_{CD} = V_{DB} = \frac{Q''}{C_1} = \frac{100}{1} = 100\ \text{V}$$

La energía de cada uno de éstos será:

$$U'' = \frac{1}{2}\,C_1V^2 = \frac{1}{2}\,10^{-6} \times 10^4 = 5 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

Para el condensador en paralelo:

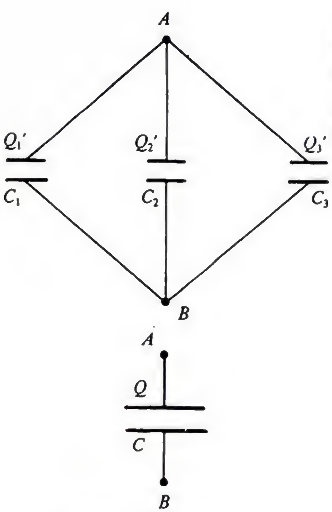
$$Q' = V_{AB}C_1 = 300\ \mu\text{C}$$

$$U' = \frac{1}{2}\,C_1V_{AB}^2 = \frac{1}{2}\,10^{-6} \times 9 \times 10^4 = 45 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

La energía del conjunto:

$$U = \frac{1}{2}\,CV_{AB}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{4}{3}\,10^{-6} \times 9 \times 10^4 = 6 \times 10^{-2}\ \text{J}$$

Problema 23. Desconectamos los condensadores cargados del problema anterior y los volvemos a conectar, todos en paralelo con las armaduras del mismo signo unidas. Calcular la carga, el voltaje y energía de cada uno de ellos y la energía de la asociación.



Problema XXVII-23

Solución

En el condensador equivalente:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 3Q'' + Q' = 3 \times 100 + 300 = 600\ \mu\text{C}$$

$$C = 4C_1 = 4\ \mu\text{F}$$

luego:

$$\boxed{V_1 - V_2 = \frac{Q}{C} = \frac{600}{4} = 150\ \text{V}}$$

con lo que se obtiene:

$$\boxed{Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = C_1(V_1 - V_2) = 150\ \mu\text{C}}$$

La energía de cada uno de ellos será:

$$\boxed{U_1 = \frac{1}{2}\,C_1(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\,10^{-6} \times 150^2 = 112{,}5 \times 10^{-4}\ \text{J}}$$

La energía del conjunto es:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\,C(V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\,4 \times 10^{-6} \times 150^2 = 450 \times 10^{-4}\ \text{J}}$$

Problema 24. Calcular la capacidad de un condensador esférico.

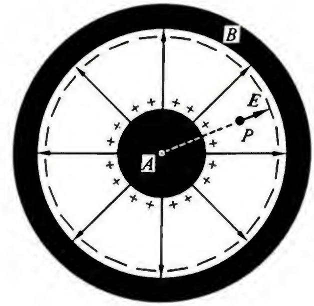
Solución

En un condensador esférico la esfera que envuelve a la pequeña (A) no crea campo en su interior; el único campo en el punto P es el producido por A, siendo su valor:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \int_A^B \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

luego:

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left[\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right]}}$$



Problema XXVII-24

Problema 25. Calcular la capacidad de un condensador cilíndrico.

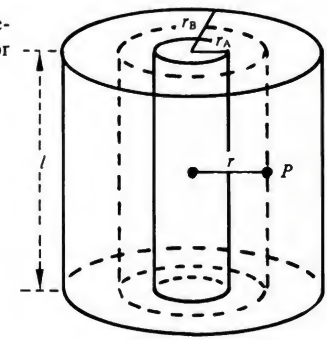
Solución

En un condensador cilíndrico el cilindro que envuelve al pequeño no crea campo en su interior; el único campo en el punto P es el producido por el cilindro interno, siendo su valor calculado por aplicación del teorema de Gaus:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Phi &= \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E 2\pi r l \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

y como la diferencia de potencial entre los cilindros es:

$$V_A - V_B = \int_A^B E dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{r_B}{r_A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{Q}{V_A - V_B} = 2\pi\varepsilon_0 \frac{l}{\ln\dfrac{r_B}{r_A}}}$$



Problema XXVII-25

Problema 26. Una balanza de brazos iguales está en equilibrio. Uno de sus dos platillos tiene una superficie de 200 cm^2 y está situado 1 cm por encima de una lámina metálica horizontal unida a tierra. Entre el platillo y la lámina se establece una diferencia de potencial de 100 V. Calcular:

1. La capacidad, en F, del condensador formado.

2. Los gramos que hay que cargar en el otro platillo para restablecer el equilibrio perdido.

3. La carga eléctrica, en C, que adquiere el platillo.

Solución

1) Llamando x a la distancia entre las armaduras:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{x} = \frac{200 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^{-2}} = \frac{10^{-9}}{18\pi}\ \text{F}}$$

2) y 3)

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} CV^2 \\ V &= \frac{Q}{C} \end{aligned}\right| \quad U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2 x}{2\varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}\,dx = F dx \quad \Rightarrow \quad F = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{Q = CV = \frac{10^{-9}}{18\pi}\,10^2 = \frac{10^{-7}}{18\pi}\ \mathrm{C}} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{10^{-14} \times 4\pi 9 \times 10^9}{18^2\pi^2 2 \times 200 \times 10^{-4}} = \frac{10^{-3}}{36\pi}\ \mathrm{N}$$

$$F = Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{F}{g} = \frac{10^{-3}}{36\pi 9{,}8}\ \mathrm{kg} = 9 \times 10^{-4}\ \mathrm{g}}$$

D) DIELECTRICOS

FORMULARIO

CONSTANTE DIELÉCTRICA DEL MEDIO Y PERMITIVIDAD:

$$\varepsilon' = \frac{C}{C_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0$$

SUSCEPTIBILIDAD ELÉCTRICA:

$$\varkappa = \varepsilon - \varepsilon_0$$

VECTOR POLARIZACIÓN:

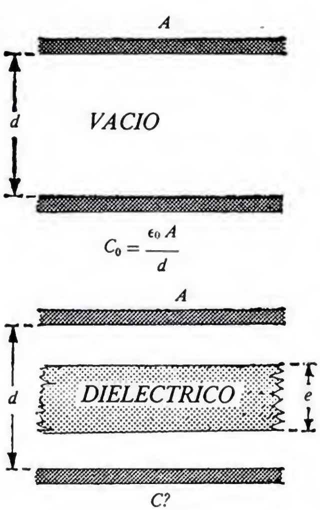
$$\boldsymbol{P} = \varkappa \boldsymbol{E}$$

VECTOR DESPLAZAMIENTO:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

LEY DE GAUS: PRIMERA ECUACIÓN DE MAXWELL:

$$\oint_A \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \rho$$



Problema XXVII-27

Problema 27. La capacidad de un condensador plano entre cuyas armaduras existe un dieléctrico es:

$$C = \frac{\varepsilon' \varepsilon_0 A}{d}$$

1. ¿Cuánto tendríamos que acercar las armaduras (Δd), suprimiendo el dieléctrico, para conservar la misma capacidad?
2. ¿Cuánto tendríamos que acercar las armaduras si suprimimos del interior del condensador una lámina planoparalela de espesor $e < d$ y paralela a las armaduras (ver figura) para conservar la misma capacidad?

Solución

1)

$$C = \frac{\varepsilon'\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta d = d\,\frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'}}$$

2) En este caso:

$$\boxed{\Delta d = e\;\frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'}}$$

Problema 28. Cada una de las armaduras de un condensador plano tiene una superficie de 200 cm^2; el dieléctrico es mica, con un espesor de 2 mm y una constante dieléctrica $\varepsilon' = 5$. Calcular:

1. La capacidad del condensador.
2. La carga de cada armadura cuando la tensión entre ambas sea de 1 000 V.
3. La intensidad del campo eléctrico entre las armaduras.
4. El gradiente de potencial de dicho campo.

Solución

1)

$$C = \frac{\varepsilon'\varepsilon_0 A}{d} = \frac{5 \times 200 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-3}} = \frac{10^{-7}}{72\pi}\ \text{F} = \frac{1}{720\pi}\ \mu\text{F}$$

2)

$$Q = CV = \frac{10^{-7}}{72\pi}\,10^3 = \frac{10^{-4}}{72\pi}\ \text{C} = \frac{100}{72\pi}\ \mu\text{C}$$

3) y 4)

$$E = -\,grad\,V = \frac{V}{d} = \frac{10^3}{2 \times 10^{-3}} = 5 \times 10^5\ \text{V/m}$$

Problema 29. Un condensador esférico está constituido por dos esferas metálicas concéntricas de radios $r = 3$ cm y $R = 8$ cm (radio interno de la superficie esférica hueca). Entre las armaduras existe una sustancia de constante dieléctrica 5. Calcular:

1. La capacidad del condensador.
2. Carga que adquiere al conectar sus armaduras a una tensión de 1 000 V.
3. Energía del condensador así cargado.

Solución

1) De la fórmula obtenida en el problema 24 obtenemos:

$$C = 4\pi\varepsilon'\varepsilon_0\ \frac{Rr}{R - r} = \frac{4\pi 5 \times 3 \times 8 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 (8 - 3) 10^{-2}} = 2{,}66 \times 10^{-11}\ \text{F}$$

2)

$$Q = CV = 2{,}66 \times 10^{-11} \times 10^3 = 2{,}66 \times 10^{-8}\ \text{C}$$

3)

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 2{,}66 \times 10^{-11} \times 10^6 = 1{,}33 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Problema 30. **1.** La superficie de las armaduras de un condensador plano es de 100 cm^2, y su distancia, de 3 mm. Se carga uniendo una de las armaduras al suelo y la otra a una tensión de 2 000 V. ¿Cuál es la carga del condensador?
2. Se desconecta de la tensión de carga, y sin descargar el condensador se llena el espacio entre ambas armaduras con una sustancia de constante dieléctrica 5. ¿Cuál es la nueva capacidad del condensador? ¿Cuál es la diferencia de potencial, entre ambas armaduras, en este segundo caso?

Solución

1)

$$Q = C_0V_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V_0 = \frac{100 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-3}} 2 \times 10^3 = \frac{20 \times 10^{-6}}{108\pi} \text{ C} = \frac{20}{108\pi} \mu\text{C}$$

2) Al no variar la carga del condensador y la capacidad de multiplicarse por 5, el potencial quedará dividido por 5; en efecto:

$$C = \varepsilon' C_0 = \frac{\varepsilon'\varepsilon_0 A}{d} = \frac{5 \times 100 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 3 \times 10^{-3}} = \frac{5}{108\pi} 10^{-8} \text{ F} = \frac{5 \times 10^{-2}}{108\pi} \mu\text{F}$$

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q}{\varepsilon' C_0} = \frac{V_0}{\varepsilon'} = \frac{2 \times 10^3}{5} = 400 \text{ V}$$

Problema 31. Un condensador está formado por dos láminas paralelas de 150 cm^2 de superficie cada una y separadas entre sí 2 mm. Se carga el condensador con una diferencia de potencial de 1 000 V. Se pide:
1. La carga del condensador y energía almacenada.
2. Si una vez cargado y aislado de la tensión de carga se llena el espacio entre las armaduras con una sustancia de constante dieléctrica 3, ¿cuál es la nueva capacidad del condensador?
3. En las condiciones de la pregunta 2, ¿cuál es la nueva diferencia de potencial entre las armaduras?

Solución

1)

$$\boxed{\begin{aligned} Q &= C_0V_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} V_0 = \frac{150 \times 10^{-4} \times 10^3}{4\pi 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-3}} = 6{,}6 \times 10^{-8} \text{ C} \\ U &= \frac{1}{2} C_0V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{150 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-3}} 10^6 = 3{,}3 \times 10^{-5} \text{ J} \end{aligned}}$$

2)

$$\boxed{C = \varepsilon' C_0 = \frac{3 \times 150 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-3}} = 2 \times 10^{-10} \text{ F}}$$

3) Al llenar el espacio entre las armaduras Q permanece constante, como la capacidad se multiplica por ε', el potencial quedará dividido por ε'.

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{Q}{C} = \dfrac{Q}{\varepsilon' C_0} \\ \\ V_0 = \dfrac{Q}{C_0} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V = \dfrac{V_0}{\varepsilon'} = \dfrac{10^3}{3}\ \text{V}}$$

Problema 32. Disponemos de 16 láminas de aluminio y 15 de vidrio, siendo la superficie de las mismas de $15 \times 30\ \text{cm}^2$, el espesor de las de vidrio de 1 mm y el poder inductor específico de este último 5. Calcular:

1. La capacidad y carga adquirida por el condensador formado por dos láminas de aluminio y una de vidrio intercalada entre aquéllas, cuando se les somete a una tensión de 1 000 V.

2. La capacidad del sistema formado por las 15 láminas de vidrio intercaladas entre las 16 de aluminio, en las que las pares e impares de aluminio se han conectado entre sí, respectivamente.

3. Carga y diferencia de potencial correspondiente a cada condensador unitario, cuando las conexiones generales del sistema anterior se someten a la tensión de 1 000 V.

Solución

1)

$$C_1 = \frac{\varepsilon' \varepsilon_0 A}{d} = \frac{5 \times 15 \times 30 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^{-3}} = \frac{225}{36\pi}\, 10^{-9} = 2 \times 10^{-9}\ \text{F}$$

$$Q_1 = C_1 V = 2 \times 10^{-6} C = 2\ \mu\text{C}$$

2) Constituye una asociación en paralelo de 15 condensadores:

$$C = 15 C_1 = 30 \times 10^{-9}\ \text{F}$$

3) Al estar conectados en paralelo, el potencial en cada uno de ellos es el de las conexiones generales, 10^3 V, y la carga que adquirirán con tal potencial ya la hemos calculado:

$$Q_1 = 2\ \mu\text{C}$$

Problema 33. Se tiene un condensador plano cuya superficie de las armaduras es de $200\ \text{cm}^2$ cada una; la separación entre ellas es de 1 mm, habiendo entre ambas un dieléctrico cuyo espesor es de 0,6 mm y constante dieléctrica 4. Sabiendo que la diferencia de potencial entre las armaduras es de 2 000 V, determinar:

1. La capacidad de este condensador.

2. La carga del mismo.

3. La energía eléctrica acumulada en él.

Solución

1) Para suprimir el dieléctrico (quedando vacío en el interior del condensador) conservando la misma capacidad (ver problema número 27) hay que disminuir la distancia entre las armaduras:

$$\Delta d = e\, \frac{\varepsilon' - 1}{\varepsilon'} = 0{,}6\, \frac{4 - 1}{4} = 0{,}45\ \text{mm}$$

la capacidad será, pues:

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d - \Delta d} = \frac{200 \times 10^{-4}}{4\pi 9 \times 10^9 (1 - 0{,}45) 10^{-3}} = 3{,}2 \times 10^{-10}\ \text{F}}$$

2)

$$\boxed{Q = CV = 3{,}2 \times 10^{-10} \times 2 \times 10^3 = 6{,}4 \times 10^{-7}\ \text{C}}$$

3)

$$\boxed{U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} 3{,}2 \times 10^{-10} \times 4 \times 10^6 = 6{,}4 \times 10^{-4}\ \text{J}}$$

Problema 34. Entre las armaduras de un condensador plano existe una distancia de 5 mm. Cargamos el condensador estando vacío el espacio entre sus armaduras a una tensión de 4 000 V; desconectamos de la fuente de alimentación e introducimos un dieléctrico. Medida la nueva diferencia de potencial existente entre las armaduras nos da 800 V. Calcular:

1. El coeficiente dieléctrico del material introducido.
2. La susceptibilidad eléctrica.
3. La polarización en el dieléctrico.
4. El desplazamiento en el dieléctrico.

Solución

1) Al introducir el dieléctrico la carga del condensador es la misma que cuando había vacío entre sus armaduras:

$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= C_0 V_0 = CV \\ C_0 &= \frac{\varepsilon_0 A}{d} \\ C &= \frac{\varepsilon' \varepsilon_0 A}{d} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\varepsilon' = \frac{C}{C_0} = \frac{V_0}{V} = \frac{4\,000}{800} = 5}$$

2)

$$\varkappa = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon' \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon' - 1) = \frac{4}{4\pi 9 \times 10^9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} P &= \varkappa E \\ E &= \frac{V}{d} \end{aligned}\right| \boxed{P = \varkappa \frac{V}{d} = \frac{4 \times 800}{4\pi 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-3}}\ \text{C/m} = 5{,}7 \times 10^{-6}\ \text{C/m}}$$

4)

$$\boxed{D = \varepsilon E = \varepsilon' \varepsilon_0 E = \varepsilon' \varepsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{5 \times 800}{4\pi 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-3}}\ \text{C/m}^2 = 7{,}1 \times 10^{-6}\ \text{C/m}^2}$$

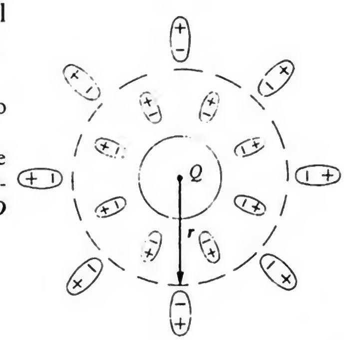
Problema 35. El coeficiente dieléctrico del agua es 81. Calcular la permitividad y la susceptibilidad eléctricas del agua.

Solución

$$\varepsilon = \varepsilon' \varepsilon_0 = \frac{81}{4\pi 9 \times 10^9} = \frac{9}{4\pi} 10^{-9} = 0{,}71 \times 10^{-9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

$$\varkappa = \varepsilon - \varepsilon_0 = \varepsilon' \varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon' - 1) = \frac{80}{4\pi 9 \times 10^9} = 0{,}7 \times 10^{-9} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

Problema 36. Consideremos un ion esférico de carga Q sumergido en un líquido dieléctrico lineal homogéneo e isótropo, siendo ε la permitividad dieléctrica del medio. Calcúlese el valor del campo eléctrico a una distancia r del centro del ion.



Problema XXVII-36

Solución

Las moléculas del líquido se orientarán en la forma indicada en la figura, puesto que el campo que crea el ion tiene simetría radial.

Si tratamos de calcular el campo, aplicando directamente el teorema de Gauss a una superficie esférica de radio r, no conseguimos nada, pues desconocemos el valor de la carga ligada encerrada en ella; pero sí podemos aplicarlo al vector $\boldsymbol{D}$, puesto que la integral de superficie de $\boldsymbol{D}$ es igual a la carga libre encerrada, que en este caso es la del ion:

$$\oint \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = 4\pi r^2 D = Q \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D} = \frac{Q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}$$

y como:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \quad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^3}\boldsymbol{r}}$$

Problema 37. La superficie de cada una de las dos armaduras de un condensador plano es de 100 cm^2, y su distancia, 1 cm. Se carga uniendo una de sus armaduras al suelo y la otra a una tensión de 3 000 V. Se desconecta de la tensión de carga y, sin descargar el condensador, se llena el espacio entre ambas armaduras con dos dieléctricos, uno de espesor 6 mm y constante dieléctrica 6, y el otro de 4 mm y constante dieléctrica 4. Calcular:

1. La carga del condensador.
2. El desplazamiento eléctrico.
3. El campo eléctrico en cada dieléctrico.
4. Diferencia de potencial entre las armaduras del condensador con los dieléctricos en su interior.
5. Su capacidad.

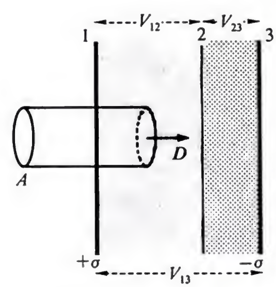
Solución

1)

$$\boxed{Q = C_0V_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}V_0 = \frac{100 \times 10^{-4}\ 3\,000}{4\pi 9 \times 10^9\ 10^{-2}} = \frac{1}{12\pi}\ \mu\text{C}}$$

2)

$$\oint_A \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = Q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{dQ}{dA} = \sigma \quad \Rightarrow \boxed{D = \frac{Q}{A} = \frac{10^{-6}}{12\pi 100 \times 10^{-4}} = \frac{10^{-4}}{12\pi}\ \text{C/m}^2}$$



Problema XXVII-37

3) En el primer dieléctrico:

$$\boxed{E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{10^{-4}\ 4\pi 9 \times 10^9}{12\pi 6} = \frac{1}{2}\ 10^5\ \text{V/m}}$$

En el segundo dieléctrico:

$$\boxed{E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{10^{-4}\ 4\pi 9 \times 10^9}{12\pi 4} = \frac{3}{4}\ 10^5\ \text{V/m}}$$

4)

$$\left.\begin{aligned} V_{12} &= E_1e_1 = \frac{1}{2}\ 10^5\ 6 \times 10^{-3} = 300\ \text{V} \\ V_{23} &= E_2e_2 = \frac{3}{4}\ 10^5\ 4 \times 10^{-3} = 300\ \text{V} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{V_{13} = V_{12} + V_{23} = 600\ \text{V}}$$

5)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{13}} = \frac{10^{-6}}{12\pi 600} = \frac{1}{72\pi}\ 10^{-8}\ \text{F}}$$

Capítulo XXVIII

CORRIENTE ELECTRICA CONTINUA

A) RESISTENCIA

FORMULARIO

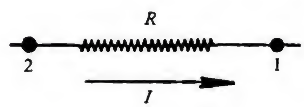
INTENSIDAD:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

RESISTENCIA:

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad R_{t'} = R_t(1 + K\Delta t)$$

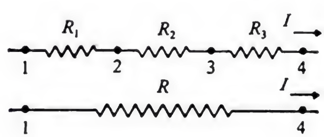
LEY DE OHM A LOS EXTREMOS DE UNA RESISTENCIA:



$$V_1 - V_2 = IR$$

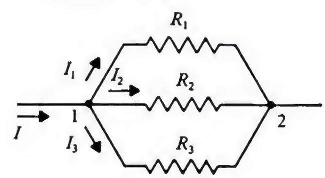
RESISTENCIAS EN SERIE O DERIVACIÓN:

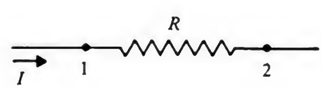
SERIE



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

DERIVACIÓN





$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3$$

ENERGÍA ELÉCTRICA CONSUMIDA POR UNA RESISTENCIA:

$$W = (V_1 - V_2)It = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t = I^2Rt$$

POTENCIA:

$$P = (V_1 - V_2)It = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} = I^2Rt$$

Problema 1. Se ha encontrado que cuando la diferencia de potencial entre los extremos de una resistencia es de 10 V, la intensidad de la corriente es de 2 A. ¿Cuánto valdría la intensidad si la diferencia de potencial fuese de 100 V? ¿Cuál será la diferencia de potencial si la intensidad de la corriente es de 0,1 A? ¿Cuál el valor de la resistencia?

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2R \\ 100 = I'R \end{array}\right| \Rightarrow \frac{10}{100} = \frac{2}{I'} \Rightarrow \boxed{I' = 20 \text{ A}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} 10 = 2R \\ V_1 - V_2 = 0{,}1R \end{array}\right| \frac{10}{V_1 - V_2} = \frac{2}{0{,}1} \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = 0{,}5 \text{ V}}$$

3)

$$\boxed{R = \frac{10}{2} = 5\ \Omega}$$

Problema 2. Se trata de sustituir una conducción eléctrica de hilo de cobre por hilo de aluminio de la misma longitud, de tal suerte que ambas tengan la misma resistencia óhmica. Calcular:

1. La relación entre las secciones de los hilos.

2. La relación entre los pesos del cobre y del aluminio.

DATOS: Resistividad del cobre: $\rho = 1{,}8 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$. Resistividad del aluminio: $\rho = 2{,}6 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$. Densidad del cobre: $d = 8{,}93 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Densidad del aluminio: $d = 2{,}70 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Solución

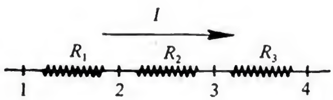
1)

$$\left.\begin{array}{l} R = \rho_{Cu} \dfrac{l}{S_{Cu}} \\ R = \rho_{Al} \dfrac{l}{S_{Al}} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\gamma_1 = \frac{S_{Cu}}{S_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} = \frac{1{,}8 \times 10^{-6}}{2{,}6 \times 10^{-6}} = 0{,}692}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} M_{Cu} = lS_{Cu}d_{Cu} \\ M_{Al} = lS_{Al}d_{Al} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\gamma_2 = \frac{M_{Cu}}{M_{Al}} = \gamma_1 \frac{d_{Cu}}{d_{Al}} = 0{,}692 \frac{8{,}93}{2{,}7} = 2{,}289}$$

Problema 3. Un circuito eléctrico está formado por tres alambres de igual longitud y del mismo material unidos en serie. Los tres alambres tienen distinta sección: 1 mm^2, 2 mm^2 y 3 mm^2. La diferencia de potencial entre los extremos del circuito es de 12 V. Determinar la caída de tensión que tiene lugar en cada uno de los alambres.



Problema XXVIII-3

Solución

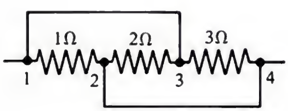
$$R = R_1 + R_2 + R_3 = \rho l \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]$$

$$I = \frac{V_1 - V_4}{R} = \frac{V_1 - V_4}{\rho l \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]}$$

$$V_1 - V_2 = IR_1 = \frac{V_1 - V_4}{\rho l \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]} \rho l \frac{1}{S_1} = \frac{V_1 - V_4}{S_1 \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]} = \frac{72}{11} \text{ V}$$

$$V_3 - V_4 = IR_2 = \frac{V_1 - V_4}{S_2 \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]} = \frac{36}{11} \text{ V}$$

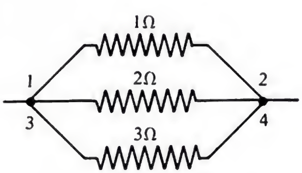
$$V_2 - V_3 = IR_3 = \frac{V_1 - V_4}{S_3 \left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_3}\right]} = \frac{24}{11} \text{ V}$$



Problema XXVIII-4

Problema 4. Los conductores que unen las resistencias de la figura los supondremos de resistencia despreciable. Calcular la resistencia equivalente del conjunto.

Solución



Problema XXVIII-4-1.ª

Al estar unidos los puntos 1 y 4, tendrán idéntico potencial. También son iguales los potenciales de los puntos 2 y 4; por tanto, el conjunto equivalente es el representado en la figura, cuya resistencia total será:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{6}{11} \ \Omega}$$

Problema 5. La resistencia de una lámpara eléctrica de 120 V, 100 W es 10 veces mayor cuando la lámpara está encendida que cuando está apagada. Determinar la resistencia en un caso y en otro, así como el coeficiente de temperatura si la temperatura de incandescencia del filamento es 200° C.

Solución

$$P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \boxed{R_c = \frac{120^2}{100} = 144 \ \Omega} \\[2ex] \boxed{R_a = \frac{144}{10} = 14{,}4 \ \Omega} \end{array} \right.$$

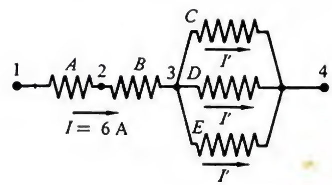
Suponiendo que la temperatura del filamento apagado es 0° C:

$$R_c = R_a(1 + K\Delta t) \quad \Rightarrow \quad 144 = 14{,}4(1 + 200K) \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 0{,}045°\ C^{-1}}$$

Problema 6. Tenemos una instalación por la que circula una corriente de 6 A que está formada por dos conductores: *A* y *B*, colocados en serie, y a continuación tres conductores, *C, D* y *E*, en derivación; todos ellos de 4 Ω de resistencia. Calcular:

1. La resistencia total de la instalación.
2. La diferencia de potencial entre los extremos del conductor *A*.
3. La diferencia de potencial entre los extremos del conductor *C*.

Solución



Problema XXVIII-6

1) La equivalente a *C, D* y *E* es:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{4}{3}\ \Omega$$

la total será:

$$\boxed{R_T = 4 + 4 + \frac{4}{3} = \frac{28}{3}\ \Omega}$$

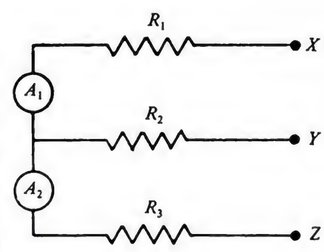
2)

$$\boxed{V_1 - V_2 = IR = 6 \times 4 = 24\ V}$$

3) La intensidad que circula por el conductor *C* (igual a la que circula por *D* y *E*) es:

$$I' = \frac{6}{3} = 2\ A \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_3 - V_4 = I'R = 2 \times 4 = 8\ V}$$

Problema 7. Tres resistencias, R_1, R_2, R_3, y dos amperímetros, A_1 y A_2, de resistencia despreciable, se montan como indica el adjunto esquema. Se pide: **1.** Calcular el valor de cada una de las tres resistencias conociendo los siguientes datos: *a)* Si se establece entre *X* e *Y* una diferencia de potencial de 100 V, la corriente que circula es de 2 A. *b)* Si se establece en *Y* y *Z* la tensión necesaria para que la intensidad sea de 3 A, entonces la potencia total disipada en virtud del efecto Joule es de 630 W. *c)* Si se establece entre *X* y *Z* una diferencia de potencial de 150 V, la potencia disipada es de 375 W.
2. ¿Qué marcan en cada uno de los tres casos anteriores los dos amperímetros?



Problema XXVIII-7

Solución

1)

a)

$$100 = 2(R_1 + R_2) \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_2 = 50\ \Omega \qquad \boxed{R_1 = 20\ \Omega}$$

b)

$$630 = 9(R_2 + R_3) \quad \Rightarrow \quad R_2 + R_3 = 70\ \Omega \qquad \boxed{R_2 = 30\ \Omega}$$

c)

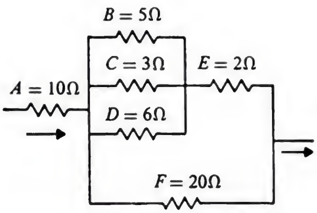
$$375 = \frac{150^2}{R_1 + R_3} \quad \Rightarrow \quad R_1 + R_3 = 60\ \Omega \qquad \boxed{R_3 = 40\ \Omega}$$

2)

a) $\boxed{\begin{array}{l} I_1 = 2 \text{ A} \\ I_2 = 0 \text{ A} \end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l} I_1 = 0 \text{ A} \\ I_2 = 3 \text{ A} \end{array}}$

c) $\boxed{I_1 = I_2 = \dfrac{150}{20 + 40} = 2{,}5 \text{ A}}$



Problema XXVIII-8

Problema 8. En el circuito de la figura la caída de tensión a través de la resistencia *A* es de 100 V. Encontrar:

1. La intensidad que atraviesa cada una de las resistecias *B, C, D*.
2. La caída de tensión en la resistencia *B*.
3. La potencia disipara en la resistencia *F*.

Solución

1)

$$I_A = \frac{V - V'}{R} = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

Resistencia equivalente a *B*, *C* y *D*:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{21}{30} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{10}{7}\ \Omega$$

Tenemos así una derivación de dos resistencias, la superior:

$$R_2 = R_1 + E = \frac{10}{7} + 2 = \frac{24}{7}\ \Omega$$

y la inferior:

$$F = 20\ \Omega$$

Como la intensidad que circula por la superior es la misma que en *E*, la llamamos I_E:

$$\left. \begin{array}{l} I_E + I_F = 10 \\[2ex] I_E \dfrac{24}{7} = I_F 20 \quad \Rightarrow \quad 6I_E = 35I_F \end{array} \right| \begin{array}{l} I_E = \dfrac{350}{41} \text{ A} \\[2ex] I_F = \dfrac{60}{41} \text{ A} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} I_E = I_B + I_C + I_D \\[2ex] I_B B = I_C C = I_D D \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} I_B + I_C + I_D = \dfrac{350}{41} \\[2ex] 5I_B = 3I_C = 6I_D \end{array} \right| \begin{array}{l} \boxed{I_B = \dfrac{700}{287} \text{ A}} \\[1ex] \boxed{I_C = \dfrac{3\,500}{861} \text{ A}} \\[1ex] \boxed{I_D = \dfrac{1\,750}{861} \text{ A}} \end{array}$$

2)

$$\boxed{(V - V')_B = I_B B = \frac{700}{287}5 = \frac{3\,500}{287}\ \mathrm{V}}$$

3)

$$P_F = I_F^2 F = \frac{3\,600}{1\,681}20 = \frac{72\,000}{1\,681}\ \mathrm{W} \Rightarrow \boxed{P_F = 42{,}8\ \mathrm{W}}$$

Problema 9. Sabiendo que un hilo metálico de 1 m de longitud y 1 mm de diámetro tiene una resistencia de 2 Ω, calcular:

1. La resistencia de otro hilo del mismo metal de 2 m de longitud y 0,6 mm de diámetro.

2. En el caso de que por el conductor a que se refiere la cuestión anterior circule una corriente de 5 A, calcular la energía consumida por unidad de tiempo expresada en kW y el calor disipado al cabo de media hora, expresado en cal.

Solución

1)

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{\pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2} \qquad R_2 = \rho \frac{l_2}{\pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{R_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{0{,}6}{1}\right)^2$$

$$\boxed{R_2 = \frac{100}{9}\ \Omega}$$

2)

$$P = I^2R = 25 \times \frac{100}{9}\ \mathrm{W} \Rightarrow \boxed{P = \frac{2{,}5}{9}\ \mathrm{kW}}$$

$$\boxed{Q = 0{,}24W = 0{,}24Pt = 0{,}24 \times \frac{2\,500}{9} \times 30 \times 60\ \mathrm{cal} = 120\,000\ \mathrm{cal}}$$

Problema 10. Una cafetera eléctrica comienza a hervir 3 min después de haberla conectado a la red. La calefacción procede de un arrollamiento de alambre de 6 m de longitud. ¿Cómo modificaríamos este elemento para que la cafetera comenzase a hervir a los 2 min de conectada? (Despreciar las pérdidas de calor al exterior.)

Solución

$$l_1 = 6\ \mathrm{m} \qquad l_2\ ?$$

$$t_1 = 3^{\mathrm{m}} \qquad t_2 = 2^{\mathrm{m}}$$

La tensión en la red y la cantidad de calor comunicada a la cafetera son las mismas.

$$Q = 0{,}24\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_1}t_1 = 0{,}24\frac{(V_1 - V_2)^2}{R_2}t_2 \Rightarrow \frac{t_1}{R_1} = \frac{t_2}{R_2}$$

$$R_1 = \rho\frac{l_1}{S} \qquad R_2 = \rho\frac{l_2}{S} \Rightarrow \frac{R_1}{l_1} = \frac{R_2}{l_2}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow l_2 = \frac{t_2}{t_1}l_1 = \frac{2}{3}6 = 4\ \mathrm{m}$$

$\boxed{\text{Cortaremos 2 m a la resistencia que teníamos.}}$

Problema 11. En un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 10 g hay una mezcla de 20 g de hielo y 90 g de agua. Dentro del calorímetro se encuentra una resistencia de 10 Ω por la que pasa una corriente de 2 A. Determinar:
1. El tiempo que ha de estar pasando la corriente para que se funda el hielo, sin que varíe la temperatura.
2. La misma pregunta para que la temperatura final sea de 50° C.
3. Energía consumida en este segundo caso expresada en W · h.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} Q = 0{,}24\,W \\ W = I^2Rt \end{array}\right| \quad 20 \times 80 = 0{,}24 \times 4 \times 10t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 167 \text{ s}}$$

2)

$$20 \times 80 + (20 + 10 + 90)50 = 0{,}24 \times 4 \times 10t' \quad \Rightarrow \quad \boxed{t' = 792 \text{ s}}$$

3)

$$W = QJ = (20 \times 80 + 120 \times 50)4{,}18 = 31\,768 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = \frac{31\,768}{3\,600} = 8{,}8 \text{ W} \cdot \text{h}}$$

Problema 12. Una masa de agua contenida en un matraz se somete a ebullición mediante el calor suministrado por una resistencia eléctrica por la que circula una corriente de 2,5 A, siendo la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia de 24 V. El vapor desprendido durante 5 min desde que se inicia la ebullición se condensa en el exterior y se pesa, obteniéndose 7,0 g de agua.
1. Calcular el calor de vaporización del agua que se obtendría con estos datos.
2. Sabiendo que el verdadero valor del calor de vaporización del agua es de 540 cal/g, determinar las pérdidas de calor por minuto existentes entre el matraz y el exterior.
3. ¿Qué masa de agua se hubiera obtenido de no existir dichas pérdidas?

Solución

1)

$$Q = 0{,}24(V_1 - V_2)It = Ml \quad \Rightarrow \quad 0{,}24 \times 24 \times 2{,}5 \times 5 \times 60 = 7l \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = 617{,}1 \text{ cal/g}}$$

2)

$$\boxed{P = \frac{Q}{t} = \frac{M(l - l_r)}{t} = \frac{7(617{,}1 - 540)}{5} = 107{,}9 \text{ cal/min}}$$

3)

$$0{,}24(V_1 - V_2)It = M'l_r \quad \Rightarrow \quad 0{,}24 \times 24 \times 2{,}5 \times 5 \times 60 = M540 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 8 \text{ g}}$$

Problema 13. En un recipiente aislado térmicamente hay 3 l de agua a la temperatura de 15° C. Se echa en él un trozo de hielo de 1 kg enfriado previamente a −10° C. Por un hilo conductor de 10 Ω de resistencia y de capacidad calorífica despreciable introducido en la mezcla se hace pasar una corriente eléctrica, conectando el conductor a una tensión de 220 V. Dígase cuánto tiempo habrá de

estar circulando la corriente para que la mezcla indicada alcance la temperatura de ebullición a la presión normal. Se desea saber la cantidad de vapor de agua sobrecalentado a 120° C que se necesitaría para producir el mismo efecto que la corriente. ($c_h = 0{,}5$ cal · g^{-1} · °C^{-1}; $c_v = 0{,}45$ cal · g^{-1} · °C^{-1}; $l_f = 80$ cal · g^{-1}; $l_v = 540$ cal · g^{-1}.)

Solución

1)

$$Q = 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t = 0{,}24 \frac{220^2}{10} t = 1\,161{,}6t$$

$$Q = 3 \times 10^3(100 - 15) + 10^3 \times 0{,}5 \times 10 + 10^3 \times 80 + 10^3 \times 100 = 44 \times 10^4 \text{ cal}$$

igualando:

$$\boxed{t = \frac{44 \times 10^4}{1\,161{,}6} = 378 \text{ s}}$$

2)

$$M0{,}45(120 - 100) + M540 = 440\,000 \quad \Rightarrow \boxed{M = 801 \text{ g}}$$

Problema 14. Queremos construir un cazo eléctrico que en 5 min sea capaz de hacer hervir 1 l de agua colocada inicialmente a 15° C. Calcular:

1. La potencia eléctrica necesaria (suponiendo que todo el calor se utiliza íntegramente en calentar el agua).

2. La intensidad de la corriente cuando se conecte a una red de 110 V.

3. El valor de la resistencia.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} Q = Mc\Delta t = 10^3(100 - 15) = 85 \times 10^3 \text{ cal} \\ Q = 0{,}24W = 0{,}24P\tau = 0{,}24P5 \times 60 \end{array}\right| \Rightarrow \; 85 \times 10^3 = 0{,}24P5 \times 60 \quad \Rightarrow \boxed{P = 1\,180 \text{ W}}$$

2)

$$P = (V_1 - V_2)I \quad \Rightarrow \quad 1\,180 = 110I \quad \Rightarrow \boxed{I = 10{,}7 \text{ A}}$$

3)

$$P = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad 1\,180 = \frac{110^2}{R} \quad \Rightarrow \boxed{R = 10{,}2\ \Omega}$$

Problema 15. Mediante una resistencia eléctrica de 10 Ω conectada a 120 V se desea calentar 1 200 g de un líquido de calor específico 0,95 cal/g °C. Si se ha partido de una temperatura de 10° C:

1. ¿A qué temperatura se encontrará el líquido a los 5 min de iniciar el paso de corriente?

2. ¿Qué tiempo tardaría en alcanzar su temperatura de ebullición $t_e = 120°$ C?

3. ¿Cómo se modificaría este último resultado si el calentador tuviese unas pérdidas caloríficas del 25 %?

Solución

1)

$$Q = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\,\tau = Mc\Delta t \;\Rightarrow\; 0{,}24\,\frac{120^2}{10}\,5 \times 60 = 1\,200 \times 0{,}95(t - 10) \;\Rightarrow\; \boxed{t = 101°\ \mathrm{C}}$$

2)

$$0{,}24\,\frac{120^2}{10}\,\tau_1 = 1\,200 \times 0{,}95(120 - 10) \;\Rightarrow\; \boxed{\tau_1 = 363\ \mathrm{s}}$$

3)

$$0{,}24\,\frac{120^2}{10}\,\tau_2 0{,}75 = 1\,200 \times 0{,}95(120 - 10) \;\Rightarrow\; \boxed{\tau_2 = 484\ \mathrm{s}}$$

Problema 16. El vaso de un calorímetro de latón (calor específico: 0,0939) pesa 50 g y contiene 205,3 g de agua que se calienta de 15° a 76° C, mediante una corriente de 1,3 A y 110 V en 7 min. Calcular:

1. Equivalente en agua del vaso calorimétrico.
2. La potencia y energía eléctrica.
3. Cantidad de calor producido por la corriente y su rendimiento.

Solución

1)

$$\boxed{E = Mc = 50 \times 0{,}0939 = 4{,}695\ \mathrm{g}}$$

2)

$$\boxed{\begin{array}{l} P = (V_1 - V_2)I = 110 \times 1{,}3 = 143\ \mathrm{W} \\ W = P\tau = 143 \times 7 \times 60 = 60\,060\ \mathrm{J} \end{array}}$$

3)

$$\boxed{Q = 0{,}24W = 0{,}24 \times 60\,060 = 14\,414{,}4\ \mathrm{cal}}$$

El calor aprovechado es:

$$Q' = (M + E)\Delta t = (205{,}3 + 4{,}695)\,(76 - 15) = 12\,810\ \mathrm{cal}$$

$$\eta = \frac{Q'}{Q} = \frac{12\,810}{14\,414{,}4} = 0{,}89 \;\Rightarrow\; \boxed{89\ \%}$$

Problema 17. Se tiene un aparato eléctrico de destilar éter, el cual permite destilar 900 g de éter por hora, empleando una fuente de corriente continua de 220 V. El hilo metálico de calefacción del aparato tiene 0,15 mm de diámetro y 110 $\mu\Omega \cdot$ cm de resistividad. Se admite que ésta no varía con la temperatura y que las pérdidas de calor en el aparato son despreciables. Se pide:

1. Potencia consumida por el aparato.
2. Intensidad de la corriente en el circuito de calefacción.
3. Resistencia de este circuito.
4. Longitud del hilo de calefacción.
5. Coste de la destilación de 9 kg de éter.

DATOS: Calor de evaporación del éter a la temperatura de ebullición: 91 cal/g. Precio de la energía eléctrica: 6 ptas el kW · h.

Solución

1) La energía consumida en la destilación de 900 g de éter es:

$$W = 4{,}18Q = 4{,}18Ml = 4{,}18 \times 900 \times 91 = 342\ 342 \text{ J}$$

luego:

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{342\ 342}{3\ 600} = 95 \text{ W}}$$

2)

$$P = I(V_1 - V_2) \quad \Rightarrow \boxed{I = \frac{95}{220} = 0{,}43 \text{ A}}$$

3)

$$\boxed{R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{220}{0{,}43} = 511{,}6\ \Omega}$$

4)

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \boxed{l = \frac{RA}{\rho} = \frac{511{,}6 \times 10^{-2}\pi \dfrac{0{,}15^2}{4}}{110 \times 10^{-6}} \text{ cm} = 821 \text{ cm}}$$

5) El tiempo para destilar 9 kg de éter es 10 h; luego la energía gastada será:

$$W = Pt = 95 \times 10^{-3} \times 10 = 0{,}95 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

luego el coste será:

$$\boxed{C = 0{,}95 \times 6 = 5{,}7 \text{ ptas}}$$

Problema 18. Se construye un calentador eléctrico arrollando un hilo en espiral, y se calcula de forma que funcione bajo una diferencia de potencial de 110 V, con una potencia de 550 W. Calcúlese:

1. La resistencia del calentador y la intensidad de corriente que lo atraviesa.
2. El coste de la energía que consume cada 24 h, si el kW · h se cobra a 6 ptas.
3. La cantidad de hielo a $-5°$ C que podría convertirse en agua líquida a 80° C con el calor desarrollado en ella en un tiempo de 3 h.

Solución

1)

$$P = (V - V')I = I^2R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 550 = \dfrac{110^2}{R} \quad \Rightarrow \boxed{R = 22\ \Omega} \\[2ex] 550 = 110I \quad \Rightarrow \boxed{I = 5 \text{ A}} \end{array} \right.$$

2)

$$W = Pt = 0{,}55 \times 24 \text{ kW} \cdot \text{h} = 13{,}2 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \boxed{C = 13{,}2 \times 6 = 79{,}2 \text{ ptas}}$$

3)

$$Q = 0{,}24W = 0{,}24Pt \quad \Rightarrow \quad 0{,}24 \times 550 \times 3 \times 3\ 600 = M[0{,}5 \times 5 + 80 + 80] \quad \Rightarrow \boxed{M = 8\ 773 \text{ g}}$$

Problema 19. Se utiliza un cazo eléctrico de 60 Ω de resistencia y cuyo rendimiento es del 80 %. Calcular el tiempo necesario para hacer hervir 1 250 cm^3 de agua a 20° C, cuando se conecte el cazo a una red de 230 V. ¿Cuál será el costo de la operación, sabiendo que el precio de la unidad de consumo (kW · h) es de 6 ptas?

Solución

Número de calorías aprovechadas en hacer hervir el agua:

$$Q = Mc\Delta t = 1\,250 \times 80 \text{ cal}$$

El calor que proporciona el cazo es:

$$Q = \frac{Mc\Delta t}{\eta} = \frac{1\,250 \times 80}{0{,}8} = 125\,000 \text{ cal}$$

esta cantidad de calor es:

$$Q = 0{,}24\,\frac{(V - V')^2}{R}\,\tau \;\Rightarrow\; 125 \times 10^3 = 0{,}24\,\frac{230^2}{60}\,\tau \;\Rightarrow\; \boxed{\tau = 590 \text{ s}}$$

$$W = \frac{(V - V')^2}{R}\,\tau = \frac{230^2 \times 590}{60 \times 10^3 \times 3\,600} = 0{,}14 \text{ kW} \cdot \text{h} \;\Rightarrow\; \boxed{C = 0{,}14 \times 6 = 0{,}84 \text{ ptas}}$$

Problema 20. Un cazo eléctrico recibe corriente a una tensión de 120 V y en 24 min eleva la temperatura de 200 g de hielo de −20° C a 90° C. En el supuesto que el rendimiento térmico del cazo sea del 60 %, calcular:

1. La potencia consumida, en W.
2. La intensidad de la corriente.
3. La resistencia eléctrica del cazo.
4. Lo que ha costado la energía eléctrica consumida, sabiendo que el kW · h cuesta 6 ptas.

Calor específico del hielo: 0,5 cal/g °C. Calor de fusión del hielo: 80 cal/g.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \eta W = QJ \\ W = P\tau \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{P = \frac{QJ}{\eta\tau} = \frac{200(0{,}5 \times 20 + 80 + 90)4{,}18}{0{,}6 \times 24 \times 60}\text{W} = 174 \text{ W}}$$

2)

$$P = (V_1 - V_2)I \;\Rightarrow\; 174 = 120I \;\Rightarrow\; \boxed{I = 1{,}45 \text{ A}}$$

3)

$$V_1 - V_2 = IR \;\Rightarrow\; 120 = 1{,}45R \;\Rightarrow\; \boxed{R = 82{,}7\ \Omega}$$

4)

$$W = P\tau = 0{,}174\,\frac{24}{60}\text{ kW} \cdot \text{h} = 0{,}07 \text{ kW} \cdot \text{h} \;\Rightarrow\; \boxed{C = 0{,}07 \times 6 = 0{,}42 \text{ ptas}}$$

Problema 21. Calcular la cantidad de calor necesaria para transformar 1 kg de hielo a $-20°$ C en vapor de agua a 100° C. Si se realiza la anterior operación con un hornillo eléctrico de 100 Ω, conectado a 220 V, ¿cuánto tiempo tardará en verificarse si sólo se aprovecha el 30 % de calor producido? Si el kW · h cuesta 6 ptas, ¿cuánto vale en ptas la energía eléctrica consumida en la operación anterior?

Solución

1)

$$\boxed{Q = 10^3 \times 0{,}5 \times 20 + 10^3 \times 80 + 10^3 \times 100 + 10^3 \times 540 = 73 \times 10^4 \text{ cal}}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} Q &= 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} t r_t \\ 73 \times 10^4 &= 0{,}24 \frac{220^2}{100} t 0{,}3 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{t = 21\,000 \text{ s}}$$

3)

$$W = QJ = \frac{73 \times 10^4 \times 4{,}18}{0{,}3 \times 3\,600\,000} = 3 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \boxed{C = 3 \times 6 = 18 \text{ ptas}}$$

Problema 22. Disponemos de un hilo conductor de 1 mm^2 de sección, cuya resistividad es de 10^{-6} Ω · m, con el cual queremos hacer la resistencia de un cazo que nos permita llevar en 5 min 1 l de agua desde 20° C hasta 100° C, suponiendo que las pérdidas de calor representan el 20 % de las calorías producidas y que la tensión de la red es 125 V. Calcular:

1. El valor que debe tener la resistencia.
2. La longitud que debemos tomar del hilo.
3. La intensidad de la corriente.
4. Lo que cuesta calentar, hasta hervir, el litro de agua, suponiendo que el kW · h vale 6 ptas.

Solución

$$\left.\begin{aligned} Q &= Mc\Delta t = r_t 0{,}24(V_1 - V_2)I\tau \\ 10^3 \times 80 &= 0{,}8 \times 0{,}24 \times 125 I 5 \times 60 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{I = 11 \text{ A}}$$

$$\boxed{R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{125}{11} \,\Omega = 11{,}36 \,\Omega}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 11{,}36 = 10^{-6} \frac{l}{10^{-6}} \quad \Rightarrow \boxed{l = 11{,}36 \text{ m}}$$

Le energía teórica gastada es:

$$W_T = JMc\Delta t = 4{,}18 \times 10^3 \times 80 = 334 \times 10^3 \text{ J} = \frac{334 \times 10^3}{3{,}6 \times 10^6} \text{ kW} \cdot \text{h}$$

la real será:

$$W_R = \frac{334 \times 10^3}{3{,}6 \times 10^6 \times 0{,}8} \text{ kW} \cdot \text{h} = 0{,}11 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

luego el costo será:

$$\boxed{C = 0{,}11 \times 6 = 0{,}7 \text{ ptas}}$$

Problema 23. Necesitamos calentar 50 kg de agua desde la temperatura de 15° C hasta la de 35° C, en 0,5 h. Disponemos de corriente alterna de 125 V eficaces y de alambre de constantan de 1 mm de diámetro y de una resistencia específica de 0,5 $\Omega \cdot mm^2/m$. Determinar:

1. La intensidad de la corriente y el valor de la resistencia que sean necesarias.
2. La longitud del hilo que se ha de emplear para construir la resistencia.
3. El importe de la corriente consumida al precio de 6 ptas cada kW - h.

Solución

1)

$$Q = Mc\Delta t = 0{,}24 I^2 R\tau = 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\tau = 0{,}24(V_1 - V_2)I\tau$$

$$5 \times 10^4 (35 - 15) = 0{,}24 \times 125 I 30 \times 60 \Rightarrow \boxed{I = 18{,}5 \text{ A}}$$

$$5 \times 10^4 (35 - 15) = 0{,}24 \frac{125^2}{R} 30 \times 60 \Rightarrow \boxed{R = 6{,}7\ \Omega}$$

2)

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow 6{,}7 = \frac{0{,}5 l}{\pi 0{,}5^2} \Rightarrow \boxed{l = 10{,}5 \text{ m}}$$

3)

$$W = (V_1 - V_2)I\tau = 125 \times 18{,}5 \times 30 \times 60 \text{ J} = \frac{125 \times 18{,}5 \times 1\,800}{3{,}6 \times 10^6} = 1{,}1 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

$$\boxed{C = 1{,}1 \times 6 = 6{,}6 \text{ ptas}}$$

Problema 24. Un calorímetro cuyo equivalente en agua es de 30 g contiene 750 g de un líquido en el que se introduce una resistencia de calefacción de 10 Ω y entre los extremos de esta resistencia se establece una diferencia de potencial de 12 V. Al paso de la corriente durante 5 min se observa una elevación de temperatura de 5° C.

1. ¿Cuál es el calor específico del líquido?
2. ¿Cuál sería el incremento de temperatura si se completara el contenido del calorímetro con 250 g de agua y se repitiera la experiencia en iguales condiciones durante el mismo tiempo?
3. ¿Qué cantidad de hielo habría que añadir al final de la operación citada en segundo lugar para que el contenido del calorímetro recuperase la temperatura inicial de 0° C?

Solución

1)

$$Q = 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\tau = E_q\Delta t + Mc\Delta t \Rightarrow 0{,}24 \frac{12^2}{10} 5 \times 60 = 30 \times 5 + 750c5 \Rightarrow \boxed{c = 0{,}24 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

2)

$$0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\tau = (E_q + M')\Delta t + Mc\Delta t \Rightarrow 0{,}24 \frac{12^2}{10} 5 \times 60 = 280\Delta t + 750 \times 0{,}24\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = 2{,}2^\circ \text{ C}}$$

3)

$$0{,}24\,\frac{V_1 - V_2}{R}\,\tau = M''l \;\Rightarrow\; 0{,}24\,\frac{12^2}{10}\,5 \times 60 = M''80 \;\Rightarrow\; \boxed{M'' = 12{,}96 \text{ g}}$$

Problema 25. Se quiere construir un hornillo para corriente de 110 V, capaz de calentar 1 l de agua desde la temperatura de 15° C a 100° C en 50 min, teniendo en cuenta que sólo se aprovecha el 20 % del calor que produce, y se dispone de hilo conductor de 0,1 mm^2 de sección y resistencia específica de 10^{-6} Ω · m. Determinar:

1. La longitud del hilo necesario para ello.
2. Intensidad de la corriente que pasará por el hornillo.
3. Lo que cuesta calentar el litro de agua si el kW · h vale 6 ptas.

Solución

1)

$$Q = Mc\Delta t = \eta\,0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\,\tau \;\Rightarrow\; R = \frac{\eta\,0{,}24(V_1 - V_2)^2\tau}{Mc\Delta t} = \rho\,\frac{l}{A} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{l = \frac{\eta\,0{,}24(V_1 - V_2)^2\tau A}{\rho Mc\Delta t} = \frac{0{,}2 \times 0{,}24 \times 110^2 \times 50 \times 60 \times 0{,}1 \times 10^{-6}}{10^{-6} \times 10^3 \times (100 - 15)} = 2 \text{ m}}$$

2)

$$Q = Mc\Delta t = \eta\,0{,}24(V_1 - V_2)I\tau \;\Rightarrow$$

$$I = \frac{Mc\Delta t}{\eta\,0{,}24(V_1 - V_2)\tau} = \frac{10^3(100 - 15)}{0{,}2 \times 0{,}24 \times 110 \times 50 \times 60}\text{ A} \;\Rightarrow\; \boxed{I = 5{,}3 \text{ A}}$$

3)

$$W = (V_1 - V_2)I\tau = 110 \times 5{,}3 \times 50 \times 60 \text{ J} = \frac{110 \times 5{,}3 \times 50 \times 60}{3{,}6 \times 10^6}\text{ kW}\cdot\text{h}$$

$$\boxed{C = \frac{110 \times 5{,}3 \times 50 \times 60}{3{,}6 \times 10^6}\,6 = 2{,}9 \text{ ptas}}$$

Problema 26. Una bombilla eléctrica de 60 W a 110 V se conecta por error a la red de 220 V; luce durante unos momentos con gran brillo y acaba por fundirse. Calcúlese:

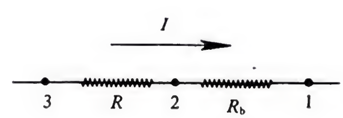
1. La potencia efectiva manifestada por la bombilla en su conexión errónea.
2. La resistencia que habría que haber intercalado en serie con la bombilla en su conexión a la red de 220 V para que hubiera funcionado correctamente.
3. La potencia total puesta en juego en el caso anterior y los kW · h consumidos por el sistema resistencia bombilla durante 24 h de funcionamiento.

Solución

1)

$$P_b = \frac{(V - V')^2}{R_b} \;\Rightarrow\; 60 = \frac{110^2}{R_b} \;\Rightarrow\; R_b = \frac{110^2}{60} = \frac{605}{3}\,\Omega$$

$$\boxed{P_e = \frac{220^2}{605}\,3 = 240 \text{ W}}$$



Problema XXVIII-26

2)

$$P_b = (V_1 - V_2)I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{60}{110} = \frac{6}{11}\ \text{A}$$

$$R_T = R + R_b = \frac{V_1 - V_3}{I} \quad \Rightarrow \quad R + \frac{605}{3} = \frac{220 \times 11}{6} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 201{,}6\ \Omega}$$

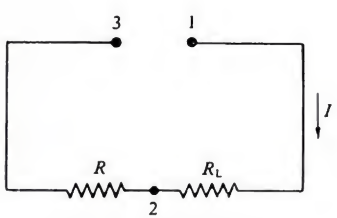
3)

$$P_T = (V_1 - V_3)I = 220\frac{6}{11}\ \text{W} = 120\ \text{W} \quad \Rightarrow \quad P_T = 0{,}12\ \text{kW}$$

$$\boxed{W = P_T t = 0{,}12 \times 24 = 2{,}88\ \text{kW} \cdot \text{h}}$$

Problema 27. La tensión en los bornes de una lámpara de arco es de 40 V y está conectada en un circuito cuya tensión es de 110 V. Calcular:
1. La resistencia que se debe de intercalar, en el referido circuito, para que la lámpara funcione a su tensión normal y con una intensidad de de 10 A.
2. La potencia expresada en W, perdida en la resistencia.
3. La potencia expresada en CV, consumida por la lámpara.
4. El calor producido en un minuto por la lámpara.

Solución



Problema XXVIII-27

1)

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - V_2 = 40\ \text{V} \\ V_1 - V_3 = 110\ \text{V} \end{array}\right| \; V_2 - V_3 = 70\ \text{V} \;\Rightarrow \left| \begin{array}{l} R_L = \dfrac{40}{10} = 4\ \Omega \\ \boxed{R = \dfrac{70}{10} = 7\ \Omega} \end{array}\right.$$

2)

$$\boxed{P = I^2R = 100 \times 7 = 700\ \text{W}}$$

3)

$$P_L = I^2R_L = 100 \times 4 = 400\ \text{W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_L = \frac{400}{9{,}8 \times 75} = 0{,}54\ \text{CV}}$$

4)

$$\boxed{Q = 0{,}24I^2R_L t = 0{,}24 \times 100 \times 4 \times 60\ \text{cal} = 5\ 760\ \text{cal}}$$

Problema 28. Una bombilla lleva las siguientes indicaciones: 120 V y 100 W.
1. ¿Qué intensidad atraviesa el filamento cuando la bombilla está conectada a un enchufe de 120 V? ¿Cuál es, entonces, la resistencia del filamento incandescente?
2. Si conectamos la bombilla a un enchufe de 220 V, ¿qué resistencia es preciso intercalar para que la bombilla funcione en las mismas condiciones que en el caso anterior?
3. La resistencia que se intercala está construida con un hilo metálico de 1 mm de diámetro, cuya resistividad es de 46 $\mu\Omega \cdot$ cm. ¿Cuál será la longitud de este hilo?
4. Si el kW · h vale 6 ptas, ¿cuál es el gasto correspondiente a 10 h de funcionamiento de la bombilla en el sector de 120 V?

Solución

1)

$$P = (V - V')I \Rightarrow 100 = 120I \Rightarrow \boxed{I = \frac{5}{6}\ \text{A}}$$

$$V - V' = IR. \Rightarrow 120 = \frac{5}{6} R \Rightarrow \boxed{R = 144\ \Omega}$$

2)

$$(V - V') = I(R + R') \Rightarrow 220 = \frac{5}{6}(144 + R') \Rightarrow \boxed{R' = 120\ \Omega}$$

3)

$$R' = \frac{l}{A} \Rightarrow 120 = 46 \times 10^{-6} \frac{l}{\pi 0{,}05^2} \Rightarrow \boxed{l = 20{,}5 \times 10^3\ \text{cm} = 205\ \text{m}}$$

4)

$$W = Pt = \frac{100}{1\,000} 10 = 1\ \text{kW} \cdot \text{h} \Rightarrow \boxed{C = 6\ \text{ptas.}}$$

Problema 29. Una lámpara de incandescencia conectada a 120 V se sumerge en un calorímetro que contiene 400 g de petróleo de calor específico 0,5 cal/g · °C. Al cabo de 1 min 40 s la temperatura del petróleo se ha elevado 6° C. Calcular:
1. La cantidad de calor desarrollado.
2. La intensidad de la corriente y la resistencia de la lámpara.
3. El gasto que supone tenerla encendida 5 h, a 6 ptas el kw · h.
4. Poniendo en serie con la lámpara una resistencia, R', fuera del calorímetro, se tiene la misma elevación de temperatura en el petróleo en 6 min 40 s. ¿Cuál es el valor de esa resistencia?

Solución

1.^{er} CASO:

1)

$$\boxed{\Delta Q = Mc\Delta T = 400 \times 0{,}5 \times 6 = 1\,200\ \text{cal}}$$

2)

$$Q = 0{,}24(V_1 - V_2)It \Rightarrow 1\,200 = 0{,}24 \times 120 \times 100I \Rightarrow \boxed{I = 0{,}416\ \text{A}}$$

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{120}{0{,}416}\ \Omega \Rightarrow \boxed{R = 288\ \Omega}$$

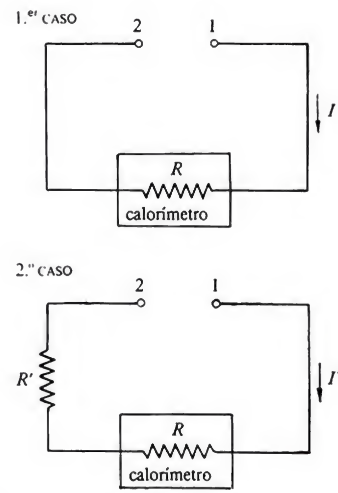
3) La energía gastada en ese tiempo será:

$$W = (V_1 - V_2)It = \frac{120 \times 0{,}416 \times 5}{1\,000} = 0{,}25\ \text{kW} \cdot \text{h} \Rightarrow \boxed{C = 0{,}25 \times 6 = 1{,}50\ \text{ptas}}$$

2.° CASO:

4) En este segundo caso se verifica:

$$Q = 0{,}24 \frac{(V_1 - V_2)^2}{R + R'} t' \Rightarrow 1\,200 = 0{,}24 \frac{120^2}{288 + R'} (6 \times 60 + 40) \Rightarrow \boxed{R' = 864\ \Omega}$$



Problema XXVIII-29

Problema 30. Se dispone de dos estufas eléctricas, una de 1 000 W de potencia a 220 V y la otra de 250 W a 125 V. Se desea saber la intensidad de la corriente que circula en los siguientes casos:

1. En cada una de ellas, por separado, bajo la tensión indicada.

2. Asociando las dos en serie bajo la tensión de 220 V.

3. Se conectan ahora en paralelo bajo una tensión de 125 V, ¿cuál será el costo de la energía eléctrica consumida durante 10 h, si el kW · h vale 6 ptas?

4. Si el 80 % del calor desprendido por ambas en la pregunta anterior se invirtiera en calentar 1 l de agua a 15° C, ¿cuánto tiempo tardaría en hervir, a la presión normal?

Solución

1)

$$P = (V - V')I \quad \left|\begin{array}{l} \boxed{I_1 = \dfrac{1\,000}{220} = 4{,}54 \text{ A}} \\[2ex] \boxed{I_2 = \dfrac{250}{125} = 2 \text{ A}} \end{array}\right.$$

2)

$$P = \frac{(V - V')^2}{R} \quad \left|\begin{array}{l} R_1 = \dfrac{220^2}{1\,000} = 48{,}4\ \Omega \\[3ex] R_2 = \dfrac{125^2}{250} = 62{,}5\ \Omega \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{V - V'}{R_1 + R_2} = \frac{220}{48{,}4 + 62{,}5} \simeq 2 \text{ A}}$$

3)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$P = \frac{(V - V')^2}{R} = \frac{(V - V')^2\,(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{125^2(48{,}4 + 62{,}5)}{48{,}4 \times 62{,}5} = 573 \text{ W} = 0{,}573 \text{ kW}$$

$$W = Pt = 0{,}573 \times 10 = 5{,}73 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 5{,}73 \times 6 = 34{,}4 \text{ ptas}}$$

4) Llamando τ al tiempo:

$$\left.\begin{array}{l} Q = Mc\Delta t = 0{,}24 P\tau\eta \\ 1\,000(100 - 15) = 0{,}24 \times 573\tau 0{,}8 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\tau = 773 \text{ s}}$$

Problema 31. En la calefacción de un piso se emplea 1 kg de carbón por hora.

1. Sabiendo que la combustión de ese kg de cargón produce 8 000 kcal, de las cuales sólo el 80 % son eficaces en la calefacción, calcular la potencia eléctrica de que necesitamos disponer para obtener una calefacción equivalente, suponiendo que el rendimiento de los radiadores eléctricos es del 100 %.

2. La anterior potencia la obtenemos con cuatro radiadores eléctricos, cada uno de los cuales está conectado directamente a una red de corriente continua de

200 V. Calcular la intensidad que atraviesa cada radiador y el consumo marcado por el contador en kW · h al cabo de 24 h de marcha ininterrumpida.
3. Calcular la resistencia eléctrica de cada radiador y la longitud del hilo metálico que la constituye, sabiendo que su sección es de 0,4 mm^2 y su resistividad es de $80 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$.

Solución

1)

$$P = \frac{8 \times 10^6}{3\ 600}\ 0{,}8\ \text{cal/s} = \frac{8 \times 10^6 \times 0{,}8 \times 4{,}18}{3\ 600}\ \text{W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 7\ 430\ \text{W} = 7{,}43\ \text{kW}}$$

2) y 3) La potencia de cada radiador será:

$$P_1 = (V_1 - V_2)I = \frac{P}{4} = \frac{7\ 430}{4}\ \text{W}$$

$$V_1 - V_2 = 200\ \text{V}$$

$$V_1 - V_2 = IR$$

$$200I = \frac{7\ 430}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 9{,}3\ \text{A}}$$

$$200 = 9{,}3R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 21{,}5\ \Omega}$$

$$R = \rho\frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 21{,}5 = 80 \times 10^{-6}\frac{l}{0{,}4 \times 10^{-2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l \simeq 10^3\ \text{cm} = 10\ \text{m}}$$

$$\boxed{W = Pt = 7{,}43 \times 24 = 178{,}3\ \text{kW} \cdot \text{h}}$$

Problema 32. Un motor de combustión interna de 50 CV consume 253 g de aceite combustible de 0,9 g/cm^3 de densidad y de 10 000 kcal/kg por cada CV · h producido. Calcular:
1. El rendimiento total del motor.
2. El consumo diario de aceite a esta potencia.
3. Si el motor transmite su potencia a un generador eléctrico, ¿cuál es la intensidad de corriente máxima que puede producir si el generador mantiene una tensión eléctrica de 220 V en la salida, siendo el rendimiento global de transformación de energía mecánica en eléctrica del 80 %?
4. ¿Cuál es el coste del kW · h eléctrico, sabiendo que el litro de aceite cuesta 4 ptas?

Solución

1) La combustión de 0,253 kg de aceite producen:

$$W_2 = 0{,}253 \times 10\ 000 \times 427\ \text{kgm}$$

que se emplean en producir:

$$W_1 = 1\ \text{CV} \cdot \text{h} = 75 \times 3\ 600\ \text{kgm}$$

luego el rendimiento del motor será:

$$\eta = \frac{W_1}{W_2} = \frac{75 \times 3\ 600}{0{,}253 \times 10^4 \times 427} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{25\ \%}$$

2) El gasto diario de aceite a esta potencia es:

$$\boxed{G = 50 \times 0{,}253 \times 24 = 303{,}6\ \text{kg}}$$

3) Los CV de potencia mecánica se transforman en una potencia eléctrica dada por:

$$P = 50 \times 0{,}8 = 40 \text{ CV}$$

$$P = I(V_1 - V_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{P}{V_1 - V_2} = \frac{40 \times 75 \times 9{,}8}{220} = 133{,}6 \text{ A}}$$

4) Para producir una potencia eléctrica:

$$P_E = 1 \text{ CV} \cdot \text{h} = \frac{75 \times 9{,}8}{1\,000} \text{ kW} \cdot \text{h}$$

necesitamos una potencia mecánica:

$$P_M = \frac{1}{0{,}8} \text{ CV} \cdot \text{h}$$

que consumen una masa de aceite:

$$M = \frac{0{,}253}{0{,}8} \text{ kg}$$

que equivalen a un volumen:

$$v = \frac{0{,}253}{0{,}8 \times 0{,}9} \text{ l}$$

los cuales cuestan:

$$C_1 = \frac{0{,}253}{0{,}8 \times 0{,}9} \text{ 4 ptas}$$

el precio del kW · h eléctrico es, por tanto:

$$\boxed{C_2 = \frac{0{,}253 \times 4 \times 1\,000}{0{,}8 \times 0{,}9 \times 75 \times 9{,}8} = 1{,}91 \text{ ptas}}$$

Problema 33. Un motor eléctrico mueve una bomba hidráulica que toma agua del río y la eleva a un depósito cilíndrico de 6 m^2 de base y 2 m de altura. Desde el río hasta el borde superior del depósito hay un desnivel de 15 m y el depósito se llena en 1 h. Se pide:

1. Volumen del depósito en litros, caudal en la tubería expresado en l/s y velocidad del agua en la tubería, cuya sección es de 0,6 dm^2.

2. Trabajo teórico necesario para elevar el agua hasta llenar el depósito.

3. El motor funciona con una diferencia de potencial de 220 V y una intensidad de 5 A. ¿Qué potencia toma este motor de la red eléctrica? ¿Qué parte de esta potencia se transforma en calor en el motor mismo, cuya resistencia interna vale 4 Ω? ¿Cuánto trabajo mecánico proporciona el motor a la bomba? Comparando este trabajo con el calculado en la segunda parte de este problema, calcular el rendimiento de la bomba hidráulica.

Solución

1)

$$V = 6 \times 2 = 12 \text{ m}^3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 12\,000 \text{ l}}$$

$$V = Gt \quad \Rightarrow \quad G = \frac{V}{t} = \frac{12\,000}{3\,600} \text{ l/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{10}{3} \text{ l/s}}$$

$$G = vA \quad \Rightarrow \quad v = \frac{G}{A} = \frac{10}{3 \times 0{,}6} = \frac{50}{9} \text{ dm/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{5}{9} \text{ m/s}}$$

2) El trabajo para subir el agua será:

$$W_T = Mgh = 12\ 000 \times 9{,}8 \times 15 \text{ J} \quad \Rightarrow \boxed{W_T = 180\ 000 \text{ kgm}}$$

3) La potencia que toma el motor de la red eléctrica es:

$$\boxed{P' = (V_1 - V_2)I = 220 \times 5 = 1\ 100 \text{ W}}$$

La potencia que se transforma en calor en el motor es:

$$\boxed{P'_O = I^2 r' = 5^2 \times 4 = 100 \text{ W}}$$

La potencia que aprovecha el motor es:

$$\boxed{P'_M = P' - P'_O = 1\ 000 \text{ W}}$$

En una hora la energía aprovechada es:

$$W = P'_M t = 1\ 000 \times 3\ 600 = 3\ 600\ 000 \text{ J} = 1 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

luego:

$$\eta = \frac{12\ 000 \times 9{,}8 \times 15}{3\ 600\ 000} = 0{,}49 \quad \Rightarrow \boxed{49\ \%}$$

Problema 34. En la terraza de una casa hay un depósito de 1 800 l de capacidad que se llena elevando agua desde un pozo por medio de un motor eléctrico. El depósito tarda 15 min en llenarse y el desnivel es de 10 m. El motor funciona con corriente de 220 V de tensión y con una intensidad de 1,2 A. La resistencia del motor es de 20 Ω. Calcular:

1. La potencia útil del motor.
2. La potencia desarrollada por el motor y su rendimiento mecánico.
3. Cantidad de calor que se producirá en el motor por efecto Joule durante el tiempo que funciona.

Solución

1)

$$\boxed{P_u = \frac{Mgh}{t} = \frac{1\ 800 \times 9{,}8 \times 10}{15 \times 60} = 196 \text{ W}}$$

2) Potencia suministrada al motor por la línea:

$$P' = (V_1 - V_2)I = 220 \times 1{,}2 = 264 \text{ W}$$

Potencia *disipada* en forma de calor en el motor:

$$P'_O = I^2 r = 1{,}2^2 \times 20 = 28{,}8 \text{ W}$$

Potencia mecánica del motor:

$$P'_M = P' - P'_O \quad \Rightarrow \boxed{P'_M = 235{,}2 \text{ W}}$$

Rendimiento del motor:

$$\eta = \frac{P_u}{P'_M} = \frac{196}{235{,}2} = 0{,}83 \quad \Rightarrow \boxed{83\ \%}$$

3)

$$\boxed{Q = 0{,}24\, P'_O t = 0{,}24 \times 28{,}8 \times 15 \times 60 \text{ cal} = 6\ 220{,}8 \text{ cal}}$$

Problema 35. En un salto de agua caen desde una altura de 30 m, 4 m^3/s. La turbina sobre la que caen tiene un rendimiento del 80 %, y ésta acciona un alternador cuyo rendimiento es también de un 80 %. La tensión a la salida del transformador es de 50 000 V y se supone que en la transformación no hay pérdida de potencia. Esta corriente se transporta para su aprovechamiento a una distancia de 20 km mediante hilos de cobre de 2 mm^2 de sección ($\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$). Calcular:

1. La intensidad de la corriente que circula por la línea.
2. La pérdida en la línea por el efecto Joule.
3. Lo que vale esa pérdida en pesetas diarias si el kW · h a la salida de la central resulta a 1 ptas.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{Mgh}{t}\eta_1\eta_2 \\ P = (V_1 - V_2)I \end{array}\right| \Rightarrow \frac{4\,000 \times 9{,}8 \times 30}{1} 0{,}8 \times 0{,}8 = 5 \times 10^4 I \Rightarrow \boxed{I = 15 \text{ A}}$$

2) La longitud de la línea es 40 km (ida y vuelta).

$$R = \rho\frac{l}{A} = 1{,}7 \times 10^{-8} \frac{4 \times 10^4}{2 \times 10^{-6}}\ \Omega = 340\ \Omega$$

Potencia que se transforma en calor:

$$\boxed{P = I^2R = 15^2 \times 340 = 76\,500 \text{ W} = 76{,}5 \text{ kW}}$$

3)

$$W = Pt = 76{,}5 \times 24 = 1\,836 \text{ kW} \cdot \text{h} \Rightarrow \boxed{C = 1\,836 \text{ ptas}}$$

Problema 36. Un salto de agua tiene un caudal de 6 m^3/s y una altura de 25 m. Calcúlese su potencia en kW y en CV. Este salto acciona una turbina cuyo rendimiento es 4/5, y esta turbina mueve una dinamo cuyo rendimiento es 5/6. La corriente producida por la dinamo se transporta a un lugar distante 5 km. La tensión entre los bornes de la dinamo es de 10 000 V. Se pide calcular:

1. La potencia en kW disponible en los bornes de la dinamo.
2. La resistencia interior de ésta.
3. El diámetro del hilo de cobre que debe utilizarse en el transporte, sabiendo que la potencia disipada en la línea no debe ser superior al 10 % de la potencia disponible en los bornes de la turbina.
4. El peso de cobre empleado en la línea.

DATOS: Resistividad del cobre: $1{,}6 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot cm$. Peso específico del cobre: 8,9 g/cm^3.

Solución

$$G = 6 \text{ m}^3/\text{s} = 6 \times 10^3 \text{ kg/s}$$

Potencia del salto:

$$\boxed{P_S = \frac{mgh}{t} = 6 \times 10^3 \times 9{,}8 \times 25 = 147 \times 10^4 \text{ W} = 1\,470 \text{ kW} = 2\,000 \text{ CV}}$$

Potencia mecánica disponible en la turbina:

$$P_T = \eta_1 P_S = 147 \times 10^4 \frac{4}{5} = 117{,}6 \times 10^4 \text{ W} = 1\ 176 \text{ kW}$$

Potencia disponible en los bornes de la dinamo:

$$\boxed{P_D = P_S \eta_1 \eta_2 = 147 \times 10^4 \frac{4}{5} \frac{5}{6} = 98 \times 10^4 \text{ W} = 980 \text{ kW}}$$

Potencia en forma de calor en la dinamo:

$$P_Q = P_T - P_D = 117{,}6 \times 10^4 - 98 \times 10^4 = 19{,}6 \times 10^4 \text{ W} = 196 \text{ kW}$$

La intensidad en el circuito será:

$$P_D = (V - V')I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{98 \times 10^4}{10^4} = 98 \text{ A}$$

La resistencia interna de la dinamo es, pues:

$$P_Q = I^2 R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{19{,}6 \times 10^4}{98^2} = 20\ \Omega}$$

Potencia en forma de calor en los hilos:

$$P'_Q = 0{,}1\, P_T = 11{,}76 \times 10^4 \text{ W}$$

La resistencia de los hilos será:

$$P'_Q = I^2 R' \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{11{,}76 \times 10^4}{98^2} = 12\ \Omega$$

El diámetro se calculará: ($l = 2 \times 5$ km $= 10$ km):

$$R' = \rho \frac{l}{\pi \left[\dfrac{d}{2}\right]^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 2\sqrt{\frac{\rho l}{\pi R'}} = 2\sqrt{\frac{1{,}6 \times 10^{-8} \times 10^4}{\pi 12}} = 4{,}12 \times 10^{-3} \text{ m} = 4{,}12 \text{ mm}}$$

Llamando μ a la densidad, el peso del cobre será ($r = 0{,}206$ cm):

$$\boxed{P = \pi r^2 l \mu g = \pi \times 0{,}206^2 \times 10^6 \times 8{,}9 \times 980 \text{ dyn} = 3{,}7\pi\ 10^3 \text{ kp}}$$

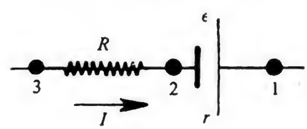
B) CIRCUITO FUNDAMENTAL DE CORRIENTE CONTINUA

FORMULARIO

DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE LOS POLOS DE UNA PILA:

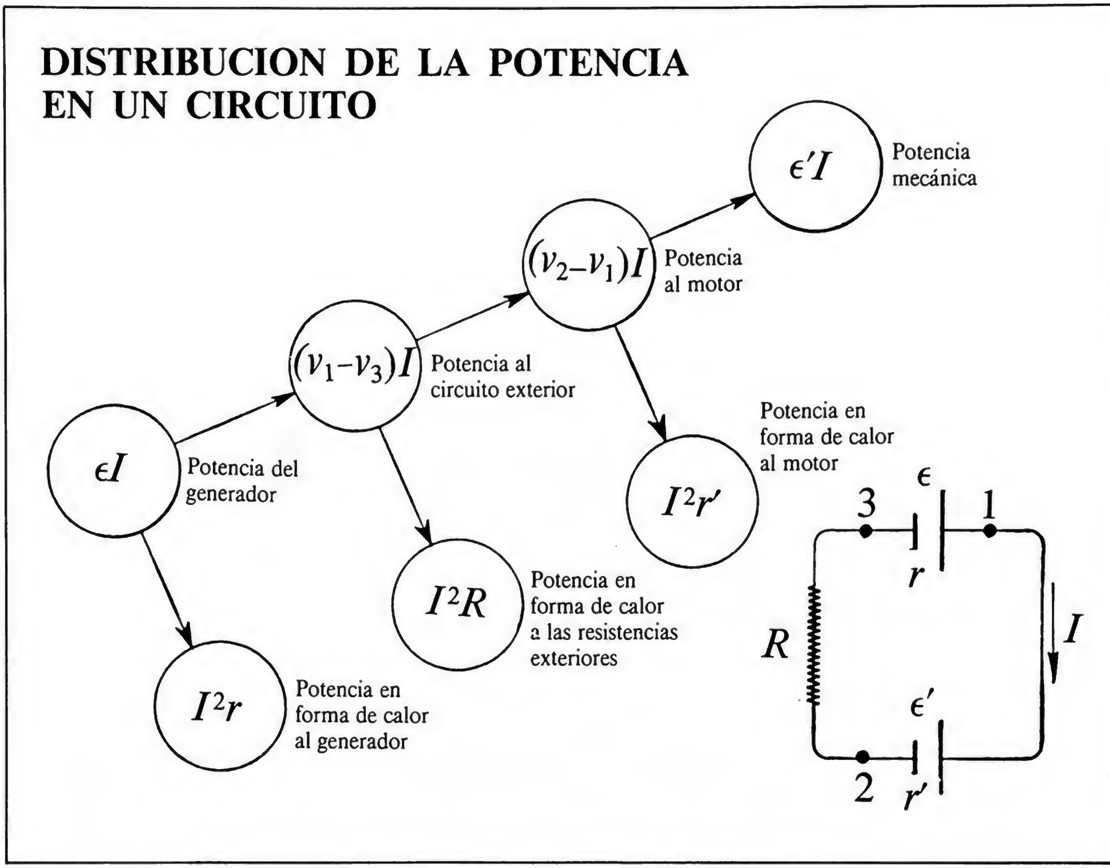
$$V_1 - V_2 = \epsilon - Ir$$

LEY GENERAL DE OHM:



$$V_1 - V_3 = \epsilon - I(r + R)$$

INTENSIDAD EN EL CIRCUITO DEL CUADRO: $I = \dfrac{\epsilon - \epsilon'}{R + r + r'}$



Problema 37. Para cargar un acumulador es necesario emplear una corriente de 2 A de intensidad durante 6 h. Calcular:

1. Cantidad de electricidad que suministrará en la descarga si su rendimiento es 0,8.

2. La intensidad que proporcionará el acumulador cuando la descarga se produce en 6 h.

Solución

1) La cantidad de electricidad empleada en la carga es:

$$Q = It = 2 \times 6 \times 3\,600 = 43\,200 \text{ C}$$

Como en la descarga el rendimiento es el 80 %, la cantidad de electricidad en la descarga será:

$$\boxed{Q' = 43\,200 \times 0{,}8 = 34\,560 \text{ C}}$$

2)

$$\boxed{I = \frac{Q'}{t} = \frac{34\,500}{6 \times 3\,600} = 1{,}6 \text{ A}}$$

Problema 38. Un acumulador puede suministrar 10 A · h. ¿Durante cuánto tiempo podrá lucir una lámpara que consume 0,25 A si en la descarga suministra el acumulador los 4/5 de su capacidad utilizable?

Solución

Carga teóricamente utilizable:

$$Q_1 = 10 \times 3\,600 \text{ C}$$

Carga realmente utilizable:

$$Q_2 = \frac{4}{5}\, 10 \times 3\,600 \text{ C}$$

$$I = \frac{Q_2}{t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}25 = \frac{4 \times 10 \times 3\,600}{5t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 115\,200 \text{ s} = 32 \text{ h}}$$

Problema 39. El rendimiento de un acumulador es del 80 % y su capacidad utilizable 8 A · h. ¿Qué intensidad de corriente será necesaria para cargarlo en 5 h?

Solución

$$\left.\begin{array}{r} 100 \text{ A} \cdot \text{h en descarga dan } 80 \\ x \text{ A} \cdot \text{h en descarga darán } 8 \end{array}\right| \; x = 10 \text{ A} \cdot \text{h}$$

Carga necesaria:

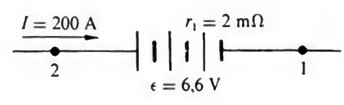
$$Q = 10 \times 3\,600 \text{ C}$$

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{10 \times 3\,600}{5 \times 3\,600} \text{ A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 2 \text{ A}}$$

Problema 40. Una batería de acumuladores de plomo de tres vasos, cuya fuerza electromotriz es de 6,6 V, tiene una resistencia interna de 2 mΩ en cada vaso. Determinar:

1. La tensión entre bornes cuando la intensidad de la corriente es de 200 A.
2. El calor desarrollado dentro de la batería si la anterior intensidad se mantiene durante 10 s.
3. Tiempo que esta batería, de 90 A · h, puede mantener una intensidad de 10 A.

Solución



Problema XXVIII-40

1)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \mathcal{E} - Inr_1 = (6{,}6 - 200 \times 3 \times 2 \times 10^{-3}) \text{ V} = 5{,}4 \text{ V}}$$

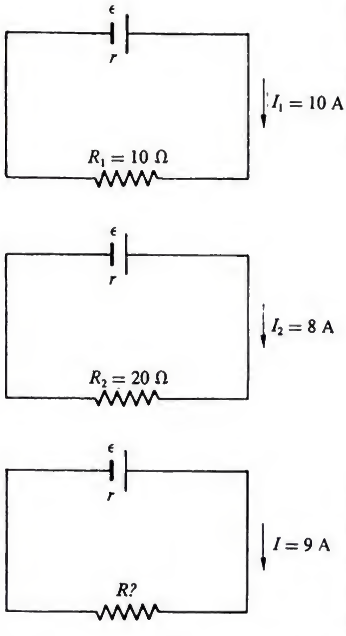
2)

$$\boxed{Q = 0{,}24 I^2 n r_1 t = 0{,}24 \times 4 \times 10^4 \times 3 \times 2 \times 10^{-3} \times 10 \text{ cal} = 576 \text{ cal}}$$

3)

$$I = \frac{q}{t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{q}{I} = \frac{90}{10} = 9 \text{ h}}$$

Problema 41. La intensidad de la corriente producida por un generador es de 10 A cuando el circuito exterior es de 10 Ω, y de 8 A al duplicar la resistencia exterior. Calcular la resistencia que ha de tener un conductor para que al formar con él la resistencia exterior del circuito pase una intensidad de 9 A, y determinar la resistencia interna del generador y su FEM.



Problema XXVIII-41

Solución

$$I = \frac{\epsilon}{R + r} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} 10 = \dfrac{\epsilon}{10 + r} \\ 8 = \dfrac{\epsilon}{20 + r} \\ 9 = \dfrac{\epsilon}{R + r} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \boxed{r = 30\ \Omega} \\ \boxed{\epsilon = 400\ \text{V}} \\ \boxed{R = 14{,}4\ \Omega} \end{array}$$

Problema 42. Se dispone de un acumulador eléctrico, con una energía almacenada en él de 0,1 kW · h. Este acumulador suministra corriente eléctrica a un circuito de resistencia 30 Ω. Si la intensidad de la corriente es de 1 A, determinar:
1. Valor de la energía acumulada en kgm.
2. La tensión en los bornes del generador.
3. Tiempo en el que pasa dicha corriente.
4. Calor desprendido por segundo en el circuito.

Solución

1)

$$\boxed{U = 0{,}1\ \frac{3\ 600\ 000}{9{,}8}\ \text{kgm} = 36\ 734{,}7\ \text{kgm}}$$

2) Aplicando la ley de Ohm a la resistencia:

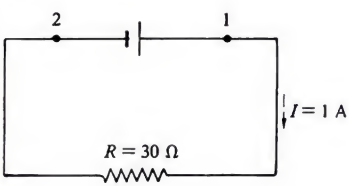
$$\boxed{V_1 - V_2 = IR = 30\ \text{V}}$$

3) En el supuesto que la resistencia interna del acumulador sea nula:

$$U = I^2Rt \quad \Rightarrow \quad 0{,}1 \times 3{,}6 \times 10^6 = 30t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 12\ 000\ \text{s} = 3^{\text{h}}20^{\text{m}}}$$

4)

$$\boxed{Q = 0{,}24 I^2Rt = 0{,}24 \times 30 = 7{,}2\ \text{cal}}$$



Problema XXVIII-42

Problema 43. Un generador de 32 V de fuerza electromotriz se une a una resistencia eléctrica mediante conductores de resistencia despreciable, produciéndose en los extremos de ella una diferencia de potencial de 30 V. En estas condiciones el desarrollo de calor en la resistencia corresponde a una potencia de 6 W. Calcular:
1. La resistencia interna del generador.
2. La resistencia exterior.
3. El tiempo necesario para que la corriente dé lugar al paso de 720 C.

Solución

1)

$$P = (V_1 - V_2)I \Rightarrow 6 = 30I \Rightarrow I = 0{,}2 \text{ A}$$

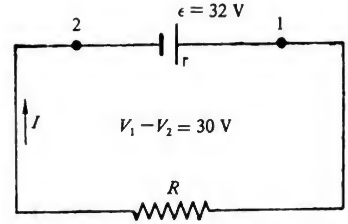
$$V_1 - V_2 = \epsilon - Ir \Rightarrow 30 = 32 - 0{,}2r \Rightarrow \boxed{r = 10\ \Omega}$$

2)

$$V_1 - V_2 = IR \Rightarrow 30 = 0{,}2R \Rightarrow \boxed{R = 150\ \Omega}$$

3)

$$Q = It \Rightarrow 720 = 0{,}2t \Rightarrow \boxed{t = 3\,600 \text{ s} = 1 \text{ h}}$$



Problema XXVIII-43

Problema 44. Una dinamo de FEM $\epsilon = 130$ V y resistencia interior $r = 0{,}65\ \Omega$, puesta en circuito con una resistencia exterior, da corriente de 20 A. Calcular:
1. La diferencia de potencial en los bornes de la dinamo.
2. La potencia útil.
3. La resistencia del circuito exterior.
4. El rendimiento eléctrico de la dinamo.

Solución

1)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \epsilon - Ir = (130 - 20 \times 0{,}65) \text{ V} = 117 \text{ V}}$$

2) Potencia (útil) que suministra el generador al circuito:

$$\boxed{P_u = (V_1 - V_2)I = 117 \times 20 = 2\,340 \text{ W}}$$

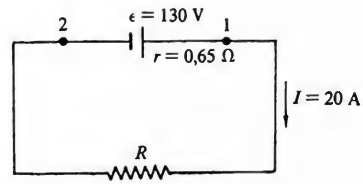
3)

$$V_1 - V_2 = IR \Rightarrow 117 = 20R \Rightarrow \boxed{R = 5{,}85\ \Omega}$$

4)

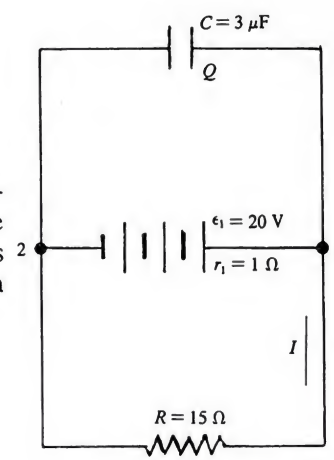
$$\eta = \frac{P_{\text{util}}}{P_{\text{generador}}} = \frac{(V_1 - V_2)I}{\epsilon I} = \frac{V_1 - V_2}{\epsilon} = \frac{IR}{I(R + r)} = \frac{R}{R + r}$$

$$\eta = \frac{5{,}85}{5{,}85 + 0{,}65} = 0{,}90 \Rightarrow \boxed{90\ \%}$$



Problema XXVIII-44

Problema 45. Los polos de un generador se reúnen por medio de dos derivaciones: la primera contiene un hilo metálico de resistencia 15 Ω; la segunda contiene un condensador de 3 μF de capacidad. El generador está constituido por tres elementos de fuerza electromotriz 20 V cada uno y poseen una resistencia interna de 1 Ω. Calcular:
1. La carga del condensador.
2. La energía eléctrica acumulada en el condensador.



Problema XXVIII-45

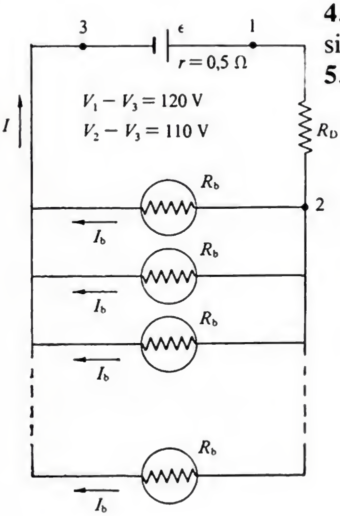
Solución

$$I = \frac{n\,\epsilon_1}{R + nr_1} = \frac{3 \times 20}{15 + 3} = \frac{10}{3} \text{ A} \qquad V_1 - V_2 = IR = \frac{10}{3}\,15 = 50 \text{ V}$$

1) $$\boxed{Q = C(V_1 - V_2) = 3 \times 10^{-6} \times 50 = 150 \times 10^{-6}\ \text{C} = 150\ \mu\text{C}}$$

2) $$\boxed{U = \frac{1}{2} C(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}\, 3 \times 10^{-6}\, 50^2 = 37{,}5 \times 10^{-4}\ \text{J}}$$

Problema 46. La corriente de una dinamo, de resistencia interior 0,5 Ω, alimenta una instalación de 150 bombillas, montadas en paralelo, cada una de las cuales consume 33 W. Cada bombilla funciona bajo una tensión de 110 V. Se pide:
1. La intensidad que recorre cada bombilla.
2. La resistencia que ofrece cada bombilla.
3. La resistencia equivalente al conjunto de bombillas.
4. La potencia perdida en los conductores de distribución, sabiendo que la tensión entre los bornes de la dinamo es de 120 V.
5. La fuerza electromotriz de la dinamo.



Problema XXVIII-46

Solución

1) $$P_b = (V_2 - V_3) I_b \Rightarrow 33 = 110 I_b \Rightarrow \boxed{I_b = 0{,}3\ \text{A}}$$

2) $$(V_2 - V_3) = I_b R_b \Rightarrow 110 = 0{,}3 R_b \Rightarrow \boxed{R_b = 366{,}67\ \Omega}$$

3) $$\frac{1}{R} = \frac{150}{R_b} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{150}{366{,}67} \Rightarrow \boxed{R = 2{,}44\ \Omega}$$

4) Siendo la intensidad del circuito general:

$$I = 150 I_b = 45\ \text{A}$$

La potencia suministrada al circuito exterior por la dinamo será:

$$P = (V_1 - V_3) I = 120 \times 45 = 5\,500\ \text{W}$$

La potencia consumida por las bombillas será:

$$P' = 150 P_b = 150 \times 33 = 4\,950\ \text{W}$$

La potencia disipada en forma de calor en los conductores de distribución será:

$$P_O = P - P' \Rightarrow \boxed{P_O = 450\ \text{W}}$$

5) $$V_1 - V_3 = \epsilon - Ir \Rightarrow 120 = \epsilon - 45 \times 0{,}5 \Rightarrow \boxed{\epsilon = 142{,}5\ \text{V}}$$

Problema 47. Una batería de 50 V de fuerza electromotriz y una resistencia interior r de 0,15 Ω alimenta un conjunto de lámparas cuya resistencia efectiva total es $R_L = 10\ \Omega$. La resistencia de los conductores precisos para las conexiones es $R_C = 0{,}25\ \Omega$. Calcular:
1. La resistencia total del circuito.
2. La corriente que lo recorre.
3. La diferencia de potencial en los bornes de la batería.

4. La diferencia de potencial en los terminales del conjunto de las lámparas.
5. Potencia disipada en el circuito exterior.
6. Potencia disipada en los conductores de conexión.
7. Potencia disipada en las lámparas.

Solución

1)
$$R = 0{,}15 + 10 + 0{,}25 = 10{,}4\ \Omega$$

2)
$$I = \frac{\in}{R} = \frac{50}{10{,}4} = 4{,}8\ \text{A}$$

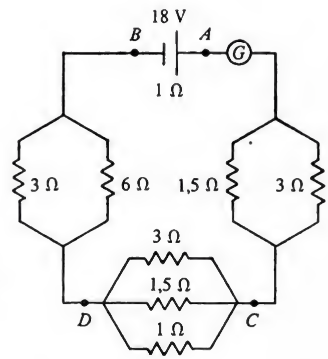
3)
$$(V - V')_B = \in - Ir = 50 - 4{,}8 \times 0{,}15 = 49{,}28\ \text{V}$$

4)
$$(V - V')_L = IR_L = 4{,}8 \times 10 = 48\ \text{V}$$

5)
$$P_E = I^2(R_L + R_C) = 4{,}8^2(10 + 0{,}25) = 236{,}16\ \text{W}$$

6)
$$P_C = I^2R_C = 4{,}8^2 \times 0{,}25 = 5{,}76\ \text{W}$$

7)
$$P_L = I^2R_L = 4{,}8^2 \times 10 = 230{,}4\ \text{W}$$



Problema XXVIII-48

Problema 48. Determinar, en el circuito de la figura, la resistencia equivalente; la indicación del amperímetro; la intensidad en todos los hilos y las diferencias del potencial V_{AB}, V_{AC}, V_{CD} y V_{DB}.

Solución

Resistencias equivalentes a las derivaciones:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1{,}5} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 1\ \Omega$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1{,}5} + \frac{1}{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 0{,}5\ \Omega$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad R_3 = 2\ \Omega$$

$$\boxed{R = 1 + 0{,}5 + 2 + 1 = 4{,}5\ \Omega}$$

El amperímetro indicará:

$$\boxed{I = \frac{\in}{R} = \frac{18}{4{,}5} = 4\ \text{A}}$$

La diferencia de potencial en bornas del generador será:

$$\boxed{V_{AB} = \in - Ir = (18 - 4 \times 1)\ \text{V} = 14\ \text{V}}$$

Derivación de la derecha:

$$V_{AC} = 3I_1 = 1{,}5I_2 \qquad \boxed{I_1 = \frac{4}{3}\ \text{A}}$$

$$I_1 + I_2 = 4 \qquad \boxed{I_2 = \frac{8}{3}\ \text{A}}$$

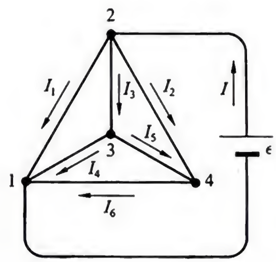
$$\boxed{V_{AC} = 3\ \frac{4}{3}\ V = 4V}$$

Derivación parte inferior:

$$\left.\begin{array}{r} V_{CD} = 3I_3 = 1{,}5I_4 = I_5 \\ I_3 + I_4 + I_5 = 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I_3 = \frac{2}{3}\text{ A}} \\ \boxed{I_4 = \frac{4}{3}\text{ A}} \\ \boxed{I_5 = 2\text{ A}} \end{array} \left| \quad \boxed{V_{CD} = 3\,\frac{2}{3} = 2\text{ V}} \right.$$

Derivación parte izquierda:

$$\left.\begin{array}{r} V_{DB} = 6I_6 = 3I_7 \\ I_6 + I_7 = 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I_6 = \frac{4}{3}\text{ A}} \\ \boxed{I_7 = \frac{8}{3}\text{ A}} \end{array} \left| \quad \boxed{V_{DB} = 6\,\frac{4}{3} = 8\text{ V}} \right.$$



Problema XXVIII-49-1.ª

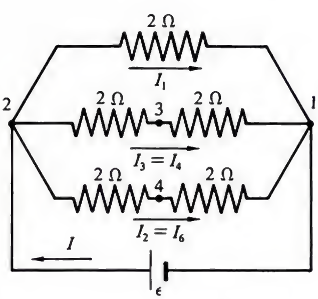
Problema 49. Con seis conductores iguales de 2 Ω cada uno construimos un tetraedro regular y conectamos a dos de sus vértices los polos de un acumulador de $\in = 1{,}5$ V. La resistencia de los hilos de conexión y la interior del acumulador las suponemos despreciables. Se pide calcular la intensidad que pasa:

1. A través del acumulador.
2. A través de cada una de las aristas del tetraedro.
3. Resistencia equivalente al conjunto.

Solución

Por la simetría de la figura los puntos 3 y 4 están al mismo potencial y, por tanto, $\boxed{I_5 = 0}$, y el conductor 3-4 es como si no existiera. El circuito equivalente será el representado en la figura 2.ª, y, por tanto, la resistencia equivalente al conjunto será:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 1\ \Omega}$$



Problema XXVIII-49-2.ª

con lo que:

$$\boxed{I = \frac{\in}{R} = 1{,}5\text{ A}}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{r} 1{,}5 = I_1 + I_2 + I_3 \\ 2I_2 = 2I_3 = I_1 \end{array}\right| \quad \boxed{\begin{array}{l} I_1 = 0{,}75\text{ A} \\ I_2 = I_3 = I_4 = I_6 = 0{,}375\text{ A} \end{array}}$$

Problema 50. Un motor eléctrico desarrolla una potencia de 220 W, con un rendimiento de 0,8, cuando funciona sometido a una tensión de 110 V. En estas condiciones calcular:

1. La intensidad de la corriente que atraviesa el motor.
2. La fuerza contraelectromotriz del motor.
3. La resistencia interna del motor.

Solución

1) Potencia suministrada por la línea al motor:

$$P' = (V - V')I = \frac{220}{0{,}8} = 275\text{ W} \quad \Rightarrow \quad 110I = 275 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 2{,}5\text{ A}}$$

2) Potencia mecánica desarrollada por el motor:

$$P'_M = \epsilon' I = 220 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad 2{,}5\epsilon' = 220 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon' = 88 \text{ V}}$$

3) Potencia disipada en forma de calor al motor:

$$P'_Q = I^2 r' = P' - P'_M = 55 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad 2{,}5^2 r' = 55 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r' = 8{,}8\ \Omega}$$

Problema 51. Una bomba, cuyo caudal es de 120 l/min, eleva agua a 6 m de altura. Esta bomba está movida por un motor eléctrico de corriente continua y la diferencia de potencial entre sus bornes es de 220 V.

1. Calcular en kgm/s la potencia útil de la bomba (se despreciarán los rozamientos y las pérdidas de carga).

2. Admitiendo que, como consecuencia de los rozamientos el rendimiento del motor es 0,8, calcular la potencia del motor y la potencia absorbida por los rozamientos.

3. Si el motor está atravesado por una corriente de 1 A, determina: su fuerza contraelectromotriz y su resistencia interior.

4. Potencia suministrada por la red al motor.

5. Rendimiento total de la instalación.

Solución

1)

$$P_U = \frac{Mgh}{t} = \frac{120 \times 9{,}8 \times 6}{60} = 117{,}6 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_U = 12 \text{ kgm/s}}$$

2) Potencia mecánica del motor:

$$\boxed{P'_M = \epsilon' I = \frac{117{,}6}{0{,}8} = 147 \text{ W}}$$

Potencia absorbida por los rozamientos:

$$\boxed{P_Q = P'_M - P_U = (147 - 117{,}6) \text{ W} = 29{,}4 \text{ W}}$$

3)

$$\left.\begin{aligned} P'_M &= \epsilon' I \\ I &= 1 \text{ A} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\epsilon' = 147 \text{ V}}$$

$$V - V' = \epsilon' + Ir' \quad \Rightarrow \quad 220 = 147 + r' \quad \Rightarrow \quad \boxed{r' = 73\ \Omega}$$

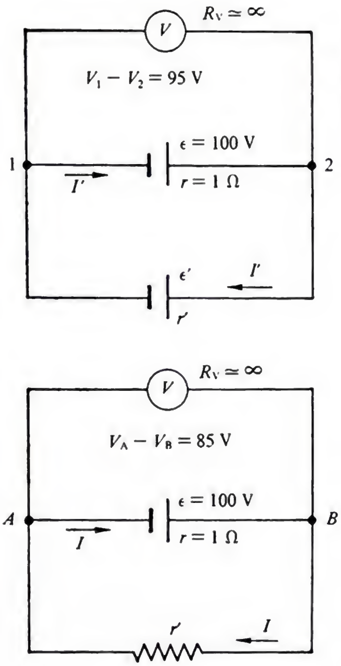
4)

$$\boxed{P = (V - V')I = 220 \text{ W}}$$

5)

$$\eta = \frac{P_U}{P} = \frac{117{,}6}{220} = 0{,}53 \quad \Rightarrow \quad \boxed{53\ \%}$$

Problema 52. Un generador de corriente continua tiene una resistencia interna de 1 Ω y una FEM de 100 V. Se conectan sus bornes simultáneamente a un voltímetro ($R_V \simeq \infty$) y a un motor. Cuando el motor gira en régimen normal el voltímetro marca 95 V, y cuando impedimos el giro del motor, el voltímetro indica 85 V. Calcular:



Problema XXVIII-52

1. La resistencia del motor.
2. La fuerza contraelectromotriz del motor.
3. La potencia del motor.

Solución

No girando el motor:

$$V_A - V_B = \varepsilon - Ir = Ir'$$

$$85 = 100 - I = Ir' \quad \left| \begin{array}{l} I = 15\ \text{A} \\ \boxed{r' = \dfrac{85}{15} = \dfrac{17}{3}\ \Omega} \end{array} \right.$$

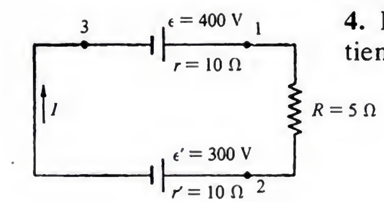
Girando el motor:

$$V_1 - V_2 = \varepsilon - I'r = \varepsilon' + I'r'$$

$$95 = 100 - I' = \varepsilon' + \frac{17}{3} I' \quad \left| \begin{array}{l} I' = 5\ \text{A} \\ \boxed{\varepsilon' = \dfrac{200}{3}\ \text{V}} \end{array} \right.$$

$$\boxed{P'_M = \varepsilon' I = \frac{200}{3}\, 5\ \text{W} = 333{,}3\ \text{W}}$$

Problema 53. Una dinamo tiene una fuerza electromotriz de 400 V y alimenta un motor cuya fuerza contraelectromotriz es de 300 V en régimen normal de funcionamiento, estando unidos entre sí mediante conductores, cuya resistencia total es de 5 Ω. Calcular:
1. La potencia del motor.
2. El rendimiento de la instalación.
3. La diferencia de potencial en los bornes de la dinamo y del motor.
4. La intensidad en el momento del arranque, sabiendo que las dos máquinas tienen una resistencia de 10 Ω cada una.



Problema XXVIII-53

Solución

$$I = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{R + r + r'} = \frac{400 - 300}{25} = 4\ \text{A}$$

1)

$$\boxed{P' = \varepsilon' I = 300 \times 4 = 1\,200\ \text{W}}$$

2)

$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{\varepsilon I}{\varepsilon' I} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{300}{400} = 0{,}75 \Rightarrow \boxed{75\ \%}$$

3)

$$\boxed{V_1 - V_3 = \varepsilon - Ir = (400 - 4 \times 10)\ \text{V} = 360\ \text{V}}$$

$$\boxed{V_2 - V_3 = \varepsilon' + Ir' = (300 + 4 \times 10)\ \text{V} = 340\ \text{V}}$$

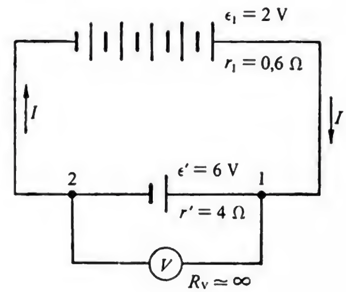
4) En el arranque el motor no gira ($\varepsilon' = 0$) y se considera como resistencia pura:

$$\boxed{I' = \frac{\varepsilon}{R + r + r'} = \frac{400}{25} = 16\ \text{A}}$$

Problema 54. Un circuito está formado por cinco pilas en serie y un pequeño motor. Cada pila tiene una fuerza electromotriz de 2 V y una resistencia interna de 0,6 Ω, el motor tiene una fuerza contraelectromotriz de 6 V y una resistencia de 4 Ω. Determinar:

1. Potencia eléctrica disipada en el motor por efecto Joule.
2. Potencia eléctrica aprovechada mecánicamente.
3. Rendimiento del motor.
4. Se aplica un voltímetro en los bornes del motor ($R_V \simeq \infty$). ¿Qué diferencia de potencial indica?

Solución



Problema XXVIII-54

$$I = \frac{n\epsilon_1 - \epsilon'}{nr_1 + r'} = \frac{10 - 6}{3 + 4} = \frac{4}{7}\ \text{A}$$

1)

$$\boxed{P'_O = I^2 r' = \frac{16}{49}\,4\ \text{W} = 1{,}30\ \text{W}}$$

2)

$$\boxed{P'_M = \epsilon' I = 6\ \frac{4}{7}\ \text{W} = 3{,}42\ \text{W}}$$

3) La potencia suministrada al motor por las pilas es:

$$P' = P'_O + P'_M = 4{,}72\ \text{W} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{3{,}42}{4{,}72} = 0{,}72 \quad \Rightarrow \quad \boxed{72\ \%}$$

4)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \epsilon' + Ir' = \left(6 + \frac{4}{7}\,4\right)\ \text{V} = 8{,}28\ \text{V}}$$

Problema 55. **1.** Un voltímetro de gran resistencia se conecta a los dos bornes de una batería de acumuladores y marca 120 V. ¿Qué representa la indicación de este aparato?
2. Se intercala entre los bornes de la batería anterior una resistencia R; ahora el voltímetro marca 100 V. Calcular la intensidad de la corriente proporcionada por la pila y el valor de la resistencia R, sabiendo que la resistencia interna de la batería es 1 Ω.
3. Sumergimos la resistencia anterior R en agua contenida en un calorímetro cuya capacidad calorífica total equivale a 500 g de agua y su temperatura inicial 15° C. ¿Cuánto tiempo tardará en romper a hervir?
4. Se sustituye la resistencia anterior R por un motor al que impedimos que gire; entonces el voltímetro marca 80 V. Calcular la intensidad de la corriente proporcionada por la batería y la resistencia del motor.
5. Si se deja girar al motor, el voltímetro marca 110 V. ¿Qué intensidad recorre el circuito? ¿Cuánto vale la fuerza contraelectromotriz del motor? ¿Qué potencia desarrolla el motor?

Solución

1) Si la $R_v \rightarrow \infty$ representa la FEM:

$$\boxed{\epsilon = 120\ \text{V}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} V - V' = \in - Ir \\ V - V' = 100 \text{ V} \\ r = 1\ \Omega \end{array}\right| \quad 100 = 120 - I \quad \Rightarrow \boxed{I = 20 \text{ A}}$$

$$V - V' = IR \quad \Rightarrow \quad 100 = 20R \quad \Rightarrow \boxed{R = 5\ \Omega}$$

3)

$$Q = Mc\Delta t = 0{,}24 I^2 R\tau \quad \Rightarrow \quad 500(100 - 15) = 0{,}24 \times 20^2 \times 5\tau \quad \Rightarrow \boxed{\tau = 88{,}5 \text{ s}}$$

4) Si el motor no gira, se comporta como una resistencia pura:

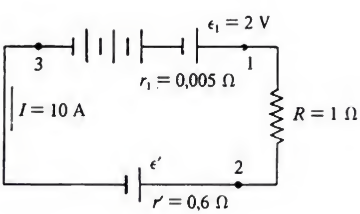
$$\left.\begin{array}{l} V - V' = \in - Ir \\ V - V' = 80 \text{ V} \\ V - V' = Ir' \end{array}\right| \quad \begin{array}{ll} 80 = 120 - I & \Rightarrow \boxed{I = 40 \text{ A}} \\ & \\ 80 = 40r' & \Rightarrow \boxed{r' = 2\ \Omega} \end{array}$$

5)

$$\left.\begin{array}{l} V - V' = \in - Ir \\ V - V' = 110 \text{ V} \\ V - V' = \in' + Ir' \\ P = \in' \text{I} \end{array}\right| \quad \begin{array}{ll} 110 = 120 - I & \Rightarrow \boxed{I = 10 \text{ A}} \\ 110 = \in' + 10 \times 2 & \Rightarrow \boxed{\in' = 90 \text{ V}} \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{P' = 90 \times 10 = 900 \text{ W}}} \end{array}$$

Problema 56. Un circuito eléctrico está formado por los siguientes elementos conectados todos en serie: una batería de acumuladores de 25 elementos, cada uno de 2 V de FEM y de 0,005 Ω de resistencia interna; un motor cuya resistencia interior es de 0,6 Ω, y unos cables de conexión cuya resistencia total es de 1 Ω. Sabiendo que la intensidad de la corriente es de 10 A, calcular:

1. La diferencia de potencial entre los bornes de la batería.
2. La diferencia de potencial entre los bornes del motor.
3. La fuerza contraelectromotriz del motor.
4. La potencia absorbida por los cables de conexión.



Problema XXVIII-56

Solución

1)

$$\boxed{V_1 - V_3 = n\in_1 - Inr_1 = (25 \times 2 - 10 \times 25 \times 0{,}005) \text{ V} = 48{,}75 \text{ V}}$$

2) y 3)

$$I = \frac{n\in_1 - \in'}{R + nr_1 + r'} \quad \Rightarrow \quad 10 = \frac{25 \times 2 - \in'}{1 + 25 \times 0{,}005 + 0{,}6} \quad \Rightarrow \boxed{\in' = 32{,}75 \text{ V}}$$

$$\boxed{V_2 - V_3 = \in' + Ir' = (32{,}75 + 10 \times 0{,}6) \text{ V} = 38{,}75 \text{ V}}$$

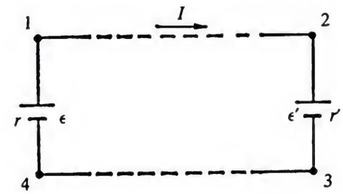
4)

$$\boxed{P = I^2 R = 100 \text{ W}}$$

Problema 57. Una dinamo, cuya tensión en los bornes es de 220 V, acciona un motor situado a 1 km y cuya tensión en los bornes es 190 V.

1. ¿Cuál debe ser la resistencia de la línea para que la dinamo suministre 20 kW?

2. ¿Cuál debe ser la sección del hilo de la línea, sabiendo que es de cobre, de resistividad $1{,}6 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$?
3. ¿Cuál es la relación entre la potencia que recibe el motor y la que suministra la dinamo?



Problema XXVIII-57

Solución

1) Potencia suministrada por la dinamo:

$$P = (V_1 - V_4)I = 2 \times 10^4 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{2 \times 10^4}{220} \text{ A} = 90{,}91 \text{ A}$$

Potencia recibida por el motor:

$$P' = (V_2 - V_3)I = \frac{190 \times 2 \times 10^4}{220} \text{ W} = 17{,}27 \text{ kW}$$

Potencia en forma de calor en la línea:

$$P'' = I^2R = P - P' \quad \Rightarrow \quad \frac{4 \times 10^8}{220^2} R = 2 \times 10^4 - \frac{190 \times 2 \times 10^4}{220} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 0{,}33\ \Omega}$$

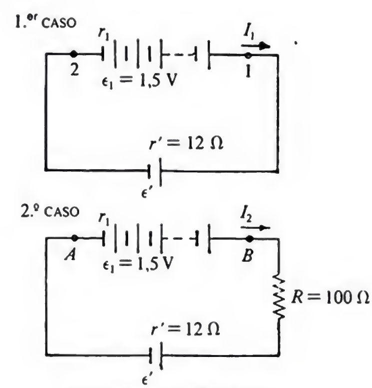
2) La longitud de la línea (ida y vuelta) son 2 000 m:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 0{,}33 = 1{,}6 \times 10^{-6} \frac{2 \times 10^5}{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 1 \text{ cm}^2}$$

3)

$$\eta = \frac{P'}{P} = \frac{V_2 - V_3}{V_1 - V_4} = \frac{190}{220} \simeq 0{,}86 \quad \Rightarrow \quad \boxed{86\ \%}$$

Problema 58. Una batería formada por 160 pilas iguales de FEM 1,5 V cada una asociadas en serie, suministra corriente a un circuito formado por un cable de resistencia despreciable y en el que hay un motor de resistencia 12 Ω que produce, con un rendimiento del 80 %, una potencia de 0,5 CV. Calcular:
1. La intensidad de la corriente.
2. La resistencia interna de cada una de las pilas que forman la batería.
3. La tensión en bornes de la batería.
4. La potencia que produciría el motor si en el circuito se intercalan en serie una resistencia de 100 Ω, y la tensión en bornes que se obtendrá en la batería.



Problema XXVIII-58

Solución

1.er CASO:

1) Potencia mecánica del motor en W:

$$P'_{M_1} = \epsilon' I_1 = 0{,}5 \text{ CV} = 0{,}5 \times 75 \times 9{,}8 = 367{,}5 \text{ W}$$

Potencia suministrada al motor:

$$P'_1 = (V_1 - V_2)I_1 = \frac{0{,}5 \times 75 \times 9{,}8}{0{,}8} = 459{,}375 \text{ W}$$

Potencia disipada en forma de calor en el motor:

$$P_{Q_1} = I_1^2 r' = P'_1 - P'_{M_1} = 91{,}875 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = \sqrt{\frac{91{,}875}{12}} = 2{,}76 \text{ A}}$$

2) Potencia generada por la batería:

$$P_1 = \mathcal{E} I_1 = n\mathcal{E}_1 I_1 = 160 \times 1{,}5 \times 2{,}76 = 664{,}08 \text{ W}$$

Potencia disipada en forma de calor en la batería:

$$P_{Q_1} = I_1^2 r = I_1^2 n r_1 = P_1 - P'_1 = 664{,}08 - 459{,}375 = 204{,}70 \text{ W} \Rightarrow$$

$$r = \frac{204{,}70}{2{,}76^2} = 26{,}87 \ \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_1 = \frac{26{,}87}{160} = 0{,}17 \ \Omega}$$

3)

$$\boxed{V_1 - V_2 = n\mathcal{E}_1 - I_1 n r_1 = 160 \times 1{,}5 - 2{,}76 \times 26{,}87 \text{ V} = 165{,}84 \text{ V}}$$

2.° CASO:

4) De la potencia suministrada al motor en el primer caso calculamos su fuerza contraelectromotriz:

$$P'_{M_1} = \mathcal{E}' I_1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}' = \frac{367{,}5}{2{,}76} = 133{,}15 \text{ V}$$

La intensidad en el circuito en este segundo caso es:

$$I_2 = \frac{n\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'}{R + n r_1 + r} = \frac{160 \times 1{,}5 - 133{,}15}{100 + 26{,}87 + 12} = 0{,}77 \text{ A}$$

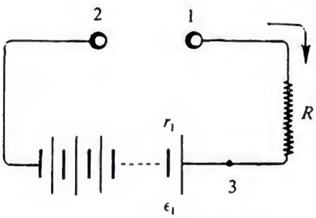
La potencia mecánica del motor es en este segundo caso:

$$\boxed{P'_{M_2} = \mathcal{E}' I_2 = 133{,}15 \times 0{,}77 = 102{,}525 \text{ W} = 0{,}14 \text{ CV}}$$

La diferencia de potencial en la batería es, en este caso:

$$\boxed{V_A - V_B = n\mathcal{E}_1 - I_2 n r_1 = (160 \times 1{,}5 - 0{,}77 \times 26{,}87) \text{ V} = 219{,}31 \text{ V}}$$

Problema 59. Una batería formada por 60 acumuladores es cargada utilizando una fuente de corriente continua de 115 V. La corriente de carga debe ser de 2,5 A. Sabiendo que inicialmente la FEM de cada elemento es 1,2 V y la resistencia interna individual de 0,02 Ω, determinar la resistencia del reóstato que debe conectarse entre la fuente y la batería.



Problema XXVIII-59

Solución

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - V_2 = 115 \text{ V} \\ \mathcal{E} = 60 \times 1{,}2 = 72 \text{ V} \\ r = 60 \times 0{,}02 = 1{,}2 \ \Omega \end{array}\right| \begin{array}{l} V_3 - V_2 = \mathcal{E} + Ir = 72 + 2{,}5 \times 1{,}2 = 75 \text{ V} \\ \Rightarrow V_1 - V_3 = (V_1 - V_2) - (V_3 - V_2) = 115 - 75 = 40 \text{ V} \\ (V_1 - V_3) = IR \Rightarrow 40 = 2{,}5R \Rightarrow \boxed{R = 16 \ \Omega} \end{array}$$

Problema 60. Para cargar un acumulador empleamos una corriente de 10 A durante 12 h bajo una tensión de 2,4 V. En la descarga nos proporciona una intensidad de 6 A durante 18 h, bajo una tensión de 2 V. La corriente utilizada en la carga la pagamos a 6 ptas el kW · h. Calcular:

1. La energía absorbida en la carga.
2. La capacidad del acumulador en A · h y en C.
3. El rendimiento del mismo.
4. ¿A qué precio nos sale el kW · h de utilización en la descarga?

Solución

1) La energía suministrada por la red en el proceso de carga es:

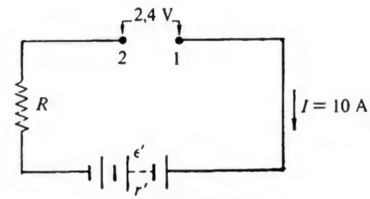
$$\boxed{W = (V_1 - V_2)It = \frac{2{,}4 \times 10}{10^3}\ 12\ \text{kW} \cdot \text{h} = 0{,}288\ \text{kW} \cdot \text{h}}$$

La carga suministrada por la red es:

$$Q = 10 \times 12 = 120\ \text{A} \cdot \text{h}$$

2) En la descarga proporciona (capacidad del acumulador o carga utilizable):

$$\boxed{Q' = 6 \times 18 = 108\ \text{A} \cdot \text{h} = 108 \times 3\,600\ \text{C}}$$



Problema XXVIII-60

3)

$$\eta = \frac{Q'}{Q} = \frac{108}{120} = 0{,}90 \quad \Rightarrow \boxed{90\ \%}$$

4) La energía utilizada en el proceso de carga ha costado:

$$C = 0{,}288 \times 6 = 1{,}72\ \text{ptas}$$

La energía proporcionada en la descarga es:

$$W' = \frac{2 \times 6}{10^3}\ 18 = 0{,}216\ \text{kW} \cdot \text{h}$$

que cuesta 1,72 ptas. Luego si:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}216\ \text{kW} \cdot \text{h cuestan } 1{,}72\ \text{ptas} \\ 1\ \text{kW} \cdot \text{h} \quad \text{»} \quad C \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{C = \frac{1{,}72}{0{,}216} = 7{,}96\ \text{ptas}}$$

Problema 61. Con un motor se hace funcionar un montacargas, capaz de elevar un peso de 300 kg a 20 m de altura, con una velocidad constante de 0,5 m/s, siendo el rendimiento de la instalación del 80 %. Calcular:
1. La potencia del motor.
2. El aumento de temperatura que experimentará una mezcla de 1 kg de hielo y 2 kg de agua al comunicarle un calor equivalente a la energía mecánica, no empleada en trabajo útil en 100 ascensiones.
3. Siendo la diferencia de potencial en los bornes del motor de 150 V y la intensidad de la corriente de 10 A, determinar su resistencia eléctrica.
4. Si no existiera resistencia de arranque, calcular la intensidad de corriente inicial.

Solución

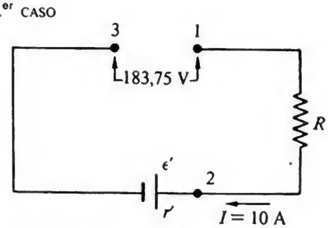
Resolvemos primero los apartados puramente eléctricos (1, 3, 4), para una mayor uniformidad del razonamiento.

1.^{er} CASO:

1) Potencia efectiva del motor:

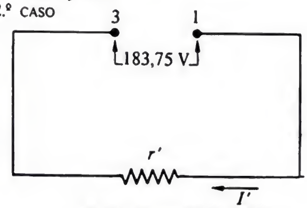
$$\boxed{P'_{\text{M}} = \epsilon' I = Fv = Mgv = 300 \times 9{,}8 \times 0{,}5\ \text{W} = 1\,470\ \text{W}}$$

1.er CASO



R = Resistencia al arranque
$V_1 - V_3 = 150$ V

2.º CASO



Problema XXVIII-61

Potencia suministrada por la línea al motor:

$$P' = (V_1 - V_3)I = \frac{1\,470}{0{,}8} = 1\,837{,}5 \text{ W}$$

Potencia disipada en forma de calor en el motor y en la resistencia al arranque es:

$$P'_Q = P' - P'_M = 1\,837{,}5 - 1\,470 = 367{,}5 \text{ W}$$

3)

$$V_2 - V_3 = \epsilon' + Ir' \quad \left|\; \begin{aligned} &V_2 - V_3 = 150 \text{ V} \\ &I = 10 \text{ A} \\ &P'_M = \epsilon' I = 1\,470 \text{ W} \end{aligned} \;\right| \; \begin{aligned} &\epsilon' = 147 \text{ V} \\ &150 = 147 + 10r' \end{aligned} \;\left|\; \boxed{r' = 0{,}3\ \Omega} \right.$$

2.º CASO:

4) El motor inicialmente no gira y se comporta como una resistencia pura; luego:

$$\begin{aligned} &I' = \frac{V_1 - V_3}{r'} \\ &P' = (V_1 - V_3)I = 1\,837{,}5 \text{ W} \\ &I = 10 \text{ A} \end{aligned} \;\left|\; \begin{aligned} &V_1 - V_3 = 183{,}75 \text{ V} \\ &\boxed{I' = \frac{183{,}75}{0{,}3} = 612{,}5 \text{ A}} \end{aligned} \right.$$

2) El tiempo empleado en 100 ascensiones es:

$$\tau = \frac{100h}{v} = \frac{100 \times 20}{0{,}5} = 4 \times 10^3 \text{ s}$$

Como la potencia no empleada en energía mecánica era:

$$P'_Q = 367{,}5 \text{ W} \quad \Rightarrow \quad W = P'_Q \tau = 367{,}5 \times 4 \times 10^3 \text{ J}$$

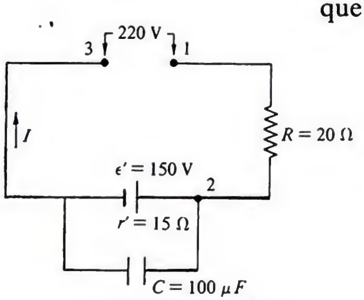
equivalentes a:

$$Q = 0{,}24 \times 367{,}5 \times 4 \times 10^3 \text{ cal}$$

que se emplean en fundir 1 kg de hielo y elevar a una temperatura t los 3 kg de agua:

$$0{,}24 \times 367{,}5 \times 4 \times 10^3 = 10^3 \times 80 + 3 \times 10^3 t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 91° \text{ C}}$$

Problema 62. Se conecta a la red de distribución industrial (220 V) un motor de fuerza contraelectromotriz de 150 V y 15 Ω de resistencia interna mediante cables de conexión de 20 Ω. Para obtener una intensidad lo más homogénea posible para pequeñas variaciones del potencial de la red se dispone en paralelo con el motor una batería de condensadores de 100 μF de capacidad. Calcúlese la energía que acumula el condensador.



Problema XXVIII-62

Solución

$$U = \frac{1}{2} C (V_2 - V_3)^2$$

Se trata de calcular la diferencia de potencial en bornes del motor:

$$\begin{aligned} &I = \frac{(V_1 - V_3) - \epsilon'}{R + r'} = \frac{220 - 150}{20 + 15} = 2 \text{ A} \\ &V_2 - V_3 = \epsilon' + Ir' = 150 + 2 \times 15 = 180 \text{ V} \end{aligned} \;\left|\; \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\, 10^{-4} \times 180^2 = 1{,}62 \text{ J}} \right.$$

C) LEYES DE KIRCHHOFF

FORMULARIO

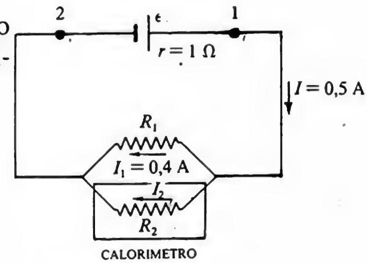
LEYES DE KIRCHHOFF:

NUDOS: $\Sigma I_i = 0$

MALLAS: $\Sigma IR = \Sigma \epsilon$

Problema 63. Dos resistencias están montadas en derivación en un circuito cuya corriente principal es de 0,5 A. Una de las resistencias está en el interior de un calorímetro, produciendo 288 cal en 10 min.

1. Sabiendo que la intensidad de la corriente que pasa por la otra resistencia es de 0,4 A, calcular el valor de la resistencia introducida en el calorímetro.
2. Calcular la resistencia equivalente a las dos montadas en derivación.
3. Calcular la FEM del generador capaz de mantener en el circuito la intensidad de 0,5 A, siendo su resistencia interior de 1 Ω.
4. Si se sustituyen las dos resistencias en derivación por un conductor cilíndrico de 32,805 g, calcular su longitud para que no se modifique su intensidad. Resistividad del conductor, $1{,}8 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \mathrm{cm}$; densidad del metal, 9 g/cm³.



Problema XXVIII-63

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} I &= 0{,}5\ \mathrm{A} \\ I_1 &= 0{,}4\ \mathrm{A} \end{aligned}\right| \quad I = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 0{,}1\ \mathrm{A}$$

$$Q = 0{,}24 I_2^2 R_2 t \quad \Rightarrow \quad 288 = 0{,}24 \times 0{,}1^2 R_2 600 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_2 = 200\ \Omega}$$

2)

$$I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}4 R_1 = 0{,}1 \times 200 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 50\ \Omega$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{50} + \frac{1}{200} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 40\ \Omega}$$

3)

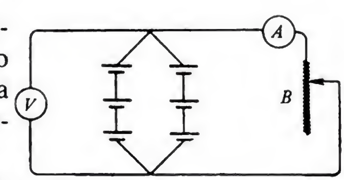
$$I = \frac{\epsilon}{R + r} \quad \Rightarrow \quad \epsilon = I(R + r) = 20{,}5\ \mathrm{V}$$

4)

$$\left.\begin{aligned} R &= \rho \frac{l}{A} \\ M &= lAd \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad RM = \rho l^2 d \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = \sqrt{\frac{RM}{\rho d}} = \sqrt{\frac{40 \times 32{,}805}{1{,}8 \times 10^{-6} \times 9}} = 9\,000\ \mathrm{cm} = 90\ \mathrm{m}}$$

Problema 64. En el circuito de la figura las seis pilas son iguales; V es un voltímetro cuya resistencia es tan grande que se puede despreciar la intensidad que lo atraviesa; A es un amperímetro y B es un reóstato que nos permite variar la intensidad. Cuando el amperímetro marca 1 A, el voltímetro marca 3 V, y cuando el amperímetro marca 2 A, el voltímetro marca 1,5 V. Calcular:

1. La fuerza electromotriz y la resistencia interna del conjunto de las seis pilas.
2. La fuerza electromotriz y la resistencia interna de cada pila.



Problema XXVIII-64

Solución

$$\begin{array}{l|l} I_1 = 1\ \text{A} & V_1 = 3\ \text{V} \\ I_2 = 2\ \text{A} & V_2 = 1{,}5\ \text{V} \end{array}$$

1)

$$\begin{array}{l|l|l} V_1 = \epsilon - I_1 r & 3 = \epsilon - r & \boxed{\epsilon = 4{,}5\ \text{V}} \\ V_2 = \epsilon - I_2 r & 1{,}5 = \epsilon - 2r & \boxed{r = 1{,}5\ \Omega} \end{array}$$

2) Calculamos primero la resistencia interna de cada generador:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{3r_1} + \frac{1}{3r_1} = \frac{2}{3r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3r_1} \quad \Rightarrow \boxed{r_1 = 1\ \Omega}$$

En la primera experiencia la resistencia externa intercalada en el circuito es:

$$R_1 = \frac{V_1}{I_1} = 3\ \Omega$$

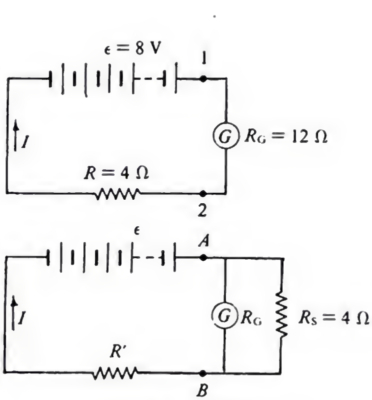
Aplicando el segundo lema de Kirchhoff:

$$0{,}5 \times 3 \times 1 + 1 \times 3 = 3\epsilon_1 \quad \Rightarrow \boxed{\epsilon_1 = 1{,}5\ \text{V}}$$

Problema 65. Una batería de pilas cuya FEM $\epsilon = 8$ V y cuya resistencia interior es despreciable, cerrada sobre un circuito constituido por una resistencia $R = 4\ \Omega$ y por un galvanómetro $R_G = 12\ \Omega$, da una corriente de intensidad I en el circuito. Se shunta el galvanómetro con una derivación de resistencia $R_S = 4\ \Omega$ y se hace variar la resistencia del circuito de manera que se obtenga la misma intensidad que anteriormente en la porción del circuito que contiene la pila. Se pide:

1. Determinar el valor nuevo de la resistencia R'.
2. Determinar el valor de la intensidad I_G en el galvanómetro e I_S en el shunt.
3. Determinar la caída de potencial V en los bornes del galvanómetro.

Solución



Problema XXVIII-65

1) y 2)

$$I = \frac{\epsilon}{R + R_G} = \frac{8}{16} = 0{,}5\ \text{A}$$

Lemas de Kirchhoff al segundo circuito:

$$\begin{array}{l|l} 0{,}5 = I_G + I_S & \boxed{R' = 13\ \Omega} \\ 0{,}5R' + 12 I_G = 8 & \boxed{I_G = 0{,}125\ \text{A}} \\ 0{,}5R' + 4 I_S = 8 & \boxed{I_S = 0{,}375\ \text{A}} \end{array}$$

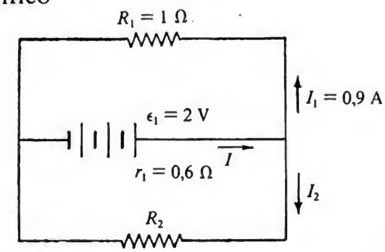
3) Primer caso:

$$\boxed{V_1 - V_2 = I R_G = 0{,}5 \times 12 = 6\ \text{V}}$$

Segundo caso:

$$\boxed{V_A - V_B = I_G R_G = 0{,}125 \times 12 = 1{,}5\ \text{V}}$$

Problema 66. Se montan en serie tres acumuladores de 2 V de FEM cuya resistencia interna es de 0,6 Ω en cada uno de ellos, y se disponen en un circuito con dos resistencias en derivación, una de las cuales tiene 1 Ω de resistencia y la recorre una corriente de 0,9 A. Calcular:
1. El valor de la otra resistencia.
2. La intensidad de la corriente que circula por dicha resistencia.
3. Si se comunica el calor desarrollado por esta resistencia durante 30 min a una mezcla de 100 g de agua y 5 g de hielo, determinar la temperatura final.
4. Si el calor desarrollado en 10 min se comunica a un trozo de plata de 500 g, calcular la elevación de temperatura producida, sabiendo que el calor específico de la plata es 0,056 cal/g · °C.



Problema XXVIII-66

Solución

1) y 2) Lemas de Kirchhoff:

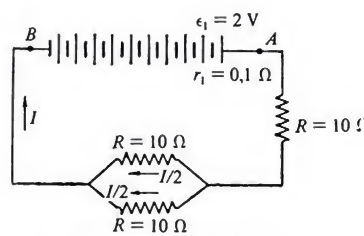
$$I = 0,9 + I_2 \qquad I = 2,84 \text{ A}$$
$$I3 \times 0,6 + 0,9 \times 1 = 3 \times 2 \qquad \boxed{I_2 = 1,94 \text{ A}}$$
$$I3 \times 0,6 + I_2R_2 = 3 \times 2 \qquad \boxed{R_2 = 0,45\ \Omega}$$

3)
$$Q = 0,24 I_2^2 R_2 \tau = 0,24 \times 1,94^2 \times 0,45 \times 30 \times 60 = 731 \text{ cal}$$
$$731 = 400 + 105t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 3,1° \text{ C}}$$

4)
$$Q' = 0,24 I_2^2 R_2 \tau' = 0,24 \times 1,94^2 \times 0,45 \times 10 \times 60 = 243,7 \text{ cal}$$
$$243,7 = 500 \times 0,056 \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 8,7° \text{ C}}$$

Problema 67. Una batería formada por 10 pilas iguales, de 2 V de fuerza electromotriz y 0,1 Ω de resistencia interna cada una, se unen a un conjunto de tres resistencias iguales de 10 Ω cada una, montadas una de ellas en serie con las otras dos en paralelo. Determinar:
1. Diferencia de potencial entre los bornes extremos de la batería.
2. Cantidad de calor que en cada hora se desarrolla dentro de la batería.
3. Intensidad de la corriente que atraviesa una de las dos resistencias montadas en paralelo.

Solución



Problema XXVIII-67

1) Aplicando las leyes de Kichhoff:

$$Inr_1 + IR + \frac{I}{2} R = n\epsilon \quad \Rightarrow \quad I + 10I + 5I = 20 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{5}{4} \text{ A}$$

$$\boxed{V_A - V_B = n\epsilon_1 - Inr_1 = \left(20 - \frac{5}{4}\right) V = 18,75 \text{ V}}$$

2)
$$\boxed{Q = 0,24 I^2 nr_1 t = 0,24 \frac{25}{16} 3\,600 \text{ cal} = 1\,350 \text{ cal}}$$

3)
$$\boxed{I' = \frac{I}{2} = \frac{5}{8} \text{ A}}$$

Problema 68. **1.** Una bobina B tiene una longitud de 60 cm y comprende 504 espiras y tiene una resistencia de 4,4 Ω. Está constituida por un hilo de 1 mm^2 de sección, cuya resistividad es de $1{,}6 \times 10^{-6}$ Ω · cm. Calcular la longitud del hilo.
2. Tres resistencias $r_1 = 63$ Ω, $r_2 = 27$ Ω y $r_3 = x$, se montan en paralelo para tener una resistencia equivalente a $R = 6{,}3$ Ω. Calcular x.
3. La bobina B y la resistencia R se montan en serie conectadas a los bornes de una batería de acumuladores, cuya fuerza electromotriz es 54 V y cuya resistencia interior es $r = 0{,}1$ Ω. Calcular la resistencia total del circuito y la intensidad de la corriente en la bobina B y en las tres resistencias r_1, r_2 y r_3.

Solución

1)

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow 4{,}4 = 1{,}6 \times 10^{-6} \frac{l}{10^{-2}} \Rightarrow \boxed{l = 275 \times 10^2 \text{ cm} = 275 \text{ m}}$$

2)

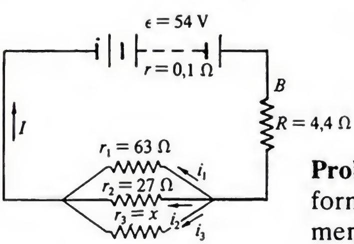
$$\frac{1}{6{,}3} = \frac{1}{63} + \frac{1}{27} + \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{x = 9{,}45\ \Omega}$$

3)

$$R_T = (4{,}4 + 0{,}1 + 6{,}3)\ \Omega \Rightarrow \boxed{R_T = 10{,}8\ \Omega}$$

Lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{l} I = i_1 + i_2 + i_3 \\ 4{,}5I + 63i_1 = 54 \\ 4{,}5I + 27i_2 = 54 \\ 4{,}5I + 9{,}45i_3 = 54 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \boxed{I = 5 \text{ A}} \\ \boxed{i_1 = 0{,}50 \text{ A}} \\ \boxed{i_2 = 1{,}17 \text{ A}} \\ \boxed{i_3 = 3{,}33 \text{ A}} \end{array}$$



Problema XXVIII-68

Problema 69. Una pila de 4 V de FEM y 0,5 Ω de resistencia interna se coloca formando circuito con cuatro lámparas de resistencias 1, 2, 3 y 4 Ω, respectivamente. Las tres primeras en derivación y la cuarta en serie con el grupo. Calcular:
1. Resistencia equivalente del conjunto.
2. Intensidad de la corriente a través de la pila y en cada lámpara.
3. Diferencia de potencial entre los bornes de la pila y entre los de cada una de las lámparas.
4. Potencia suministrada por la pila y su distribución.

Solución

1) La resistencia equivalente a las tres en derivación es:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \Rightarrow R' = \frac{6}{11}\ \Omega$$

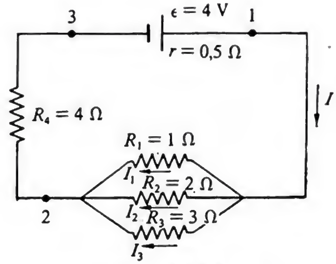
luego la resistencia total del circuito es:

$$\boxed{R = R_4 + R' + r = \left(4 + \frac{6}{11} + 0{,}5\right)\ \Omega = \frac{55{,}5}{11}\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{I = \frac{\in}{R} = \frac{4 \times 11}{55,5} = \frac{44}{55,5}\ \mathrm{A}}$$

Aplicando las leyes de Kirchhoff:



Problema XXVIII-69

$$Ir + IR_4 + I_1R_1 = \in \quad \Bigg| \quad \frac{44}{55,5}\,4,5 + I_1 = 4 \quad \Bigg| \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{24}{55,5}\ \mathrm{A}}$$

$$Ir + IR_4 + I_2R_2 = \in \quad \Bigg| \quad \frac{44}{55,5}\,4,5 + 2I_2 = 4 \quad \Bigg| \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{12}{55,5}\ \mathrm{A}}$$

$$Ir + IR_4 + I_3R_3 = \in \quad \Bigg| \quad \frac{44}{55,5}\,4,5 + 3I_3 = 4 \quad \Bigg| \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{8}{55,5}\ \mathrm{A}}$$

3)

$$\boxed{V_1 - V_3 = \in - Ir = 4 - \frac{44}{55,5}\,0,5 = \frac{200}{55,5}\ \mathrm{V}}$$

$$\boxed{V_1 - V_2 = I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3 = \frac{24}{55,5}\ \mathrm{V}}$$

$$\boxed{V_2 - V_3 = IR_4 = \frac{44}{55,5}\,4 = \frac{176}{55,5}\ \mathrm{V}}$$

4) Potencia suministrada por la pila:

$$\boxed{P = \in I = 4\,\frac{44}{55,5} = \frac{176}{55,5}\ \mathrm{W}}$$

que se distribuye en forma de calor en ella misma y en las resistencias externas:

$$P_O = I^2r = \left(\frac{44}{55,5}\right)^2 0,5\ \mathrm{W}$$

$$P_1 = I_1^2R_1 = \left(\frac{24}{55,5}\right)^2\ \mathrm{W}$$

$$P_2 = I_2^2R_2 = \left(\frac{12}{55,5}\right)^2 2\ \mathrm{W}$$

$$P_3 = I_3^2R_3 = \left(\frac{8}{55,5}\right)^2 3\ \mathrm{W}$$

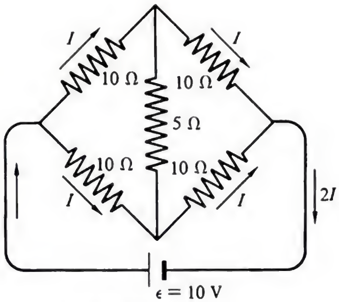
$$P_4 = I^2R_4 = \left(\frac{44}{55,5}\right)^2 4\ \mathrm{W}$$

COMPROBACIÓN:

$$P_O + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{44^2 \times 0,5 + 24^2 + 12^2 \times 2 + 8^2 \times 3 + 44^2 \times 4}{55,5^2} = \frac{9\,768}{55,5^2} = \frac{176}{55,5} = P$$

Problema 70. Cuatro resistencias iguales, de 10 Ω cada una, se unen formando un cuadro; uniendo dos vértices opuestos se coloca otra resistencia de 5 Ω y los otros dos vértices se unen a los polos de una pila de 10 V de FEM y resistencia interna despreciable. Determinar:

1. La resistencia equivalente del conjunto de las resistencias.
2. Intensidad de la corriente que pasa por la resistencia de 5 Ω.
3. Intensidad de la corriente que pasa por la pila.



Problema XXVIII-70

Solución

Al ser el producto de dos resistencias opuestas igual al de las otras dos, el puente está en equilibrio y $\boxed{\text{por la resistencia de 5 Ω no pasa corriente.}}$ Las intensidades en las cuatro resistencias de 10 Ω son iguales (I) y por el generador circula una intensidad $2I$.

Aplicando el segundo lema de Kirchhoff se obtiene:

$$10I + 10I = 10 \quad \Rightarrow \quad I = 0{,}5 \text{ A}$$

La intensidad de la corriente por la pila será:

$$\boxed{I_p = 2I = 1 \text{ A}}$$

En el circuito equivalente:

$$I_p = \frac{\epsilon}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{\epsilon}{I_p} = 10 \ \Omega}$$

Problema 71. Cuatro resistencias de 8 Ω cada una se unen formando un cuadrado. Uniendo dos vértices se coloca otra resistencia de 4 Ω. Los otros dos vértices se unen a los bornes de un generador de 30 V y 0,5 Ω de resistencia interna. Calcular:

1. Resistencia equivalente del conjunto.

2. Intensidades de la corriente en cada resistencia y en la pila.

3. Diferencia de potencial entre los vértices opuestos del cuadrado cuando se conectan con el generador.

4. Potencia suministrada por el generador y su distribución.

Solución

1 y 2) Al ser el producto de dos resistencias igual al de las otras dos, el puente está en equilibrio y $\boxed{\text{por la resistencia de 4 Ω no pasa corriente.}}$ Las intensidades en las resistencias de 8 Ω son iguales (I) y por el generador cicula una intensidad $2I$.

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, se obtiene:

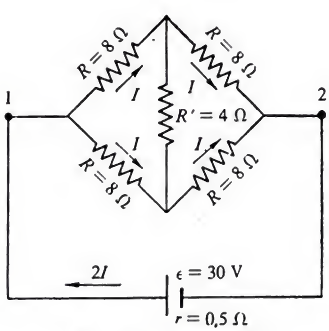
$$8I + 8I + 0{,}5 \times 2I = 30 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{30}{17} \text{ A}}$$

La intensidad en el generador es:

$$\boxed{I_G = 2I = \frac{60}{17} \text{ A}}$$

Si llamamos R_e a la resistencia equivalente a las 4 de 8 Ω y la de 4 Ω (que, en definitiva, es como si no existiese), obtenemos:

$$I_G = \frac{\epsilon}{R_e + r} \quad \Rightarrow \quad \frac{60}{17} = \frac{30}{R_e + 0{,}5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_e = 8 \ \Omega}$$



Problema XXVIII-71

3)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \epsilon - I_G r = 30 - \frac{60}{17} 0{,}5 = 28{,}23 \text{ V}}$$

4) El generador suministra:

$$\boxed{P = \epsilon I_G = 30 \ \frac{60}{17} = \frac{1\,800}{17} \text{ W}}$$

que se distribuye en su resistencia interna y en cada una de las de 8 Ω:

$$P_r = I_G^2 r = \left(\frac{60}{17}\right)^2 0{,}5 = \frac{1\,800}{17^2}\ \text{W}$$

a cada una de las de 8 Ω le corresponde:

$$P_1 = I^2 R = \left(\frac{30}{17}\right)^2 8 = \frac{7\,200}{17^2}\ \text{W}$$

a las cuatro:

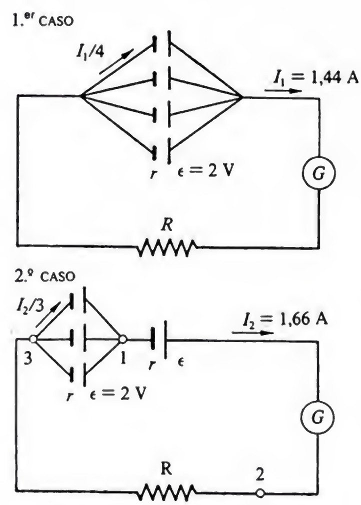
$$P_4 = 4\,\frac{7\,200}{17^2} = \frac{28\,800}{17^2}\ \text{W}$$

COMPROBACIÓN:

$$P_4 + P_r = \frac{28\,000 +\text{-} 1\,800}{17^2} = \frac{30\,600}{17^2} = \frac{1\,800}{17}\ \text{W} = P_G$$

Problema 72. Se toman cuatro pilas iguales cuya fuerza electromotriz es de 2 V cada una, en paralelo, y se cierra el circuito intercalando una resistencia y un amperímetro; éste señala una corriente de 1,14 A (primer caso). Se asocian tres de las pilas anteriores en paralelo y la pila restante en serie; se cierra el circuito intercalando la misma resistencia que en el caso anterior y el amperímetro; éste señala una corriente de 1,66 A (segundo caso). ¿Cuál es la resistencia interior de cada pila? ¿Cuál es la resistencia exterior? En el caso segundo ¿qué diferencia de potencial marcaría un voltímetro colocado en derivación:

1. sobre los extremos de la resistencia exterior;
2. sobre los polos de la pila que se halla en serie;
3. sobre los polos de una de las pilas asociadas en paralelo?



Problema XXVIII-72

Solución

Aplicando el segundo lema de Kirchhoff a los dos casos, se obtiene:

$$I_1 R + \frac{I_1}{4} r = \epsilon \qquad 1{,}14R + \frac{1{,}14}{4} r = 2 \qquad \boxed{r = 0{,}6\ \Omega}$$

$$I_2(R + r) + \frac{I_2}{3} r = 2\epsilon \qquad 1{,}66(R + r) + \frac{1{,}66}{3} r = 4 \qquad \boxed{R = 1{,}6\ \Omega}$$

1)

$$\boxed{V_2 - V_3 = I_2 R = 1{,}66 \times 1{,}6 = 2{,}65\ \text{V}}$$

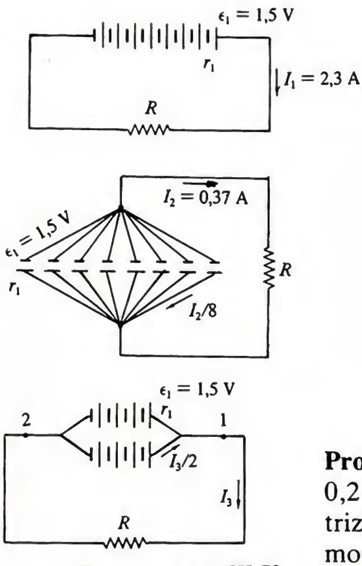
2)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \epsilon - I_2 r = 2 - 1{,}66 \times 0{,}6 = 1{,}00\ \text{V}}$$

3)

$$\boxed{V_1 - V_3 = \epsilon - \frac{I_2}{3} r = 2 - \frac{1{,}66}{3} 0{,}6 = 1{,}66\ \text{V}}$$

Problema 73. Se asocian en serie ocho pilas iguales; cada una tiene una FEM de 1,5 V. Si se cierra el circuito mediante un conductor de resistencia R, se obtiene una intensidad de 2,3 A. Asociándolas luego todas en paralelo y cerrando el circuito con la misma resistencia R, se obtiene una intensidad de 0,37 A. Calcular:
1. El valor de R.
2. La resistencia interior de cada pila.
3. La intensidad que se obtendría disponiendo las ocho pilas en dos series de a cuatro, ambas series en paralelo, suponiendo que la resistencia exterior es la misma R que antes.
4. La diferencia de potencial entre los extremos de R en el caso 3.
5. Dibujar los esquemas de los circuitos anteriores.



Problema XXVIII-73

Solución

1) y 2)

$$I_1 = \frac{n\epsilon_1}{R + 8r_1} \qquad 2{,}3 = \frac{8 \times 1{,}5}{R + 8r_1} \qquad \boxed{r_1 \simeq 0{,}15\ \Omega}$$

$$I_2R + \frac{I_2}{8}\,r_1 = \epsilon_1 \qquad 0{,}37R + \frac{0{,}37}{8}\,r_1 = 1{,}5 \qquad \boxed{R \simeq 4\ \Omega}$$

3)

$$I_3R + \frac{I_3}{2}\,4r_1 = 4\epsilon_1 \quad \Rightarrow \quad 4I_3 + \frac{4 \times 0{,}15}{2}\,I_3 = 4 \times 1{,}5 \quad \Rightarrow \boxed{I_3 \simeq 1{,}4\ \text{A}}$$

4)

$$V_1 - V_2 = I_3R \quad \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = 1{,}4 \times 4 = 5{,}6\ \text{V}}$$

Problema 74. Una pila de 3 V de fuerza electromotriz y resistencia interior de 0,2 Ω, une su polo positivo con el polo positivo de otra pila de fuerza electromotriz 1,5 V y resistencia interior de 0,1 Ω. Los polos negativos se unen a los extremos de una derivación de dos resistencias, una de 4 y otra de 6 Ω. Determinar:
1. Intensidad total de la corriente que circula.
2. Diferencia de potencial entre los polos de la primera pila.
3. Calor desprendido en 1 h en la resistencia de 6 Ω.

Solución

1) Lemas de Kirchhoff:

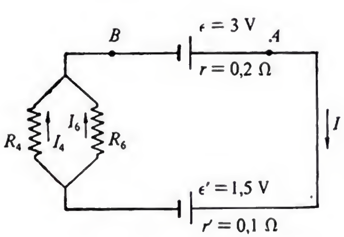
$$\begin{array}{l|l} & \boxed{I = \dfrac{5}{9}\ \text{A}} \\ 0{,}3I + 4I_4 = 1{,}5 & \\ 0{,}3I + 6I_6 = 1{,}5 & I_4 = \dfrac{1}{3}\ \text{A} \\ I = I_4 + I_6 & \\ & I_6 = \dfrac{2}{9}\ \text{A} \end{array}$$

2)

$$\boxed{V_A - V_B = \epsilon - Ir = \left(3 - \frac{5}{9}\,0{,}2\right)\ \text{V} = 2{,}89\ \text{V}}$$

3)

$$\boxed{Q = 0{,}24\,I_6^2R_6t = 0{,}24\,\frac{4}{81}\,6 \times 3\,600\ \text{cal} = 256\ \text{cal}}$$



Problema XXVIII-74

Problema 75. Los dos polos, A y B, de un generador, G, se reúnen por medio de dos derivaciones. La ACB es un hilo metálico de resistencia constante $r = 15\ \Omega$. La otra, AMB, de resistencia total constante $r' = 30\ \Omega$, incluye un pequeño motor eléctrico, M. El generador G está constituido por 60 elementos de acumuladores dispuestos en serie; la FEM de un elemento es de 2 V, y la resistencia interior, despreciable.

1. ¿Cuáles son los valores de la intensidad de la corriente en la batería y en cada derivación cuando el motor no gira?

2. Evaluar la potencia proporcionada por la batería. ¿Cómo se reparte esta potencia entre las diversas regiones del circuito?

3. El motor gira y desarrolla una potencia mecánica de 120 W. ¿Cuáles son los nuevos valores de la intensidad de la corriente en cada parte del circuito? ¿Cómo se reparte la nueva potencia gastada?

Solución

1.er CASO:

1) Lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ 15 I_1 = 60 \times 2 \\ 30 I_2 = 60 \times 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I\ = 12\ \text{A}} \\ \boxed{I_1 = \ 8\ \text{A}} \\ \boxed{I_2 = \ 4\ \text{A}} \end{array}$$

2)

$$\boxed{P_1 = n\epsilon_1 I = 60 \times 2 \times 12 = 1\,440\ \text{W}}$$

que se distribuyen:

$$P_c = I_1^2 r \ = 8^2 \times 15 = 960\ \text{W}$$

$$P_M = I_2^2 r' = 4^2 \times 30 = 480\ \text{W}$$

Comprobación:

$$P = P_C + P_M = 960 + 480 = 1\,440\ \text{W}$$

2.º CASO:

3) Lemas de Kirchhoff y potencia mecánica de un motor:

$$\left.\begin{array}{l} I' = I_1' + I_2' \\ 15 I_1' = 60 \times 2 \\ 30 I_2' = 60 \times 2 - \epsilon' \\ 120 = \epsilon' I_2' \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I' \ = 10\ \text{A}} \\ \boxed{I_1' \ = \ 8\ \text{A}} \\ \boxed{I_2' \ = \ 2\ \text{A}} \\ \ \epsilon' = 60\ \text{V} \end{array}$$

$$\boxed{P_2 = n\epsilon_1 I' = 60 \times 2 \times 10 = 1\,200\ \text{W}}$$

que se distribuyen:

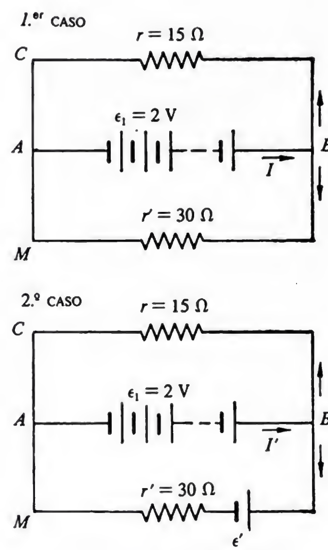
$$P' = 120\ \text{W}$$

$$P_C' = I_1'^2 r = 8^2 \times 15 = 960\ \text{W}$$

$$P_M' = I_2'^2 r' = 2^2 \times 30 = 120\ \text{W}$$

COMPROBACIÓN:

$$P' + P_C' + P_M' = 120 + 960 + 120 = 1\,200 = P_2$$

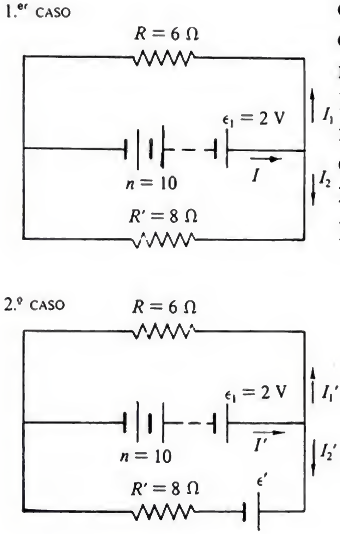


Problema XXVIII-75

Problema 76. Tenemos un generador de corriente constituido por 10 elementos dispuestos en serie, cada uno de los cuales posee una FEM de 2 V y una resistencia interna prácticamente nula. Unimos los dos polos de este generador por dos derivaciones; una está constituida por un conductor cuya resistencia es 6 Ω, y la otra tiene una resistencia de 8 Ω y comprende un motor eléctrico capaz de desarrollar una potencia de 12,5 W. Calcular:

1. La intensidad de la corriente en el generador y en cada una de las derivaciones, en el momento de cerrar el circuito (cuando todavía el motor no ha empezado a girar).

2. La intensidad de la corriente a través del motor cuando desarrolla toda la potencia mecánica de que es capaz.



Problema XXVIII-76

Solución

1) Lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ 6I_1 &= 10 \times 2 \\ 8I_2 &= 10 \times 2 \end{aligned}\right| \quad \boxed{I_1 = \frac{10}{3}\ \text{A}} \quad \boxed{I_2 = \frac{5}{2}\ \text{A}} \quad \boxed{I = \frac{35}{6}\ \text{A}}$$

2) Segundo lema de Kirchhoff y potencia mecánica del motor:

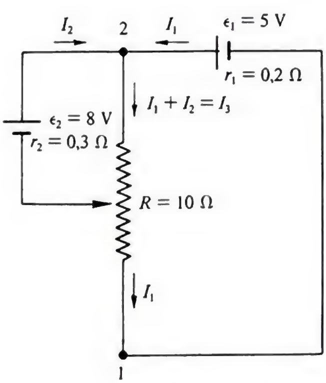
$$\left.\begin{aligned} 8I'_2 &= 20 - \epsilon' \\ 12{,}5 &= \epsilon' I'_2 \end{aligned}\right| \quad 8I'_2 = 20 - \frac{12{,}5}{I'_2} \quad \Rightarrow 8I'^2_2 - 20I'_2 + 12{,}5 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{I'_2 = \frac{5}{4}\ \text{A}}$$

Problema 77. Los dos extremos de una resistencia eléctrica de 10 Ω se unen a los polos de una pila de FEM 5 V y resistencia interior 0,2 Ω; el extremo de la resistencia unida al polo positivo de la pila se une al polo positivo de una segunda pila, de 8 V de FEM y resistencia interior de 0,3 Ω; el polo negativo de esta segunda pila se une al punto medio de la resistencia de 10 Ω. Determinar:

1. Intensidad de la corriente a través de cada una de las pilas.

2. Intensidad de la corriente en cada una de las dos mitades de la resistencia.

3. Diferencia de potencial entre los dos puntos extremos de la resistencia.



Problema XXVIII-77

Solución

Damos un sentido arbitrario a las intensidades problema (por ejemplo, los de la figura), y si al aplicar los lemas de Kirchhoff, obteniendo de esta forma un sistema de ecuaciones, las soluciones a las intensidades nos dan negativas en el circuito solución, las tendremos que poner en sentido contrario a como las habíamos tomado.

1)

$$\left.\begin{aligned} I_1(5 + 0{,}2) + (I_1 + I_2)5 &= 5 \\ I_2 0{,}3 + (I_1 + I_2)5 &= 8 \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} 10{,}2I_1 + 5I_2 &= 5 \\ 5I_1 + 5{,}3I_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{56{,}6}{29{,}06} \simeq 2\ \text{A}} \qquad \boxed{I_1 = -\,0{,}5\ \text{A}}$$

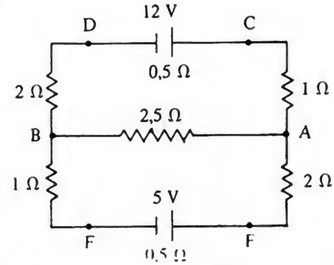
luego la corriente I_1 circula en sentido contrario al expresado en la figura.

2) En la mitad superior de la resistencia:

$$\boxed{I_3 = 2 - 0{,}5 = 1{,}5 \text{ A}}$$

3) La diferencia de potencial la calculamos aplicando la ley de Ohm a la parte derecha del circuito:

$$\boxed{V_1 - V_2 = 5 + 0{,}5 \times 0{,}2 = 5{,}1 \text{ V}}$$



Problema XXVIII-78

Problema 78. Calcular la intensidad que circula por cada uno de los hilos conductores de la figura y las diferencias de potencial: $(V_A - V_B)$, $(V_C - V_D)$ y $(V_E - V_F)$.

Solución

Dando a las intensidades los sentidos indicados en la figura, aplicamos los lemas de Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3 \qquad \boxed{I_1 = 2 \text{ A}}$$

$$I_1(2 + 0{,}5 + 1) + I_3 2{,}5 = 12 \quad \Rightarrow \quad 3{,}5 I_1 + 2{,}5 I_3 = 12 \qquad \boxed{I_2 = 0 \text{ A}}$$

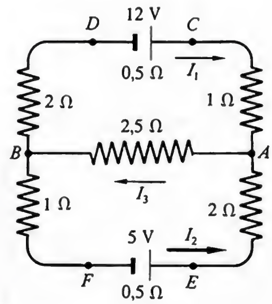
$$I_2(1 + 0{,}5 + 2) + I_3 2{,}5 = 5 \quad \Rightarrow \quad 3{,}5 I_2 + 2{,}5 I_3 = 5 \qquad \boxed{I_3 = 2 \text{ A}}$$

Por $AEFB$ no circula corriente:

$$\boxed{V_A - V_B = I_3 R_{AB} = 2 \times 2{,}5 = 5 \text{ V}}$$

$$\boxed{V_C - V_B = \varepsilon_{CD} - I_1 R_{CD} = 12 - 2 \times 0{,}5 = 11 \text{ V}}$$

$$\boxed{V_E - V_F = \varepsilon_{EF} - I_2 R_{EF} = 5 \text{ V}}$$



Problema XXVIII-78-1.ª

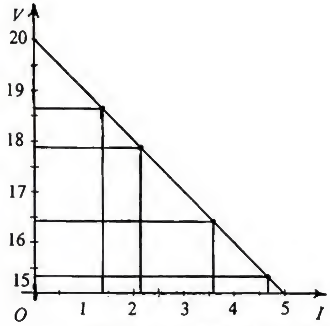
D) VOLTIMETROS Y AMPERIMETROS

Problema 79. Realizamos un montaje que comprende: una batería de acumuladores, un reóstato y un amperímetro; entre los bornes de la batería conectamos un voltímetro. Para distintos valores de la resistencia del reóstato hacemos las siguientes lecturas:

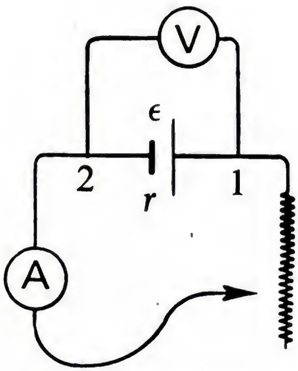
Amperímetro	4,70	3,50	2,15	1,45	0	A
Voltímetro	15,30	16,45	17,85	18,60	20	V

Se pide:

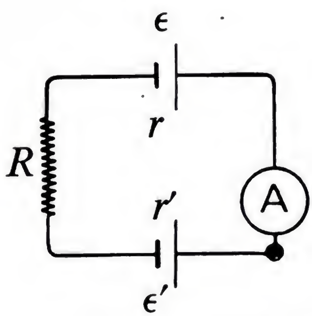
1. Construir y estudiar la curva que representa la diferencia de potencial en función de la intensidad.
2. Deducir la fuerza electromotriz de la batería.
3. Calcular la resistencia interior de la batería.
4. Montamos la anterior batería en serie con un motor, un amperímetro de resistencia despreciable y una resistencia R de 5 Ω que sumergimos en un calorímetro. Si impedimos que el motor gire, observamos que en 5 min la resistencia R desprende 1 440 cal, y si permitimos que el motor gire, sólo se desprenden 90 cal en el mismo tiempo. Calcular la fuerza contraelectromotriz del motor.



Problema XXVIII-79-1.ª



Problema XXVIII-79-2.ª



Problema XXVIII-79-3.ª

Solución

2)

$$\left.\begin{array}{l} V_1 - V_2 = \epsilon - Ir \\ I = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{V_1 - V_2 = \epsilon = 20 \text{ V}}$$

3)

$$V_1 - V_2 = \epsilon - Ir \Rightarrow r = \frac{\epsilon - (V_1 - V_2)}{I}$$

Sustituimos todos los valores y calculamos la media:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = \dfrac{20 - 15{,}30}{4{,}70} = 1{,}00\ \Omega \\ r_2 = \dfrac{20 - 16{,}45}{3{,}50} = 1{,}01\ \Omega \\ r_3 = \dfrac{20 - 17{,}85}{2{,}15} = 1{,}00\ \Omega \\ r_4 = \dfrac{20 - 18{,}60}{1{,}45} = 0{,}96\ \Omega \end{array}\right| \boxed{r = \frac{\Sigma r_i}{4} = 0{,}99\ \Omega}$$

4) Cálculo de la resistencia interna del motor:

1.^{er} CASO: El motor no gira ($\epsilon' = 0$):

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 0{,}24 I_1^2 R t \\ R = 5\ \Omega \\ t = 5 \text{ min} \end{array}\right| \ 1\,440 = 0{,}24 I_1^2 5 \times 5 \times 60 \Rightarrow I_1 = 2 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{\epsilon}{R + r + r'} \Rightarrow 2 = \frac{20}{5 + 0{,}99 + r'} \Rightarrow r' = 4{,}01\ \Omega$$

Cálculo de la fuerza contraelectromotriz del motor:

2.º CASO: El motor gira:

$$\left.\begin{array}{l} Q_2 = 0{,}24 I_2^2 R t \\ R = 5\ \Omega \\ t = 5 \text{ min} \end{array}\right| \ 90 = 0{,}24 I_2^2 5 \times 5 \times 60 \Rightarrow I_2 = 0{,}5 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R + r + r'} \Rightarrow 0{,}5 = \frac{20 - \epsilon'}{5 + 0{,}99 + 4{,}01} \Rightarrow \boxed{\epsilon' = 15 \text{ V}}$$

Problema 80. Se montan en paralelo dos series de 6 acumuladores cada serie; cada uno de los 12 acumuladores tiene una FEM de 2,1 V y una resistencia interna de 0,1 Ω. Los bornes de la asociación están unidos al circuito exterior, formado por una resistencia de 6 Ω en serie, con un amperímetro de 1 Ω de resistencia; este amperímetro va provisto de un shunt de 0,25 Ω. Calcular:

1. La FEM y la resistencia de la batería de acumuladores.
2. La intensidad total que pasa por el circuito.
3. Valor de la resistencia única, equivalente a todo el circuito exterior.
4. La intensidad de la corriente que circula por el amperímetro.

Solución

Lemas de Kirchhoff:

$$I = I_A + I_S$$

$$0{,}25\, I_S = I_A$$

$$I_A + 6I + 6 \times 0{,}1\, \frac{I}{2} = 6 \times 2{,}1$$

$$\boxed{I = \frac{12{,}6}{6{,}5} \simeq 2\ \text{A}} \qquad \boxed{I_A = 0{,}4\ \text{A}} \qquad I_S = 1{,}6\ \text{A}$$

Resistencia de la batería:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{6r_1} + \frac{1}{6r_1} = \frac{1}{3 \times 0{,}1} \qquad \boxed{r = 0{,}3\ \Omega}$$

Resistencia equivalente a amperímetro y shunt:

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_S} = \frac{1}{1} + \frac{1}{0{,}25} = 5 \quad \Rightarrow \quad R' = 0{,}2\ \Omega$$

Resistencia exterior del circuito:

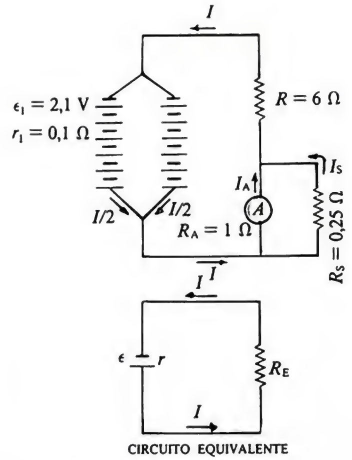
$$\boxed{R_E = R + R' = 6{,}2\ \Omega}$$

La resistencia total del circuito será:

$$R_T = R + R' + r = 6{,}5\ \Omega$$

La intensidad en el circuito equivalente:

$$I = \frac{\epsilon}{R_T} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon = IR_T = \frac{12{,}6}{6{,}5}\, 6{,}5 = 12{,}6\ \text{V}}$$



Problema XXVIII-80

Problema 81. Con 20 pilas eléctricas se han formado cuatro series de 5 elementos cada una, que se unen en paralelo. La fuerza electromotriz de cada pila es de 1,5 V y su resistencia interior es de 1,2 Ω. Para medir la intensidad de la corriente se emplea un amperímetro shuntado a 1/10 por medio de un conductor de cobre cuya sección tiene un diámetro de 0,4 mm y posee una resistividad de $\rho = 1{,}58 \cdot 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{cm}$. La aguja del amperímetro señala 0,4 A. Hay que calcular:

1. La resistencia interior del amperímetro.
2. La longitud del conductor de cobre utilizado como shunt.
3. El generador único equivalente al sistema de las pilas.

Solución

1) Aplicando las leyes de Kirchhoff:

$$1 \times 5 \times 1{,}2 + 0{,}4 R_A = 5 \times 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 3{,}75\ \Omega}$$

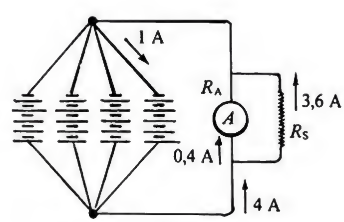
$$1 \times 5 \times 1{,}2 + 3{,}6 R_S = 5 \times 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad R_S = 0{,}417\ \Omega$$

2)

$$R_S = \rho\, \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 0{,}417 = \frac{1{,}58 \times 10^{-6} l}{\pi 0{,}02^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = 331\ \text{cm}}$$

3) Calculamos la resistencia equivalente al circuito exterior:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R_A} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_A R_S}{R_A + R_S} = \frac{3{,}75 \times 0{,}417}{3{,}75 + 0{,}417} = 0{,}37\ \Omega$$



Problema XXVIII-81

la resistencia interna del generador equivalente es:

$$\frac{1}{r} = \frac{4}{5r_1} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{5 \times 1{,}2}{4} = 1{,}5\ \Omega$$

aplicando al circuito equivalente:

$$I = \frac{\epsilon}{R + r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon = I(R + r) = 4(0{,}37 + 1{,}5)\ \text{V} = 7{,}5\ \text{V}}$$

Problema 82. Para medir la resistencia de una lámpara de incandescencia se la coloca en serie en un circuito que tiene de resistencia total $R = 10\ \Omega$. El circuito está alimentado por una serie de acumuladores. En el circuito se intercala también un amperímetro (que marca 1,4 A) y en derivación, conectado a los bornes de la lámpara, un voltímetro marca 110 V.

1. ¿Qué valor se atribuye a la resistencia de la lámpara?

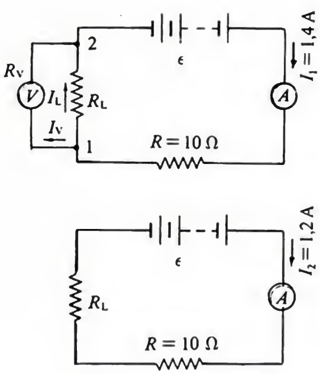
2. ¿Qué potencia se calcula que consume la lámpara?

Al retirar el voltímetro el amperímetro marca entonces 1,2 A.

3. ¿Cuál es la verdadera resistencia de la lámpara?

4. ¿Cuál es la resistencia del voltímetro?

Solución



Problema XXVIII-82

1)

$$\boxed{R'_L = \frac{110}{1{,}4} = 78{,}5\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{P'_L = 110 \times 1{,}4 = 154\ \text{W}}$$

3) Calculamos la fuerza electromotriz de la batería aplicando la ley general de Ohm a los puntos 1 y 2 (bornes de la lámpara) en el primer caso, por la rama que contiene al generador:

$$V_1 - V_2 = \epsilon - I_1 R \quad \Rightarrow \quad 110 = \epsilon - 1{,}4 \times 10 \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 124\ \text{V}$$

En el segundo caso la intensidad toma el valor:

$$I_2 = \frac{\epsilon}{R + R_L} \quad \Rightarrow \quad 1{,}2 = \frac{124}{10 + R_L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_L = 93{,}3\ \Omega}$$

4) El valor de la intensidad en el primer caso, considerando la resistencia equivalente a R_V y R_L nos da:

$$I_1 = \frac{\epsilon}{R + R_E} \quad \Rightarrow \quad 1{,}4 = \frac{124}{10 + R_E} \quad \Rightarrow \quad R_E = 78{,}5\ \Omega$$

que nos hace ver que el valor que atribuíamos a la lámpara no es el real, sino el equivalente a R_V y R_L. Por tanto:

$$\frac{1}{R_E} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_L} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{78{,}5} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{93{,}3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_V = 495\ \Omega}$$

Problema 83. La escala de un galvanómetro de resistencia interna 150 Ω está dividida en 100 divisiones, cada una de las cuales equivale a 1 μA. ¿Qué resistencia debe agregársele en derivación para que puedan medirse con él intensidades máximas de 1 mA?

Solución

La intensidad máxima que puede circular por la resistencia del galvanómetro es:

$$I_G = 100 \times 10^{-6} = 10^{-4}\ \text{A}$$

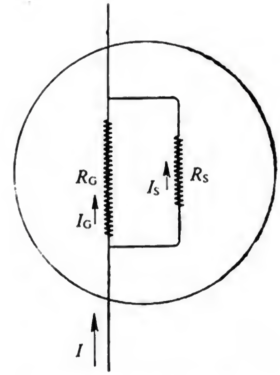
esta intensidad hace que el galvanómetro marque al máximo.

Circulando la misma corriente por R_G queremos que el galvanómetro marque al máximo, cuando por el hilo general circulen 10^{-3} A, para lo que ponemos a R_G una derivación para que la diferencia de intensidad circule por ella:

$$I_S = I - I_G = 10^{-3} - 10^{-4} = 9 \times 10^{-4}\ \text{A}$$

para lo cual la resistencia de esta derivación tiene que ser tal que:

$$I_G R_G = I_S R_S \quad \Rightarrow \quad 10^{-4} \times 150 = 9 \times 10^{-4} R_S \quad \Rightarrow \boxed{R_S = 16{,}66\ \Omega}$$



Problema XXVIII-83

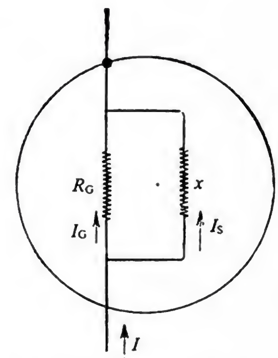
Problema 84. Disponemos de un galvanómetro cuya escala está calculada para una intensidad máxima de 2×10^{-4} A y cuya resistencia vale $R_G = 200\ \Omega$.
1. Calcular el shunt que debemos colocar para utilizarlo como amperímetro que mida hasta 1 A.
2. Calcular la resistencia que hemos de añadir en serie para utilizarlo como voltímetro y poder medir hasta 100 V.
3. Dibujar en ambos casos el esquema correspondiente.

Solución

1)

$$I = I_S + I_G \left| \begin{array}{l} I = 1\ \text{A} \\ I_G = 2 \times 10^{-4}\ \text{A} \end{array} \right| I_S = (1 - 2 \times 10^{-4})\ \text{A}$$

$$I_S x = I_G R_G \quad \Rightarrow \quad x = \frac{I_G R_G}{I_S} \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{2 \times 10^{-4} \times 200}{1 - 2 \times 10^{-4}} = 4 \times 10^{-2}\ \Omega}$$

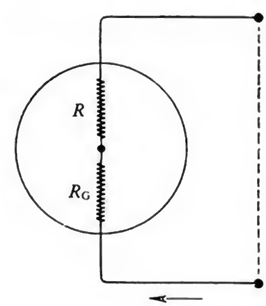


Problema XXVIII-84-1.ª

2) La intensidad que tiene que pasar por el aparato es, como máximo, 2×10^{-4} A con la que tiene su máximo alcance en la escala:

$$R_T = R_G + R$$

$$\left. \begin{array}{l} V - V' = I_G R_T = I_G(R_G + R) \\ V - V' = 100\ \text{V} \\ R_G = 200\ \Omega \\ I_G = 2 \times 10^{-4}\ \text{A} \end{array} \right| 100 = 2 \times 10^{-4}(200 + R) \Rightarrow \boxed{R = 499\,800\ \Omega}$$



Problema XXVIII-84-2.ª

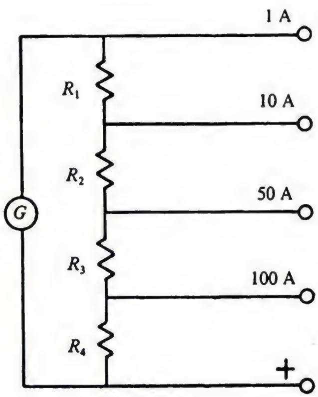
Problema 85. La escala de un galvanómetro (G en la figura), de resistencia interna 20 Ω, está dividida en 100 divisiones, cada una de las cuales equivale a 1 mA. ¿Qué valor tienen que tener las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 para convertirlo en un amperímetro de alcance múltiple que produzca la desviación máxima con intensidades de 1 A, 10 A, 50 A y 100 A.

Solución

La intensidad máxima que puede pasar por la resistencia del galvanómetro es:

$$I_G = 100 \times 10^{-3} = 0{,}1\ \text{A}$$

esta intensidad produce la desviación máxima.



Problema XXVIII-85

Conectando unas clavijas en el polo positivo y en 1 A se tendrá que verificar:

$$R_G I_G = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(1 - I_G)$$

en + y 10:

$$(R_G + R_1)I_G = (R_2 + R_3 + R_4)(10 - I_G)$$

en + y 50:

$$(R_G + R_1 + R_2)I_G = (R_3 + R_4)(50 - I_G)$$

en + y 100:

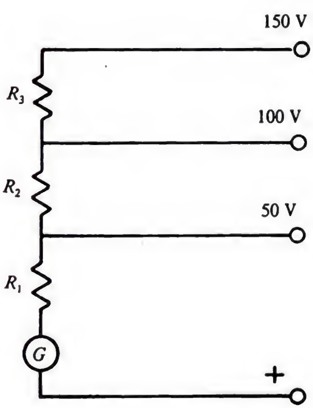
$$(R_G + R_1 + R_2 + R_3)I_G = R_4(100 - I_G)$$

luego:

$$20 \times 0{,}1 = (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(1 - 0{,}1)$$
$$(20 + R_1)0{,}1 = (R_2 + R_3 + R_4)(10 - 0{,}1)$$
$$(20 + R_1 + R_2)0{,}1 = (R_3 + R_4)(50 - 0{,}1)$$
$$(20 + R_1 + R_2 + R_3)0{,}1 = R_4(100 - 0{,}1)$$

$$\boxed{R_1 = 2\ \Omega} \quad \boxed{R_2 = \frac{8}{45}\ \Omega} \quad \boxed{R_3 = R_4 = \frac{1}{45}\ \Omega}$$

Problema 86. Disponemos de un galvanómetro cuya escala está calculada para una intensidad máxima de 2×10^{-4} A y cuya resistencia vale $R = 200\ \Omega$. Calcular los valores de R_1, R_2 y R_3 de la figura para utilizarlo como voltímetro de tres alcances cuyos bornes estén marcados con 50 V, 100 V y 150 V.



Problema XXVIII-86

Solución

Al conectar a + y 50 la intensidad que circula por R_1 y G tiene que ser 2×10^{-4} A; luego:

$$R_1 + R_G = \frac{50}{I_G} \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{50}{2 \times 10^{-4}} - 200 = 249\,800\ \Omega}$$

Al conectar a + y 100:

$$R_1 + R_2 + R_G = \frac{100}{2 \times 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{R_2 = 250\,000\ \Omega}$$

Al conectar con + y 150:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_G = \frac{150}{2 \times 10^{-4}} \Rightarrow \boxed{R_3 = 250\,000\ \Omega}$$

Capítulo XXIX

ELECTROQUIMICA. LEYES DE FARADAY

FORMULARIO

LEYES DE FARADAY:

1.ª $$M = \frac{M_{at}}{v96\,500} It$$

2.ª $$\frac{M}{E_q} = \frac{M'}{E'_q} = \frac{M''}{E''_q} = \ldots$$

Problema 1. Calcular el equivalente químico del hierro cuando forma parte de una sal ferrosa o de una férrica. Tomar los datos necesarios en la tabla de masas atómicas.

Solución

Peso atómico de Fe: 55,84 g.

Equivalente químico de un elemento: $\boxed{E_q = \frac{M_{at}}{v}}$

El Fe en las ferrosas tiene valencia 2: $\boxed{E_1 = \frac{55,84}{2} = 27,92}$

El Fe en las sales férricas tiene valencia 3: $\boxed{E_2 = \frac{55,84}{3} = 18,613}$

Problema 2. Para determinar la intensidad de una corriente se emplea el voltámetro de cobre. Anodo y cátodo son laminillas de cobre puro y el electrólito una disolución de sulfato cúprico. El cátodo, perfectamente limpio y seco, se pesa antes y después de la electrólisis, habiéndose obtenido $M_1 = 7{,}215$ g y $M_2 = 10{,}167$ g. El tiempo de duración de la electrólisis es de 1/4 de h. Determinar la intensidad de la corriente. (Equivalente electroquímico de cobre: 0,000328 g/A · s.)

Solución

Masa de cobre depositada:

$$M_2 - M_1 = 10{,}167 - 7{,}215 = 2{,}952 \text{ g}$$

$$M = E_e It \quad \Rightarrow \quad 2{,}953 = 328 \times 10^{-6} I 15 \times 60 \quad \Rightarrow \boxed{I = 10 \text{ A}}$$

Problema 3. Se desea platear una esferilla metálica de 1 cm de radio. Para ello se le hace funcionar como cátodo en una cuba electrolítica, empleando como electrólito una disolución de nitrato de plata y como ánodo una laminilla de plata pura. Calcular el tiempo necesario para depositar una capa uniforme de plata de espesor 1 mm, empleando en la electrólisis una intensidad de corriente de 1 A. (Densidad de la plata: 10,5 g/cm^3. Equivalente electroquímico de la plata: 0,001118 g/A · s.)

Solución

Volumen de la esferilla sin platear:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ cm}^3$$

Volumen de la esferilla después de platear:

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 = \frac{4}{3}\pi(1{,}1)^3 \text{ cm}^3$$

Volumen de plata depositada:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi(1{,}1)^3 - \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi(1{,}331 - 1) = 1{,}386 \text{ cm}^3$$

Masa de plata depositada:

$$M = V\rho = 1{,}386 \times 10{,}5 = 14{,}55 \text{ g}$$

$$M = E_e It \quad \Rightarrow \quad 14{,}55 = 1\,118 \times 10^{-6} t \quad \Rightarrow \boxed{t = 13\,014 \text{ s}}$$

Problema 4. Calcular los volúmenes de hidrógeno y oxígeno que en condiciones normales se producen en una electrólisis de agua acidulada con ácido sulfúrico, circulando por un voltámetro una corriente de 2 A durante 1 h.

Solución

En la electrólisis de dos moles de H_2O se obtiene:

$$2\,H_2O \begin{array}{l} \nearrow \text{ cátodo } 2\,H_2 \\ \searrow \text{ ánodo } O_2 \end{array}$$

Para la descarga de 2 moles de H_2 y de 1 mol de O_2 (4 valencias gramo) se precisan $4 \times 96\,500$ C (4 faraday).

La cantidad de electricidad puesta en circulación en el voltámetro es:

$$Q = It = 2 \times 3\,600 = 7\,200 \text{ C}$$

$$\begin{array}{r|l|l} 4 \times 96\,500 \text{ C producen} & \begin{array}{l} 2 \times 22{,}4 \text{ l de } H_2 \\ 22{,}4 \text{ l de } O_2 \end{array} & \boxed{x = \dfrac{7\,200 \times 2 \times 22{,}4}{4 \times 96\,500} = 0{,}836 \text{ l de hidrógeno}} \\ 7\,200 \text{ C producirán} & \begin{array}{l} x \text{ l de } H_2 \\ y \text{ l de } O_2 \end{array} & \boxed{y = \dfrac{7\,200 \times 22{,}4}{4 \times 96\,500} = 0{,}418 \text{ l de oxígeno}} \end{array}$$

Problema 5. Una corriente de 5 A pasa durante 10 min a través de una disolución de ácido sulfúrico contenida en un voltámetro de gases. Determinar:
1. Peso de agua descompuesto por la corriente.
2. Peso del hidrógeno recogido.
3. Volumen ocupado por este hidrógeno, sabiendo que la temperatura es de 20° C, la presión exterior 740 mm y la tensión del vapor de agua dentro de la campana que contiene el hidrógeno es de 18 mm.

Solución

La masa de hidrógeno depositada será:

$$M_1 = \frac{M_{at}}{\nu 96\,500} It = \frac{5 \times 10 \times 60}{96\,500} = 0{,}03 \text{ g}$$

La masa de agua descompuesta será:

$$\boxed{M_2 = 9M_1 = 0{,}27 \text{ g}}$$

$$p = 740 - 18 = 722 \text{ mm de Hg}$$

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{722}{760} V = \frac{0{,}03}{2} 0{,}082 \times 293 \Rightarrow \boxed{V = 0{,}379 \text{ l}}$$

Problema 6. Un sistema formado por 10 condensadores de 4 μF de capacidad cada uno y conectados en paralelo se carga a cierta tensión y se descarga inmediatamente a través de un voltámetro. Repitiendo este proceso 20 veces seguidas se separan 20,8 mm^3 de hidrógeno en condiciones normales.
1. Calcúlese el equivalente electroquímico en volumen del hidrógeno.
2. ¿Cuántos C han atravesado el voltámetro?
3. ¿A qué tensión se cargaron los condensadores?
4. ¿A qué tensión habría sido necesario cargar los condensadores si la asociación hubiera sido en serie?

Solución

1) Como 96 500 C desprenden «una valencia gramo de hidrógeno» (1 g) que en condiciones normales ocupan un volumen:

$$v_0 = \frac{22{,}4}{2} = 11{,}2 \text{ l} = 11{,}2 \times 10^6 \text{ mm}^3 \Rightarrow \frac{96\,500}{1} = \frac{11{,}2 \times 10^6}{E_v} \Rightarrow \boxed{E_v = 116 \text{ mm}^3/\text{C}}$$

2) El volumen es:

$$v = E_v Q \Rightarrow \boxed{Q = \frac{20{,}8}{116} = 0{,}18 \text{ C}}$$

3) La capacidad de la asociación es:

$$C = nC_1 = 10 \times 4 = 40 \ \mu\text{F}$$

En las 20 descargas proporcionan:

$$Q = 20CV \Rightarrow 0{,}18 = 20 \times 40 \times 10^{-6} V \Rightarrow \boxed{V = 225 \text{ V}}$$

4) La capacidad del condensador equivalente es:

$$\frac{1}{C} = \frac{10}{C_1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1}{10} = \frac{4}{10}\ \mu\text{F} = 4 \times 10^{-7}\ \text{F}$$

La carga necesaria en cada una de las descargas es:

$$Q = \frac{0{,}18}{20} = 0{,}009\ \text{C} \quad \Rightarrow \quad Q = CV \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}18}{20} = 4 \times 10^{-7} V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 22\,500\ \text{V}}$$

Problema 7. Se monta en serie un amperímetro con un voltámetro de plata, y se regula la intensidad de modo que el amperímetro marque 0,50 A, manteniendo esta intensidad durante 20 min. El aumento de peso del cátodo ha sido de 0,6435 g. Calcular:

1. El equivalente electroquímico de la plata (peso atómico: 107,88).

2. Intensidad de la corriente.

3. Error absoluto y relativo del amperímetro cuando marca 0,50 A.

4. Cantidad de cobre que la misma cantidad de electricidad depositará al pasar por una disolución de una sal cúprica (peso atómico del cobre: 63,44).

Solución

1)

$$\boxed{E_e = \frac{M_{at}}{v96\,500} = \frac{107{,}88}{1 \times 96\,500} = 0{,}001118\ \text{g/C}}$$

2)

$$M = E_e It \quad \Rightarrow \quad 0{,}6435 = 0{,}001118 I 20 \times 60 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0{,}479\ \text{A}}$$

3)

$$\varepsilon_a = 0{,}5 - 0{,}479 = 0{,}021\ \text{A}$$

$$\varepsilon_r = \frac{0{,}021}{0{,}479} = 0{,}04 \quad \Rightarrow \quad \boxed{4\ \%}$$

4)

$$\boxed{M' = \frac{M_{at}}{v96\,500} It = \frac{63{,}44}{2 \times 96\,500} 0{,}479 \times 20 \times 60 = 0{,}189\ \text{g}}$$

Problema 8. La superficie de cada uno de los electrodos de una cuba electrolítica es de 10 cm^2. El electrólito es una disolución acuosa de ácido sulfúrico. Al cabo de 5 min de pasar la corriente se han obtenido 100 cm^3 de hidrógeno, medidos sobre agua, siendo la presión de 700 mm de mercurio y la temperatura de 27° C. Determinar:

1. El peso de hidrógeno que se ha obtenido.

2. La intensidad de la corriente utilizada.

3. La densidad de corriente en los electrodos.

Tensión del vapor de agua a 27° C: 27 mm de mercurio.

Solución

1)

$$p = 700 - 27 = 673\ \text{mm} \quad \Rightarrow \quad pv = nRT \quad \Rightarrow \quad \frac{673}{760} 10^{-1} = \frac{M}{2} 0{,}082 \times 300 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 0{,}007\ \text{g}}$$

2)

$$M = \frac{M_{at}}{v96\,500} It \Rightarrow 0{,}007 = \frac{15 \times 60}{96\,500} \Rightarrow \boxed{I = 2{,}25 \text{ A}}$$

3)

$$\boxed{J = \frac{I}{A} = \frac{2{,}25}{10} = 0{,}225 \text{ A/cm}^2}$$

Problema 9. Se tiene una bombilla que consume 60 W cuando está conectada a una tensión de 120 V.

1. ¿Cuál es su resistencia?

2. ¿Qué cantidad de calor se genera en el filamento de la lámpara en un minuto?

3. Si la corriente que pasa por la bombilla pasara por un voltámetro con agua acidulada, ¿qué masa de hidrógeno se desprendería en 10 min?

4. ¿Qué volumen ocuparía dicha masa de hidrógeno si la presión es de 740 mm y la temperatura es de 27° C?

Solución

1)

$$P = \frac{(V - V')^2}{R} \Rightarrow 60 = \frac{120^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = 240\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{Q = 0{,}24W = 0{,}24Pt = 0{,}24 \times 60 \times 60 \text{ cal} = 864 \text{ cal}}$$

3)

$$I = \frac{V - V'}{R} = \frac{120}{240} = 0{,}5 \text{ A} \Rightarrow \boxed{M = \frac{0{,}5 \times 600}{96\,500} = 3{,}1 \times 10^{-3} \text{ g}}$$

4)

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{740}{760} V = \frac{3{,}1 \times 10^{-3}}{2} 0{,}082 \times 300 \Rightarrow \boxed{V = 39{,}2 \times 10^{-3} \text{ l} = 39{,}2 \text{ cm}^3}$$

Problema 10. Se hace pasar una corriente eléctrica por un hilo conductor de 15 Ω de resistencia. Para ello se conecta con una pila de 12 V y 5 Ω de resistencia interna. Se pide calcular:

1. La intensidad de la corriente que circula por el conductor.

2. El calor desprendido por el hilo conductor al pasar por él la corriente eléctrica.

3. ¿Cuántos g de hielo se fundirán en 5 min con el calor desprendido por el conductor?

4. Si dicha corriente se aplica a un voltámetro lleno de agua acidulada con electrodos de platino, calcular el volumen de hidrógeno producido durante 10 min, medido en condiciones normales de presión y temperatura.

Solución

1)

$$\boxed{I = \frac{\epsilon}{R + r} = \frac{12}{15 + 5} = 0{,}6 \text{ A}}$$

2)

$$\boxed{\frac{Q}{t} = 0{,}24I^2R = 0{,}24 \times 0{,}6^2 \times 15 = 1{,}296 \text{ cal/s}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} Q = Mt \\ Q = 1{,}296t \end{array}\right| \quad 1{,}296 \times 5 \times 60 = M80 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 4{,}86 \text{ g}}$$

4)

$$\left.\begin{array}{l} M = \dfrac{M_{at}}{v96\,500}\,It \\ M = V_0\rho_0 \\ \rho_0 = \dfrac{2}{22\,400} \text{ g/cm}^3 \end{array}\right| \quad V_0\,\frac{2}{22\,400} = \frac{0{,}6 \times 10 \times 60}{96\,500} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = 41{,}8 \text{ cm}^3}$$

Problema 11. En una vasija de electrólisis se utilizan electrodos rectangulares de 20 × 15 cm colocados a una distancia de 15 cm. El electrólito es una disolución de nitrato de plata, cuya resistencia específica es de 15 Ω · cm y la tensión aplicada es de 7,5 V. Calcular:
1. La resistencia de la disolución entre los electrodos.
2. El tiempo necesario para depositar 100 g de plata en el cátodo utilizando la tensión citada. Ag = 108 g.
3. Lo que ha costado la energía eléctrica para realizar este depósito electrolítico a 6 ptas el kW · h.

Solución

1)

$$\boxed{R = \rho\,\frac{l}{A} = 15\,\frac{15}{15 \times 20}\;\Omega = 0{,}75\;\Omega}$$

2)

$$I = \frac{V - V'}{R} = \frac{7{,}5}{0{,}75} = 10 \text{ A}$$

$$M = \frac{M_{at}}{v96\,500}\,It \quad \Rightarrow \quad 100 = \frac{108}{96\,500}\,10t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 8\,935 \text{ s} = 2^{h}28^{m}55^{s}}$$

3)

$$W = (V - V')It = \frac{7{,}5 \times 10 \times 8\,935}{3{,}6 \times 10^6} \text{ kW} \cdot \text{h} = 0{,}186 \text{ kW} \cdot \text{h} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0{,}186 \times 6 = 1{,}1 \text{ ptas}}$$

Problema 12. Tenemos 10 l, medidos a 18° C y 750 mm, de una mezcla gaseosa con 10 % de hidrógeno, 15 % de oxígeno y 75 % de nitrógeno (los % son en volumen).
1. Calcular las masas que de cada uno de estos tres gases existen en ella.
2. Calcular también sus respectivas presiones parciales.
3. Si dichas masas de oxígeno y de hidrógeno se obtuvieran por electrólisis de agua acidulada, con una corriente de 2 A, ¿cuánto tiempo se emplearía?
4. Si la tensión entre los bornes del voltámetro son 10 V, ¿que energía se consumirá?

Solución

1) y 2) Las presiones parciales de cada uno serán:

$$\boxed{p_H = 750 \times 0{,}1 \;=\; 75 \quad \text{mm}}$$

$$\boxed{p_O = 750 \times 0{,}15 = 112{,}5 \text{ mm}}$$

$$\boxed{p_N = 750 \times 0{,}75 = 562{,}5 \text{ mm}}$$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{75}{760}\, 10 = \dfrac{M_H}{2}\, 0{,}082 \times 291 \\[2ex] \dfrac{112{,}5}{760}\, 10 = \dfrac{M_O}{32}\, 0{,}082 \times 291 \\[2ex] \dfrac{562{,}5}{760}\, 10 = \dfrac{M_N}{28}\, 0{,}082 \times 291 \end{array} \right| \begin{array}{l} \boxed{M_H = 0{,}08 \text{ g}} \\[2ex] \dfrac{75}{112{,}5} = \dfrac{0{,}08}{2}\, \dfrac{32}{M_O} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_0 = 1{,}92 \text{ g}} \\[2ex] \dfrac{75}{562{,}5} = \dfrac{0{,}08}{2}\, \dfrac{28}{M_N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_N = 8{,}4 \text{ g}} \end{array}$$

3)

$$0{,}08 = \frac{1}{96\,500}\, 2t_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 3\,860 \text{ s}}$$

$$1{,}92 = \frac{16}{2 \times 96\,500}\, 2t_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = 11\,580 \text{ s}}$$

4)

$$\boxed{W_1 = (V - V')It_1 = 10 \times 2 \times \;\; 3\,860 = \;\; 77\,200 \text{ J}}$$

$$\boxed{W_2 = (V - V')It_2 = 10 \times 2 \times 11\,580 = 231\,600 \text{ J}}$$

Problema 13. Un voltámetro de nitrato de plata con electrodos de plata y resistencia de 20 Ω debe funcionar con corriente de 0,5 A, en un sector de corriente cuya tensión es 110 V, intercalando en el circuito una resistencia auxiliar. Se pide:

1. La longitud de hilo de hierro de 0,1 mm de diámetro necesaria para realizar la resistencia auxiliar (resistividad del hierro: 15,7 μΩ · cm).

2. ¿Cómo se podría construir una resistencia análoga con ayuda de lámparas de incandescendencia que consumiesen 0,1 A bajo 100 V?

3. El peso de plata depositado por h en el voltámetro.

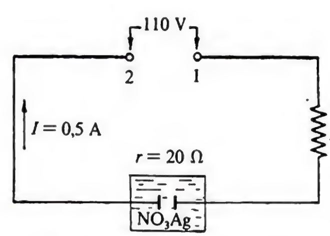
4. La cantidad de calor desprendida en la resistencia auxiliar durante el mismo tiempo.

Solución

1)

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R + r} \quad \Rightarrow \quad 0{,}5 = \frac{110}{20 + R} \quad \Rightarrow \quad R = 200 \;\Omega$$

$$R = \rho\, \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 200 = 15{,}7 \times 10^{-6}\, \frac{l}{\pi 25 \times 10^{-6}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{l = 1\,000 \text{ cm} = 10 \text{ m}}$$



Problema XXIX-13

2)

$$R_L = \frac{V - V'}{I} = \frac{100}{0{,}1} = 10^3 \;\Omega$$

Colocando n lámparas en derivación:

$$\frac{1}{200} = \frac{n}{1\,000} \Rightarrow \boxed{n = 5 \text{ lámparas}}$$

3)

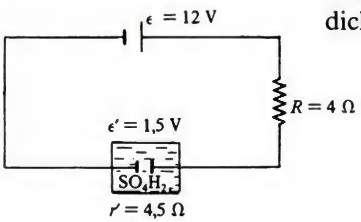
$$\boxed{M = \frac{108}{96\,500}\,0{,}5 \times 3\,600 = 2 \text{ g}}$$

4)

$$\boxed{Q = 0{,}24 I^2Rt = 0{,}24 \times 0{,}25 \times 200 \times 3\,600 = 43\,200 \text{ cal}}$$

Problema 14. Un voltámetro con electrodos de platino contiene una disolución de ácido sulfúrico; su fuerza contraelectromotriz es de 1,5 V y su resistencia interior de 4,5 Ω. Está conectado en serie a un generador cuya FEM es de 12 V y entre el generador y el voltámetro hay colocada también en serie una resistencia R, de 4 Ω. Suponemos cerrado el circuito y despreciable la resistencia de los conductores que forman las conexiones y el generador.

1. Dibujar un esquema del circuito.
2. Calcular la intensidad de la corriente que circula.
3. Hallar el tiempo que ha de transcurrir para que en el voltámetro se desprendan 25 cm^3 de H_2, medido en condiciones normales.
4. ¿Cuál es la cantidad de calor que se desprende en la resistencia R durante dicho tiempo?



Problema XXIX-14

Solución

2)

$$\boxed{I = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R + r'} = \frac{12 - 1{,}5}{4 + 4{,}5} = 1{,}235 \text{ A}}$$

3) Como 96 500 C desprenden 22 400 cm^3 de H_2, tendremos:

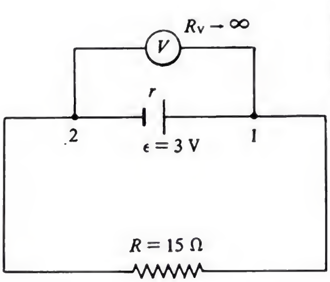
$$25 = \frac{11\,200}{96\,500}\,1{,}235t \Rightarrow \boxed{t = 174 \text{ s} = 2^{m}54^{s}}$$

4)

$$\boxed{Q = 0{,}24 I^2Rt = 0{,}24 \times 1{,}235^2 \times 4 \times 174 = 254{,}7 \text{ cal}}$$

Problema 15. Un circuito eléctrico consta de una pila cuya fuerza electromotriz es de 3 V, una resistencia de 15 Ω y un voltímetro de resistencia interior muy grande en conexión con los bornes de la pila. Calcular:

1. La resistencia interna de la pila si el voltímetro marca 2,7 V.
2. El calor desarrollado en la resistencia durante 2 h.
3. El cinc (Zn = 65,4) consumido por la pila cada h.



Problema XXIX-15

Solución

1)

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{2{,}7}{15} = 0{,}18 \text{ A}$$

$$V_1 - V_2 = \epsilon - Ir \Rightarrow 2{,}7 = 3 - 0{,}18r \Rightarrow \boxed{r = 1{,}67\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{Q = 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\,t = 0{,}24\,\frac{2{,}7^2}{15}\,2 \times 3\,600 = 839{,}8\text{ cal}}$$

3)

$$\boxed{M = \frac{M_{at}}{\nu 96\,500}\,It = \frac{65{,}4}{2 \times 96\,500}\,0{,}18 \times 3\,600 = 0{,}22\text{ g}}$$

Problema 16. En un circuito eléctrico se montan en serie un acumulador, una resistencia variable y un voltámetro de gases. El acumulador tiene una FEM de 4 V y una resistencia interior despreciable. El voltámetro tiene una resistencia interna de $R = 1\ \Omega$ y una fuerza contraelectromotriz de 1,5 V. La intensidad de la corriente es de 1 A. Determinar:

1. Potencia suministrada por el acumulador.
2. Resistencia total del circuito.
3. Gramos de hidrógeno desprendidos en una hora.
4. Volumen que ocuparía este hidrógeno, recogido sobre agua, siendo la temperatura de 20° C, la presión exterior de 740 mm y la tensión del vapor de agua a esa temperatura 17,5 mm.

Solución

1)

$$\boxed{P = \epsilon I = 4 \times 1 = 4\text{ W}}$$

2)

$$I = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R} \Rightarrow 1 = \frac{4 - 1{,}5}{R} \Rightarrow \boxed{R = 2{,}5\ \Omega}$$

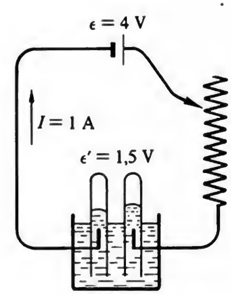
3)

$$\boxed{M = \frac{1}{1 \times 96\,500}\,3\,600 = 0{,}037\text{ g}}$$

4)

$$p = 740 - 17{,}5 = 722{,}5\text{ mm de Hg}$$

$$pV = nRT \Rightarrow \frac{722{,}5}{760}\,V = \frac{0{,}037}{2}\,0{,}082 \times 293 \Rightarrow \boxed{V = 467 \times 10^{-3}\text{ l} = 467\text{ cm}^3}$$



Problema XXIX-16

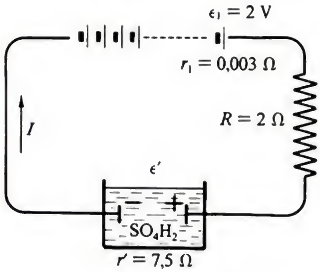
Problema 17. Un circuito eléctrico está integrado por las siguientes partes: una batería de 13 elementos, cada uno de los cuales tiene 2 V de FEM, y una resistencia interna de 0,003 Ω; un voltámetro de sulfato de cobre con electrodos de platino, cuya resistencia interna es de 7,5 Ω, y los cables de conexión, cuya resistencia es de 2 Ω y en los cuales, por el efecto Joule, se desprenden 180 cal/min. Calcular:

1. La intensidad de la corriente.
2. El peso de cobre depositado por min.
3. Fuerza contraelectromotriz del voltámetro.
4. Intensidad de la corriente en el caso de que los electrodos fuesen de cobre.

Solución

1)

$$Q = 0{,}24 I^2 R t \Rightarrow 180 = 0{,}24 I^2 2 \times 60 \Rightarrow \boxed{I = 2{,}5\text{ A}}$$



Problema XXIX-17

2)

$$\boxed{M = \frac{M_{at}}{\nu 96\,500}\, It = \frac{63}{2 \times 96\,500}\, 2{,}5 \times 60 = 0{,}049 \text{ g}}$$

3)

$$I = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R_T} \Rightarrow 2{,}5 = \frac{26 - \epsilon'}{9{,}539} \Rightarrow \boxed{\epsilon' = 2{,}15 \text{ V}}$$

4) Si los electrodos son de cobre, no existe fuerza contraelectromotriz del voltámetro ($\epsilon' = 0$); luego:

$$\boxed{I' = \frac{\epsilon}{R_T} = \frac{26}{9{,}539} = 2{,}7 \text{ A}}$$

Problema 18. Un circuito eléctrico está formado por las siguientes partes conectadas en serie: a) Una batería de acumuladores (FEM de cada elemento, 2 V; resistencia interior, despreciable). b) Una resistencia de 8 Ω introducida en un calorímetro con agua, cuya capacidad calorífica equivale a 500 g de agua. c) Un voltámetro de agua acidulada, con electrodos de platino. d) Un voltámetro de nitrato de plata con electrodos de plata. Se desea averiguar lo siguiente:

1. La intensidad de la corriente.

2. El volumen de hidrógeno producido durante 15 min en el voltámetro de agua acidulada, medido en condiciones normales.

3. El peso de plata depositado durante un cuarto de hora en el cátodo del voltámetro de NO_3Ag.

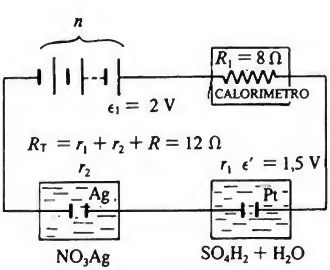
4. El número de elementos que tendrá la batería de acumuladores, sabiendo que la resistencia total del circuito es de 12 Ω.

DATOS: Peso atómico de la plata: Ag = 108. Fuerza contraelectromotriz del voltámetro de agua: 1,5 V. Para elevar un grado la temperatura del agua del calorímetro tiene que pasar la corriente durante 15 min.

Solución

1)

$$Q = 0{,}24 I^2 R_1 \tau = Mc\Delta t \Rightarrow 0{,}24 I^2 8 \times 15 \times 60 = 500 \Rightarrow \boxed{I = 0{,}53 \text{ A}}$$



Problema XXIX-18

2) La masa de hidrógeno producido será:

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{0{,}53 \times 15 \times 60}{96\,500} = V_0 \rho_0 \\ \rho_0 &= \frac{2}{22\,400} \text{ g/cm}^3 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{V_0 = 55{,}3 \text{ cm}^3}$$

3)

$$\boxed{M'' = \frac{108}{96\,500}\, 0{,}53 \times 15 \times 60 = 0{,}53 \text{ g}}$$

4)

$$I = \frac{n\epsilon_1 - \epsilon'}{R} \Rightarrow 0{,}53 = \frac{n2 - 1{,}5}{12} \Rightarrow \boxed{n = 4}$$

Problema 19. Un circuito eléctrico está formado por los siguientes aparatos conectados en serie: a) Una resistencia formada por un hilo metálico de 2 m de longitud y 0,4 mm de diámetro. Esta resistencia está sumergida en un calorímetro de cobre que pesa 167 g y contiene 600 g de agua. b) Un voltámetro con electrodos de plata que contiene una disolución NO_3Ag. c) Un voltámetro con electrodos de platino que contiene agua acidulada por SO_4H_2, provisto de una bureta para recoger juntos los gases desprendidos en ambos electrodos. Se hace pasar por el circuito una corriente continua y constante durante 30 min. Al cabo de este tiempo en el voltámetro de plata se han depositado 1,37 g de Ag y la temperatura del calorímetro ha aumentado en 6,2° C.

1. Calcular el volumen del gas recogido, medido en condiciones normales.

2. Calcular la resistencia sumergida y deducir la resistivdad del material.

DATOS: Calor específico del cobre: 0,09 cal/g · °C. Peso atómico de la plata: 108.

Solución

Con los datos de b) calculemos la intensidad de la corriente:

$$1{,}37 = \frac{108}{96\,500} I 30 \times 60 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 0{,}68 \text{ A}}$$

1)

$$\frac{1{,}37}{108} = \frac{M_O 2}{16} = \frac{M_H}{1} \quad \left| \begin{array}{l} M_O = 0{,}1015 \text{ g} \\ M_H = 0{,}0127 \text{ g} \end{array} \right.$$

$$p_O + p_H = 1 \text{ atm}$$

$$\left. \begin{array}{l} p_O V_0 = \dfrac{0{,}1015}{32} 0{,}082 \times 273 \\ p_H V_0 = \dfrac{0{,}0127}{2} 0{,}082 \times 273 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{V_0 = \left[\frac{0{,}1015}{32} + \frac{0{,}0127}{2} \right] 0{,}082 \times 273 \text{ l} = 0{,}213 \text{ l}}$$

2)

$$Q = 0{,}24 I^2 R \tau = M_{Cu} c \Delta t + M \Delta t$$

$$0{,}24 \times 0{,}68^2 R 30 \times 60 = 167 \times 0{,}09 \times 6{,}2 + 600 \times 6{,}2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 19\ \Omega}$$

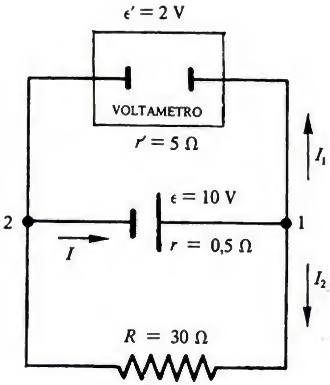
$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad 19 = \rho \frac{2}{\pi (0{,}2 \times 10^{-3})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 38\pi 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}}$$

Problema 20. Un generador eléctrico de 10 V de fuerza electromotriz y 0,5 Ω de resistencia interna alimenta un circuito con dos derivaciones. En una existe un voltámetro de 2 V de fuerza contraelectromotriz y 5 Ω de resistencia interna, y en la otra, una resistencia de 30 Ω. Calcular:

1. Intensidad de la corriente en el generador y en cada derivación.

2. Diferencia de potencial entre los bornes del generador.

3. El conjunto está funcionando 10 min. Calcular: a) Energía suministrada por el generador. b) Energía perdida en él, en forma de calor.



Problema XXIX-20

Solución

1) Leyes de Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ 0{,}5I + 5I_1 = 10 - 2 \\ 0{,}5I + 30I_2 = 10 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I = 1{,}732\ \text{A}} \\ \boxed{I_1 = 1{,}427\ \text{A}} \\ \boxed{I_2 = 0{,}305\ \text{A}} \end{array}$$

2)

$$\boxed{V_1 - V_2 = \epsilon - Ir = (10 - 1{,}732 \times 0{,}5)\ \text{V} = 9{,}134\ \text{V}}$$

3)

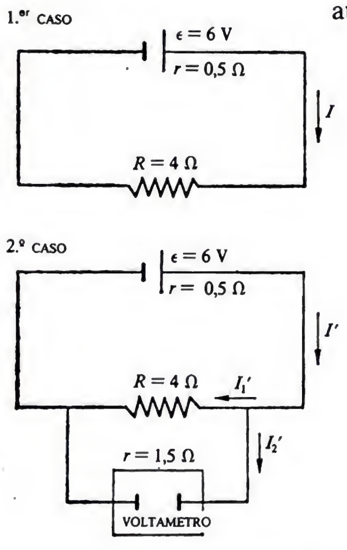
a)

$$\boxed{U = (V_1 - V_2)It = 9{,}134 \times 1{,}732 \times 10 \times 60 = 9\,492\ \text{J}}$$

b)

$$\boxed{U' = I^2rt = 1{,}732^2 \times 0{,}5 \times 10 \times 60 = 900\ \text{J}}$$

Problema 21. Se conecta un hilo metálico de 4 Ω de resistencia a los bornes de un generador de corriente continua de 6 V de FEM y 0,5 Ω de resistencia interior. Calcular:
1. La intensidad de corriente que circula.
2. El calor desprendido en el hilo durante 2 min.
3. Se conecta al generador anterior, en derivación con el hilo metálico a los bornes de un voltámetro de cobre, con electrodos de cobre y de 1,5 Ω de resistencia interna. Calcular: a) Las intensidades de corriente que circulan por el hilo y por el voltámetro. b) El peso de cobre que se depositará en el cátodo en 1 min. Peso atómico del cobre: 63,5.



Problema XXIX-21

Solución

1.er CASO:

1)

$$\boxed{I = \frac{\epsilon}{R + r} = \frac{6}{4 + 0{,}5} = \frac{4}{3}\ \text{A}}$$

2)

$$\boxed{Q = 0{,}24I^2Rt = 0{,}24\ \frac{16}{9}\ 4 \times 2 \times 60 = 204{,}8\ \text{cal}}$$

2.º CASO:

3)

a) Lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{l} I' = I'_1 + I'_2 \\ 0{,}5I' + 4I'_1 = 6 \\ 0{,}5I' + 1{,}5I'_2 = 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I' = 3{,}8\ \text{A}} \\ \boxed{I'_1 = 1\ \text{A}} \\ \boxed{I'_2 = 2{,}8\ \text{A}} \end{array}$$

b)

$$\boxed{M = \frac{63{,}5}{2 \times 96\,500}\ 2{,}8 \times 60 = 0{,}05\ \text{g}}$$

Problema 22. Se montan en serie tres generadores idénticos de 3,18 V, de FEM y 0,65 Ω de resistencia interna cada uno, que alimentan mediante conductores de 0,85 Ω de resistencia total, a una cuba electrolítica con nitrato de plata con elec-

trodos de plata de 4,3 Ω que lleva en derivación una resistencia de 3,7 Ω. Calcular:

1. La intensidad que recorren los conductores de alimentación.
2. La plata depositada en la cuba en 1 h.
3. El calor producido simultáneamente en la resistencia de 3,7 Ω.
4. La diferencia de potencial en los bornes de cada generador y de la cuba.
5. La potencia consumida por los generadores, la suministrada por los mismos al circuito, la consumida por la cuba y el rendimiento de la instalación.

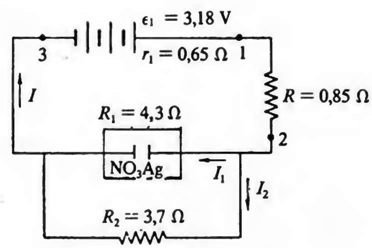
Solución

1) Lemas de Kirchhoff:

$$\left.\begin{array}{l} I = I_1 + I_2 \\ (3 \times 0{,}65 + 0{,}85)I + 4{,}3I_1 = 3 \times 3{,}18 \\ (3 \times 0{,}65 + 0{,}85)I + 3{,}7I_2 = 3 \times 3{,}18 \end{array}\right| \begin{array}{l} \boxed{I = 1{,}99 \text{ A}} \\ \boxed{I_1 = 0{,}92 \text{ A}} \\ \boxed{I_2 = 1{,}07 \text{ A}} \end{array}$$

2)

$$\boxed{M = \frac{M_{at}}{v96\ 500} I_1 t = \frac{108}{96\ 500} 0{,}92 \times 3\ 600 = 3{,}71 \text{ g}}$$



Problema XXIX-22

3)

$$\boxed{Q = 0{,}24 I_2^2 R_2 t = 0{,}24 \times 1{,}07^2 \times 3{,}7 \times 3\ 600 = 3\ 660 \text{ cal}}$$

4)

$$V_1 - V_3 = n\in_1 - Inr_1 = 3 \times 3{,}18 - 1{,}99 \times 3 \times 0{,}65 = 5{,}66 \text{ V}$$

luego en cada generador será:

$$\boxed{V - V' = \frac{V_1 - V_3}{3} = \frac{5{,}66}{3} = 1{,}89 \text{ V}}$$

$$\boxed{V_2 - V_3 = I_1 R_1 = 0{,}92 \times 4{,}3 = 3{,}96 \text{ V}}$$

5) Potencia consumida por los generadores:

$$\boxed{P_O = I^2 n r_1 = 1{,}99^2 \times 3 \times 0{,}65 = 7{,}72 \text{ W}}$$

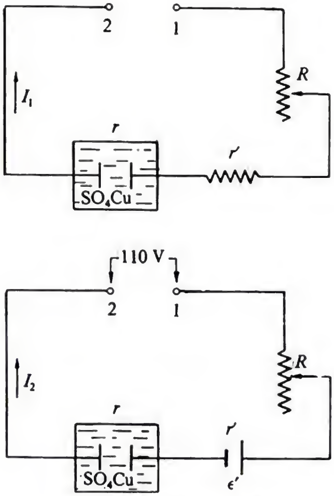
Potencia suministrada:

$$\boxed{P = n\in_1 I = 3 \times 3{,}18 \times 1{,}99 = 18{,}98 \text{ W}}$$

$$\eta = \frac{18{,}98 - 7{,}72}{18{,}98} = 0{,}60 \quad \Rightarrow \boxed{60\ \%}$$

Problema 23. Entre dos bornes de diferencia de potencial constante, igual a 110 V, están montados en serie un reóstato, un motor y una cuba electrolítica que contiene una disolución de sulfato de cobre con electrodos de cobre.

1. Cuando el motor está en reposo se depositan en el cátodo 3,522 g de cobre en 18 min. Calcular la resistencia total de todo el circuito.
2. Cuando el motor funciona el mismo peso de cobre es depositado en 30 min. Calcular la fuerza contraelectromotriz del motor y su potencia.



Problema XXIX-23

Solución

1)

$$R_T = R + r' + r$$

$$M = \frac{M_{at}}{\nu 96\,500} I_1 t_1 \Rightarrow 3{,}522 = \frac{63}{2 \times 96\,500} I_1 18 \times 60 \Rightarrow I_1 = 10 \text{ A}$$

$$V_1 - V_2 = I_1 R_T \Rightarrow 110 = 10 R_T \Rightarrow \boxed{R_T = 11\ \Omega}$$

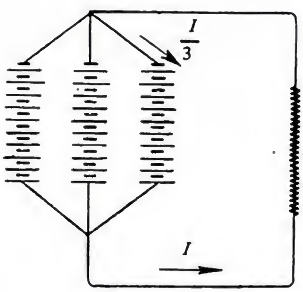
2)

$$M = \frac{M_{at}}{\nu 96\,500} I_2 t_2 \Rightarrow 3{,}522 = \frac{63}{2 \times 96\,500} I_2 30 \times 60 \Rightarrow I_2 = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{(V_1 - V_2) - \epsilon'}{R_T} \Rightarrow 6 = \frac{110 - \epsilon'}{11} \Rightarrow \boxed{\epsilon' = 44 \text{ V}}$$

$$\boxed{P_M = \epsilon' I_2 = 44 \times 6 = 264 \text{ W}}$$

Problema 24. Una batería de pilas (FEM: 0,9 V; resistencia interna: 1,6 Ω cada una) está formada por 30 elementos conectados de 10 en 10 en serie y formando tres grupos idénticos asociados en paralelo. Al paso de la corriente se deposita cobre en los cátodos respectivos. Si la resistencia externa es de 205 Ω y la batería está 1 h en funcionamiento, ¿qué cantidad total de cobre se habrá depositado? Peso atómico del cobre: 63,5.



Problema XXIX-24

Solución

$$\frac{I}{3} 10 \times 1{,}6 + I 205 = 10 \times 0{,}9 \Rightarrow I = \frac{27}{631} \text{ A}$$

en cada pila:

$$M_1 = \frac{63{,}5}{2 \times 96\,500} \frac{27}{3 \times 631} 3\,600 = 0{,}017 \text{ g} \qquad \boxed{M = 30 M_1 = 0{,}51 \text{ g}}$$

Problema 25. Se dispone de 12 pilas Leclanché, cada una de 1,5 V de fuerza electromotriz y de resistencia interna r_1. Agrupadas en dos series paralelas de seis elementos cada una, alimentan una resistencia R sumergida en 400 g de petróleo ($c = 0{,}5$ cal/g · °C) contenido en un calorímetro. Cuando la intensidad de la corriente es de 0,5 A, la temperatura del petróleo sube 1,5° C en 7 min. Calcular:

1. La resistencia R.

2. La diferencia de potencial entre los bornes de la batería de pilas.

3. La resistencia interior r_1 de una pila.

4. El peso de cinc desaparecido en el conjunto de las pilas durante los 7 min que dura la experiencia.

Dibujar un esquema del montaje. Peso atómico del cinc: 66.

Solución

1) $Q = 0{,}24 I^2 R\tau = Mc\Delta t \;\Rightarrow\; 0{,}24 \times 0{,}5^2 R 7 \times 60 = 400 \times 0{,}5 \times 1{,}5 \;\Rightarrow\; \boxed{R = 12\ \Omega}$

2)

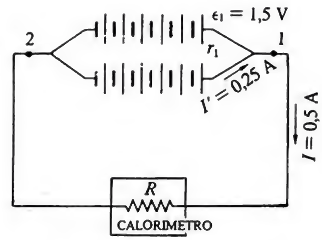
$$\boxed{V_1 - V_2 = IR = 0{,}5 \times 12 = 6\ \text{V}}$$

3) Leyes de Kirchhoff:

$$0{,}25 \times 6r_1 + 0{,}5 \times 12 = 6 \times 1{,}5 \;\Rightarrow\; \boxed{r_1 = 2\ \Omega}$$

4) En una pila:

$$M_1 = \frac{66}{2 \times 96\,500}\, 0{,}25 \times 7 \times 60 = 0{,}036\ \text{g} \;\Rightarrow\; \boxed{M = 12M_1 = 0{,}43\ \text{g}}$$



Problema XXIX-25

Problema 26. Un circuito comprende: a) Doce acumuladores, cada uno con una fuerza electromotriz $\in = 2$ V y una resistencia interna $r = 0{,}3\ \Omega$, agrupados en tres series de a cuatro elementos, montados en paralelo. b) Una cuba electrolítica que contiene una disolución de sulfato cúprico en la que se sumergeñ dos electrodos de cobre; la resistencia de la cuba es $0{,}9\ \Omega$. c) Un pequeño motor. Se pide lo siguiente:

1. Cuando el motor está inmovilizado, el peso de cobre depositado es de 2,56 g en 32 min 10 s. ¿Cuánto vale la resistencia del motor? (Cu = 64).

2. Cuando el motor gira el peso de cobre depositado en el mismo tiempo es de 0,96 g. ¿Cuánto vale la fuerza contraelectromotriz del motor? ¿Cuánto vale su potencia? ¿Cuál es la diferencia de potencial entre sus bornes?

3. Quitamos el motor y agrupamos los 12 acumuladores de tal manera que nos proporcionen el máximo depósito de cobre en un tiempo dado. ¿Cómo hemos de agruparlos? Razónese la contestación.

Solución

1) Leyes de Faraday:

$$2{,}56 = \frac{64}{2 \times 96\,500} I_1 (32 \times 60 + 10) \;\Rightarrow\; I_1 = 4\ \text{A}$$

Leyes de Kirchhoff:

$$\frac{4}{3}\, 4 \times 0{,}3 + 4r' + 4 \times 0{,}9 = 4 \times 2 \;\Rightarrow\; \boxed{r' = 0{,}7\ \Omega}$$

2) Leyes de Faraday:

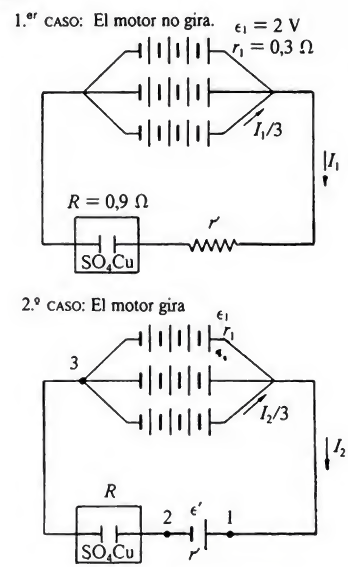
$$0{,}96 = \frac{64}{2 \times 96\,500} I_2 (32 \times 60 + 10) \;\Rightarrow\; I_2 = 1{,}5\ \text{A}$$

Leyes de Kirchhoff:

$$\frac{1{,}5}{3}\, 4 \times 0{,}3 + 1{,}5(0{,}7 + 0{,}9) = 4 \times 2 - \in' \;\Rightarrow\; \boxed{\in' = 5\ \text{V}}$$

$$\boxed{P' = \in' I_2 = 5 \times 1{,}5 = 7{,}5\ \text{W}}$$

$$\boxed{V_1 - V_2 = \in' + I_2 r' = (5 + 1{,}5 \times 0{,}7)\ \text{V} = 6{,}05\ \text{V}}$$



Problema XXIX-26

3) Aplicando las leyes de Kirchhoff a un circuito de resistencia externa R que tiene n acumuladores en serie y m series en paralelo, la intensidad de corriente que circula por el circuito general (exterior) es:

$$I = \frac{n\epsilon_1}{R + \frac{n}{m} r_1}$$

El número de acumuladores será:

$$N = mn = 12$$

luego:

$$I = \frac{n\epsilon_1}{R + \frac{n}{m} r_1} = \frac{n\epsilon_1}{R + \frac{n}{N/n} r_1} = \frac{n\epsilon_1}{R + \frac{n^2}{N} r_1} = \frac{nN\epsilon_1}{RN + n^2 r_1}$$

Expresión de I en función de la variable n.

Para que I sea máxima es necesario que:

$$0 = \frac{dI}{dn} = \frac{N\epsilon_1(RN + n^2 r_1) - nN\epsilon_1 2nr_1}{[RN + n^2 r_1]^2}$$

Es decir:

$$N\epsilon_1(RN + n^2 r_1) = nN\epsilon_1 2nr_1 \quad \Rightarrow \quad RN + n^2 r_1 = 2n^2 r_1 \quad \Rightarrow \quad RN = n^2 r_1 \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{RN}{r_1}}$$

para los valores dados:

$$n = \sqrt{\frac{0{,}9 \times 12}{0{,}3}} = 6$$

Por tanto, la asociación de I máxima es de dos series, con seis acumuladores cada una.

Capítulo XXX

ELECTROMAGNETISMO

A) FUERZA DE LORENTZ

FORMULARIO

FUERZA DE LORENTZ A UN CONDUCTOR SUMERGIDO EN UN CAMPO MAGNÉTICO:

$$d\boldsymbol{F} = I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} = \int_C I d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$$

FUERZA DE LORENTZ SOBRE UNA CARGA QUE SE MUEVE EN UN CAMPO MAGNÉTICO:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

FLUJO DEL CAMPO MAGNÉTICO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE:

$$d\Phi = \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = \int_A \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

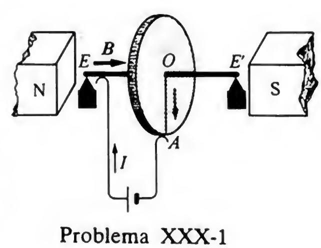
MOMENTO MAGNÉTICO DE UNA ESPIRA:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

MOMENTO MAGNÉTICO DE UN ARROLLAMIENTO:

$$\boldsymbol{m} = nI\boldsymbol{A}$$

Problema 1. Un disco metálico puede girar alrededor de un eje EE'. Se instala una pila en la forma de la figura, estableciendo los contactos con la periferia de la rueda y con el eje por medio de escobillas que permiten el giro de la rueda sin perder el contacto. La corriente circula en el sentido de la flecha, funcionando el radio OA como conductor. Puesta la rueda en un campo magnético cuya dirección es la del eje, se pone a girar sola. ¿Por qué?



Problema XXX-1

Solución

Sobre cada uno de los puntos del radio OA actúan fuerzas perpendiculares a él y hacia el exterior del plano del dibujo, determinadas por la fuerza de Lorentz, que hacen girar a la rueda de forma que su punto A saldría del papel hacia nosotros.

Problema 2. La masa de la rueda de Barlow del problema anterior es de 20 g. La experiencia se hace en el vacío; el campo magnético es de 2×10^{-3} T y la intensidad de la corriente es de 1 A (ambos los supondremos constantes con el tiempo). Calcular la velocidad angular de la rueda a los 10 s de iniciado su movimiento.

Solución

El valor de la fuerza que actúa sobre cada elemento del radio dr queda determinado por la «fuerza de Lorentz»:

$$\left.\begin{array}{l} dF = IdrB\,\mathrm{sen}\varphi \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}\varphi = 1 \end{array}\right| \Rightarrow dF = IdrB$$

La integración de esta expresión nos da el valor de la fuerza que actúa sobre la totalidad del radio y en su punto medio:

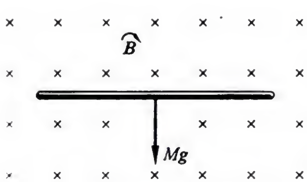
$$F = BI\int dr = BIr$$

El momento de tal fuerza con respecto al centro de la rueda es:

$$N = BIr\frac{r}{2} = \frac{BIr^2}{2}$$

El momento del par es igual al producto del momento de inercia, $Mr^2/2$, por la aceleración angular que adquiere el cuerpo y, por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BIr^2}{2} = \dfrac{1}{2}Mr^2\alpha \\ \alpha = \dfrac{\omega}{t} \end{array}\right| \Rightarrow BI = \frac{M\omega}{t} \Rightarrow 2 \times 10^{-3} = \frac{2 \times 10^{-2}\omega}{10} \Rightarrow \boxed{\omega = 1 \text{ rad/s}}$$



Problema XXX-3

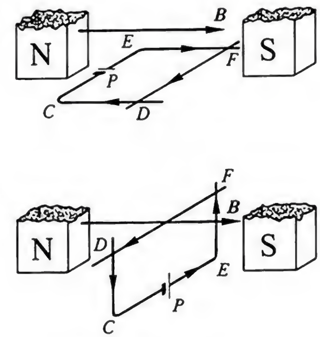
Problema 3. Un alambre homogéneo de 50 cm de longitud y 10 g de masa, por el que circula una intensidad de corriente I, se encuentra «sumergido» en un campo magnético de valor $B = 0{,}2$ T (perpendicular al plano de la figura y que entra en la página). Determinar la magnitud y dirección de I para que se mantenga en equilibrio y no caiga por su peso.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} F = Mg \\ F = BIl \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{Mg}{Bl} = \frac{10^{-2} \times 9{,}8}{0{,}2 \times 0{,}5} = 0{,}98 \text{ A}}$$

que tendrán que ir de izquierda a derecha de la figura para que la fuerza de origen magnético esté dirigida hacia arriba y anule el peso.

Problema 4. Un hilo conductor DF por el que circula una corriente producida por la pila P se puede deslizar a lo largo de los hilos CD y EF sobre los que descansa. Variamos la posición del cuadro, poniéndolo vertical. Si la intensidad de la corriente es adecuada, el hilo DF no caería. ¿Por qué?



Problema XXX-4

Solución

La aplicación de la fuerza de Lorentz nos indica que sobre el hilo DF actúa una fuerza perpendicular a él y hacia arriba, cuyo valor es:

$$\left.\begin{aligned} F &= BIl\operatorname{sen}\varphi \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right| \quad F = BIl$$

Si esta fuerza es igual al peso del hilo, éste no caerá.

Problema 5. En la experiencia del problema anterior realizada en el vacío el campo magnético B es de 196×10^{-4} T y la intensidad de la corriente es 5 A. Calcular la masa de cada cm del hilo DF para que no caiga por su peso.

Solución

La expresión de la fuerza de Lorentz es:

$$dF = BIdl\operatorname{sen}\varphi$$

Siendo constantes todos los factores y el ángulo φ que forma el hilo DF con el campo magnético 90° ($\operatorname{sen}\varphi = 1$), el valor de la fuerza hacia arriba es:

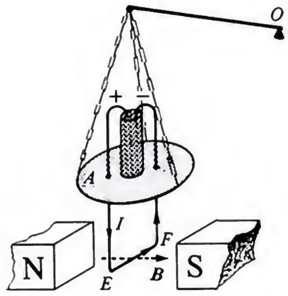
$$F = BI\int dl = BIl$$

La fuerza F queda equilibrada por el peso del hilo; si λ es la masa de cada unidad de longitud, λl es la masa del hilo y su peso; λlg, por tanto:

$$\lambda lg = BIl \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{BI}{g} = \frac{0{,}0196 \times 5}{9{,}8}\ \text{kg/m} = \frac{0{,}0196 \times 5 \times 10^3}{9{,}8 \times 10^2}\ \text{g/cm} = 0{,}1\ \text{g/cm}}$$

Problema 6. En el platillo de una balanza de Cotón colocamos una pila de FEM 1 V que alimenta un circuito de resistencia total 1 Ω. El circuito está en el seno de un campo magnético producido por un electroimán NS de forma que el campo magnético entre sus polos es perpendicular a los hilos que hay entre las piezas polares. Antes de establecer contacto entre pila y circuito se coloca en el otro platillo de la balanza una tara, de mayor masa que la existente en A, y se equilibra la balanza mediante pesas de masa $M_1 = 15{,}830$ g. Se hace circular la corriente y para mantener el equilibrio de la balanza hay que modificar las pesas de A; la masa de ellas, conseguido el equilibrio, es $M_2 = 15{,}730$ g. La longitud del hilo EF es 9,8 cm. La experiencia se realiza en vacío. Calcular la intensidad del campo entre los polos del electroimán.

Solución



Problema XXX-6

La fuerza de Lorentz:

$$dF = BIdl\operatorname{sen}\varphi \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\varphi = 1 \qquad \Bigg| \qquad F = BI\int dl = BIl$$

esta fuerza queda medida por la variación del peso en la balanza:

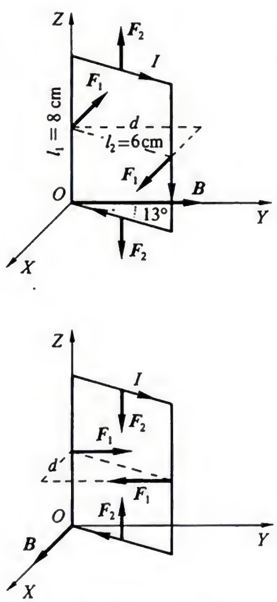
$$(M_1 - M_2)g = BIl \qquad I = \frac{\epsilon}{R} = 1 \text{ A} \qquad \Bigg| \qquad (15{,}830 - 15{,}730)10^{-3}\ 9{,}8 = B9{,}8 \times 10^{-2} \Rightarrow \boxed{B = 10^{-2}\text{ T}}$$

Problema 7. El cuadro rectangular de la figura adjunta puede girar alrededor del eje Z y transporta una corriente de 10 A en el sentido indicado.

1. Si el cuadro se encuentra en un campo magnético uniforme de 0,2 T paralelo al eje Y, calcular la fuerza ejercida sobre cada lado del cuadro en dyn y el momento en dyn · cm necesario para mantener el cuadro en la posición indicada.

2. La misma cuestión cuando el campo es paralelo al eje X.

3. ¿Qué momento sería necesario aplicar al cuadro para que permanezca en equilibrio en el caso en que éste pudiese girar alrededor de un eje que pasase por su centro, paralelamente al eje Z?



Problema XXX-7

Solución

$$F = BIl\operatorname{sen}\varphi$$

1)

$$F_1 = 0{,}2 \times 10 \times 8 \times 10^{-2}\text{ N} \Rightarrow \boxed{F_1 = 16\ 000\text{ dyn}}$$

$$F_2 = 0{,}2 \times 10 \times 6 \times 10^{-2}\operatorname{sen}13°N \Rightarrow \boxed{F_2 = 2\ 700\text{ dyn}}$$

$$N_1 = F_1 d = F_1 l_2 \cos\varphi = 16\ 000 \times 6\cos 13°\text{ dyn}\cdot\text{cm} \Rightarrow \boxed{N_1 = 93\ 540\text{ dyn}\cdot\text{cm}}$$

2)

$$F_1 = 0{,}2 \times 10 \times 8 \times 10^{-2}\text{ N} \Rightarrow \boxed{F_1 = 16\ 000\text{ dyn}}$$

$$F_2 = 0{,}2 \times 10 \times 6 \times 10^{-2}\operatorname{sen}103°\text{ N} \Rightarrow \boxed{F_2 = 11\ 700\text{ dyn}}$$

$$N_2 = F_1 d = F_1 l_2 \operatorname{sen}\varphi = 16 \times 10^3 \times 6\operatorname{sen}13°\text{ dyn}\cdot\text{cm} \Rightarrow \boxed{N_2 = 21\ 600\text{ dyn}\cdot\text{cm}}$$

3) Habría que aplicar pares iguales, pero de sentidos contrarios a los obtenidos en los apartados 1) y 2).

Problema 8. Un electrón penetra normalmente en un campo magnético uniforme de 15×10^{-4} T. La velocidad es de 2×10^6 m/s. Calcular:

1. La fuerza que actúa sobre el electrón.

2. El radio de la órbita que describe.

3. El tiempo que tarda en recorrer esa órbita.

Solución

1)

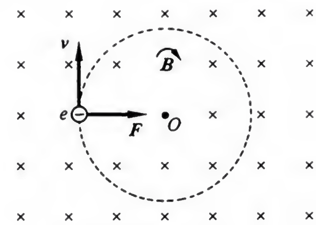
$$\boxed{F = Bqv = 15 \times 10^{-4}\ 1{,}6 \times 10^{-19}\ 2 \times 10^{6} = 48 \times 10^{-17}\ \text{N}}$$

2) La fuerza que actúa sobre el electrón es constante y siempre perpendicular a la velocidad de éste y, por tanto, a la trayectoria; en consecuencia, ésta es circular, calculándose su radio:

$$Bqv = M\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9{,}1 \times 10^{-31}\ 2 \times 10^{6}}{15 \times 10^{-4}\ 1{,}6 \times 10^{-19}}\ \text{m} = 7{,}6\ \text{mm}}$$

3)

$$v = \frac{2\pi}{T}r = \frac{Bqr}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi M}{Bq} = \frac{2\pi 9{,}1 \times 10^{-31}}{15 \times 10^{-4}\ 1{,}6 \times 10^{-19}} = 2{,}38 \times 10^{-8}\ \text{s}}$$



Problema XXX-8

Problema 9. Se lanza un electrón con una velocidad de $v = 10^5$ km/s en el interior de un campo magnético, normalmente a la dirección de la inducción B, cuyo valor es de 10^{-2} T. Se pide:

1. Demostrar que el electrón seguirá una trayectoria circular con un movimiento uniforme, y calcular el radio de la trayectoria y el número de Hz.

2. Calcular en J la energía del electrón a su entrada en el campo.

3. Calcular la variación de potencial V que debe experimentar ese electrón para pasar del reposo a la velocidad v (suponemos invariable la masa).

Solución

1) La fuerza debida a $\boldsymbol{B}$ es constantemente perpendicular a la trayectoria, luego tiene que seguir una trayectoria circular:

$$\boxed{r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9{,}1 \times 10^{-31}\ 10^{8}}{10^{-2}\ 1{,}6 \times 10^{-19}}\ \text{m} = 5{,}7\ \text{cm}}$$

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{Bq}{2\pi M} = \frac{10^{-2}\ 1{,}6 \times 10^{-19}}{2\pi 9{,}1 \times 10^{-31}} = 2{,}8 \times 10^{8}\ \text{Hz}}$$

2)

$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}1 \times 10^{-31}\ 10^{16} = 4{,}55 \times 10^{-15}\ \text{J}}$$

3)

$$T = (V - V')q \quad \Rightarrow \quad 4{,}55 \times 10^{-15} = (V - V')1{,}6 \times 10^{-19} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V - V' = 28\,400\ \text{V}}$$

Problema 10. Sobre un protón que posee una energía cinética de 4,5 MeV actúa en dirección normal a su trayectoria un campo magnético uniforme de valor 8 T. Determinar:

1. Valor de la fuerza que actúa sobre él.

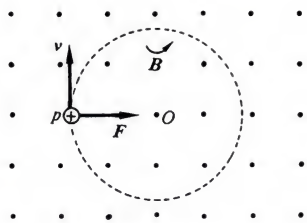
2. El radio de la órbita descrita.

3. Número de vueltas que da en 1 s.

Solución

$$T = 4{,}5 \text{ MeV} = 4{,}5 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J} = 7{,}2 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} Mv^2 = T \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 7{,}2 \times 10^{-13}}{1{,}7 \times 10^{-27}}} = 2{,}91 \times 10^7 \text{ m/s}$$



Problema XXX-10

1)

$$\boxed{F = Bqv = 8 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 2{,}91 \times 10^7 = 37{,}3 \times 10^{-12} \text{ N}}$$

2)

$$Bqv = \frac{Mv^2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{1{,}7 \times 10^{-27} \times 2{,}91 \times 10^7}{8 \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 38{,}6 \times 10^{-3} \text{ m}}$$

3)

$$\boxed{\nu = \frac{Bq}{2\pi M} = \frac{8 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{2\pi 1{,}7 \times 10^{-27}} = 1{,}2 \times 10^8 \text{ Hz}}$$

Problema 11. Calcular el radio de la trayectoria y el semiperíodo al penetrar un *electrón, un protón o un deuterón con velocidad de 10^7* m/s en un campo magnético uniforme de 2×10^{-2} T; la velocidad y el campo son perpendiculares entre sí.

Solución

$$F = Bqv = M\frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{Mv}{Bq}$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T}\frac{Mv}{Bq} \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{\pi M}{Bq}$$

$e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C	$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg
$p = -e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C	$m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
$d = p = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C	$m_d = 2m_p = 2 \times 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

1)

$$\boxed{\begin{aligned} r_e &= \frac{9{,}1 \times 10^{-31} \times 10^7}{2 \times 10^{-2} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} = 2{,}8 \times 10^{-3} \text{ m} = 2{,}8 \text{ mm} \\ \frac{T_e}{2} &= \frac{\pi 9{,}1 \times 10^{-31}}{2 \times 10^{-2} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} \text{ s} = 8{,}93 \times 10^{-10} \text{ s} \end{aligned}}$$

2)

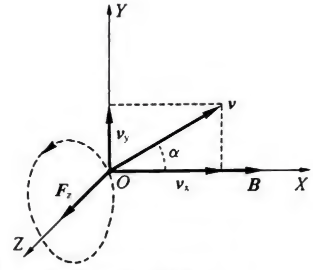
$$\boxed{\begin{aligned} r_p &= \frac{1{,}67 \times 10^{-27} \times 10^7}{2 \times 10^{-2} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5{,}2 \text{ m} \\ \frac{T_p}{2} &= \frac{\pi 1{,}67 \times 10^{-27}}{2 \times 10^{-2} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} \text{ s} = 1{,}64 \times 10^{-6} \text{ s} \end{aligned}}$$

3) Al ser la masa del deuterón doble que la del protón y tener la misma carga, el radio de la trayectoria circular y el semiperíodo serán el doble de los de aquélla:

$$\boxed{r_d = 10{,}4 \text{ m}} \qquad \boxed{\frac{T_d}{2} = 3{,}28 \times 10^{-6} \text{ s}}$$

Problema 12. ¿Qué trayectoria sigue un electrón al penetrar en un campo magnético de forma que las direcciones de la velocidad y el campo no sean perpendiculares ni coincidan? ¿Y si coinciden?

Solución



Problema XXX-12

Descompongamos v en v_x y v_y. Debido a la velocidad v_y, actuará la fuerza de Lorentz:

$$F_z = Bqv_y = Bqv\,\mathrm{sen}\alpha$$

y la partícula adquirirá una trayectoria circular:

$$Bqv\,\mathrm{sen}\alpha = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{Bq\,\mathrm{sen}\alpha}$$

Sobre la componente v_x no ejerce acción el campo B, ya que el ángulo que forman ambos es nulo. La partícula avanzará a lo largo del eje x, con movimiento uniforme de velocidad:

$$v_x = v\cos\alpha$$

Al componer los dos movimientos obtendremos una trayectoria helicoidal.

Si B y v coinciden, no se manifiesta la fuerza de Lorentz y la partícula: sigue con el movimiento que llevaba al entrar en el campo.

Problema 13. En un determinado instante una carga de 2 μC posee una velocidad $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ m/s en una región en la que existen un campo eléctrico $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ V/m y un campo magnético $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ T. Calcular la fuerza total ejercida sobre la carga en ese momento.

Solución

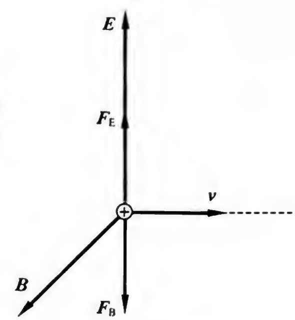
$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})2 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

$$\boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 2 \times 10^{-6} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 10^{-6}(\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k})\ \mathrm{N}$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = (2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k})2 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}}$$

Problema 14. ¿Qué condición es la necesaria para que una partícula electrizada que se mueve rectilíneamente siga en su trayectoria rectilínea, estando sometida a un campo eléctrico y a otro magnético perpendiculares entre sí y perpendiculares a su velocidad?

Solución



Problema XXX-14

Las fuerzas debidas al campo eléctrico y al magnético deben ser iguales y de sentido contrario:

$$F_E = F_B \quad \Rightarrow \quad Eq = Bqv \quad \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}}$$

Problema 15. Se aplica una diferencia de potencial de 100 V a las armaduras de un condensador, planas, paralelas, horizontales, separadas por 1 cm de distancia, y en el vacío. Calcular:

1. La intensidad del campo eléctrico entre dichas láminas.

2. La capacidad del condensador, si la superficie de cada lámina es de 0,5 m^2.

3. Se lanza horizontalmente un electrón entre las láminas con una velocidad de 10^7 m/s y se aplica un campo magnético perpendicular a dicha velocidad. Calcular la intensidad de este campo magnético para que el electrón no se desvíe, y determinar su dirección.

4. Calcular el radio de la órbita circular descrita por el electrón cuando se suprime el campo eléctrico.

Solución

1)

$$\boxed{E = \frac{V - V'}{d} = \frac{100}{0{,}01} = 10^4 \text{ V/m}}$$

2)

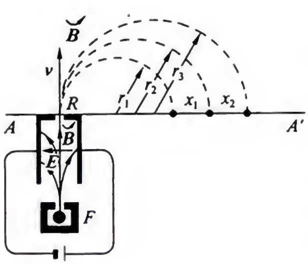
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{0{,}5}{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^{-2}} = 0{,}44 \times 10^{-9} \text{ F}}$$

3) (Ver problema anterior.)

$$v = \frac{E}{B} \Rightarrow 10^7 = \frac{10^4}{B} \Rightarrow \boxed{B = 10^{-3} \text{ T}}$$

4)

$$\boxed{r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{9{,}1 \times 10^{-31}\, 10^7}{10^{-3}\, 1{,}6 \times 10^{-19}} \text{ m} = 5{,}7 \text{ cm}}$$



Problema XXX-16

Problema 16. En el esquema representado en la figura de un espectrógrafo de masas ideado por Bainbridge, F es una fuente de iones acelerados a través de un potencial de algunos miles de voltios, que penetran en un «selector de velocidades» constituido por un condensador plano en el que se mantiene un campo eléctrico y perpendicularmente a él un campo magnético que sólo deja pasar a aquellos iones que poseen una determinada velocidad v. Por encima de AA' existe un campo magnético perpendicular al plano de la figura que hace que los iones de diferentes masas e igual carga describan distintas trayectorias circulares, incidiendo sobre una placa fotográfica que una vez revelada nos dará el espectro de masas. En el supuesto que el campo eléctrico entre las placas del condensador sea de 200 V/m y el campo magnético en ambas regiones descritas sea de 0,1 T, y el manantual emite iones de los tres isótopos de magnesio, $^{24}_{12}$Mg, $^{25}_{12}$Mg y $^{26}_{12}$Mg, con dos cargas positivas; calcular la distancia entre las líneas formadas por los tres isótopos sobre la placa fotográfica (x_1 y x_2 en la figura).

Solución

La carga de los iones será:

$$q = 2 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C} = 3{,}2 \times 10^{-19} \text{ C}$$

La masa del ion ${}^{24}_{12}Mg^{2+}$ es:

$$M_1 = 24 \text{ u} = 24 \times 1{,}66 \times 20^{-27} \text{ kg} = 39{,}84 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La masa del ion ${}^{25}_{12}Mg^{2+}$ es:

$$M_2 = 25 \text{ u} = 25 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 41{,}50 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La masa del ion ${}^{26}_{12}Mg^{2+}$ es:

$$M_3 = 26 \text{ u} = 26 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \text{ kg} = 43{,}16 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La velocidad con que salen los iones de la rendija R será tal que la fuerza de origen magnético ejercida sobre ellos quede compensada por la fuerza eléctrica; entonces:

$$Eq = Bqv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

En la región por encima de AA' los iones se moverán con una trayectoria circular tales que:

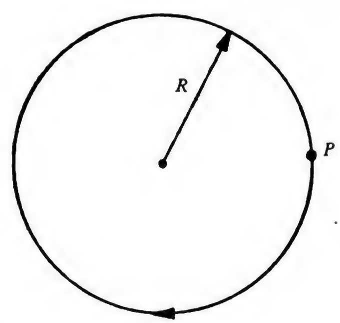
$$Bqv = \frac{Mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{Mv}{Bq} = \frac{E}{B^2q} M$$

que para cada ion valdrá:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{E}{B^2q} M_1 = \frac{200 \times 39{,}84 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3{,}2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2{,}49 \text{ mm} \\ r_2 &= \frac{E}{B^2q} M_2 = \frac{200 \times 41{,}50 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3{,}2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2{,}59 \text{ mm} \\ r_3 &= \frac{E}{B^2q} M_3 = \frac{200 \times 43{,}16 \times 10^{-27}}{10^{-2} \times 3{,}2 \times 10^{-19}} \text{ m} = 2{,}70 \text{ mm} \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \boxed{x_1 = 2(r_2 - r_1) = 0{,}20 \text{ mm}} \\ \boxed{x_2 = 2(r_3 - r_2) = 0{,}22 \text{ mm}} \end{array}$$

Problema 17. Comprobar que una partícula de carga q y masa M moviéndose en trayectoria circular de radio R y con velocidad angular ω equivale a una espira circular del mismo radio por la que circula una intensidad de corriente cuyo valor es $I = \omega q/2\pi$. Expresar esta I en función del momento angular de la partícula (L) y calcular el momento magnético del sistema.

Solución



Problema XXX-17

En efecto, si la trayectoria es la de la figura y la velocidad angular es ω, la frecuencia será:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

y por el punto P pasa la partícula ν veces en un segundo; luego en un segundo por el punto P pasa una carga $q\nu$; por tanto, en un intervalo de tiempo dt la carga dq que pasará por P será:

$$dq = \nu q dt$$

luego la intensidad de la corriente que da lugar *(equivale)* el movimiento de esa partícula cargada será:

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt} = \nu q = \frac{\omega}{2\pi} q} \qquad \text{c.q.d.}$$

Por otra parte, el momento angular de la partícula es:

$$L = \mathcal{g}\omega$$

($\mathcal{g}$ = momento de inercia respecto al centro = MR^2); entonces:

$$\boxed{I = \frac{1}{2\pi} q \frac{L}{\mathcal{g}} = \frac{qL}{2\pi MR^2}}$$

que es la expresión que queríamos obtener.

El «circuito» obtenido tendrá un momento magnético cuyo valor será:

$$m = IA = I\pi R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{1}{2} \frac{q}{M} L}$$

como $\boldsymbol{m}$ es un vector perpendicular al plano del circuito y el momento angular $\boldsymbol{L}$ también, se verifica que:

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{M} \boldsymbol{L}$$

B) LEY DE BIOT Y SABART

FORMULARIO

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3}$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CARGA EN MOVIMIENTO:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3}$$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA DEL VACÍO:

$$\mu_0 = \frac{4\pi}{10^7} \text{ N/A}^2$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO POR UNA CORRIENTE RECTILÍNEA INDEFINIDA:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

CAMPO MAGNÉTICO CREADO EN EL CENTRO DE UN CIRCUITO CIRCULAR:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Problema 18. En el plano del meridiano magnético (plano vertical que pasa por el eje de un magnetómetro, en equilibrio en el campo magnético terrestre) está colocado un circuito circular de 12,56 cm de radio. Cuando por él circula una corriente de 2 A la aguja magnética apoyada en un eje vertical gira un ángulo de 45°. Calcular la componente horizontal del campo magnético terrestre.

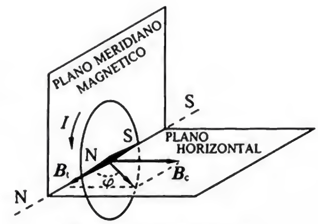
Solución

La intensidad del campo magnético creado por la corriente tiene por valor:

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{4\pi 2}{10^7\, 2 \times 0{,}1256} = 10^{-5}\ \text{T}$$

El magnetómetro gira un ángulo φ, colocándose en la dirección de la diagonal del rectángulo que tiene por lados el campo calculado, B_c (perpendicular al plano del circuito) y la componente horizontal del campo magnético terrestre, B_t:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tag}\varphi = \dfrac{B_c}{B_t} \\ \varphi = 45° \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\varphi = 1 \end{array}\right| \quad \boxed{B_t = B_c = 10^{-5}\ \text{T}}$$



Problema XXX-18

Problema 19. Tenemos un hilo conductor recto y muy largo. A la distancia de 10 cm de él y en un punto P colocamos un magnetómetro de forma que su posición de equilibrio (NS) esté en el mismo plano del hilo. Hacemos circular una corriente y el imán, girando en un plano horizontal (su eje es vertical) se desvía 45° con respecto a su primer equilibrio. Calcular la intensidad de la corriente que circula por el hilo. (La componente horizontal del campo magnético terrestre es la calculada en el problema anterior.)

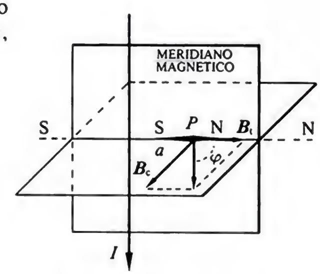
Solución

El imán gira, hasta adquirir la dirección de la diagonal del rectángulo formado por el campo magnético creado por la corriente y la componente horizontal del campo magnético terrestre, ya que ambos campos son perpendiculares entre sí:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tag}\varphi = \dfrac{B_c}{B_t} \\ \varphi = 45° \quad \Rightarrow \quad \text{tag}\varphi = 1 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad B_c = B_t = 10^{-5}\ \text{T}$$

y como:

$$B_c = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \Rightarrow \quad 10^{-5} = \frac{4\pi I}{10^7\, 2\pi 0{,}1} \quad \Rightarrow \boxed{I = 5\ \text{A}}$$



Problema XXX-19

Problema 20. Dos conductores paralelos, rectos y que se pueden considerar como indefinidos están recorridos por sendas corrientes eléctricas; la separación entre ambos es de 15 cm. Por uno de ellos pasan 54 000 C cada hora y por el otro una corriente de 10 A; las dos corrientes son del mismo sentido. Determinar: **1.** El valor y sentido de la fuerza que actúa, por cada cm de longitud de conductor.

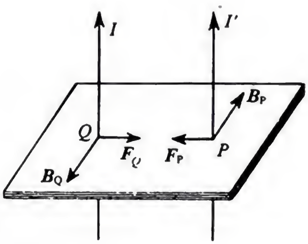
2. El campo magnético creado por el primer conductor, en un punto a 20 cm de él.
3. Si la corriente del primer conductor pasa a través de un voltámetro con agua acidulada, ¿cuántos gramos de hidrógeno se desprenden en cada hora?

Solución

$$I = \frac{54\,000}{3\,600} = 15 \text{ A} \qquad I' = 10 \text{ A}$$

1)

$$\boxed{F_Q = F_P = BIl = \mu_0 \frac{I'}{2\pi a} Il = \frac{4\pi}{10^7} \frac{15 \times 10 \times 10^{-2}}{2\pi 0{,}15} \text{ N} = 2 \times 10^{-6} \text{ N}}$$



Problema XXX-20

2)

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} = \frac{4\pi}{10^7} \frac{15}{2\pi 0{,}2} = 15 \times 10^{-6} \text{ T}}$$

3)

$$\boxed{M = \frac{1}{96\,500} 15 \times 3\,600 = 0{,}56 \text{ g}}$$

Problema 21. Dos largos y fijos conductores paralelos están separados 10 cm; por uno M pasa una corriente de 30 A, y por el otro N una de 40 A. Si las corrientes son de sentidos opuestos, determinar:
1. El valor del campo magnético resultante en una línea del plano de los dos conductores, paralela a ellos y a igual distancia de ambos.
2. El valor del campo magnético en una línea paralela a los conductores y situada a 5 cm de M y 15 cm de N.
3. ¿Cuál es la fuerza que por unidad de longitud sobre un conductor paralelo a ambos, en su plano y a igual distancia de ellos y por el que pasa una corriente de 5 A, en el mismo sentido de la que pasa por el conductor M.

Solución

1)

$$\boxed{B_1 = B_M + B_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I'}{2\pi a} = \frac{\mu_0}{2\pi a} [I + I'] = \frac{4\pi 70}{10^7\, 2\pi 0{,}05} = 28 \times 10^{-5} \text{ T}}$$

2)

$$a = 0{,}05 \text{ m}$$

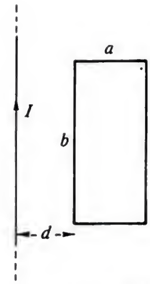
$$b = 0{,}15 \text{ m}$$

$$\boxed{B_2 = B_M + B_N = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} - \frac{\mu_0 I'}{2\pi b} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[\frac{I}{a} - \frac{I'}{b} \right] = 2 \times 10^{-7} \left[\frac{30}{0{,}05} - \frac{40}{0{,}15} \right] = \frac{2}{3} 10^{-4} \text{ T}}$$

3)

$$F = B_1 Il \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{F}{l} = 28 \times 10^{-5}\, 5 = 14 \times 10^{-4} \text{ N/m}}$$

Problema 22. Calcular el flujo magnético que atraviesa el cuadro rectangular de la figura. DATOS: $I = 2$ A, $a = 5$ cm, $b = 10$ cm, $d = 5$ cm.



Problema XXX-22

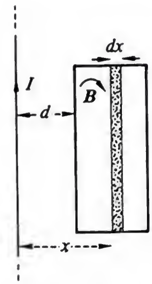
Solución

$$\left.\begin{aligned} d\Phi &= \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = BdA \\ B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \\ dA &= bdx \end{aligned}\right| \Rightarrow d\Phi = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\,\frac{dx}{x}$$

$$\Phi = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\,\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{\Phi = \frac{4\pi 2\times 10^{-1}}{10^7\, 2\pi}\ln 2 = 2{,}77\times 10^{-8}\ \text{Wb}}$$



Problema XXX-22-1.ª

Problema 23. Calcular, aplicando la ley de Biot y Sabart, el campo magnético creado en el centro de un circuito circular de radio R por el que circula una intensidad de corriente I.

Solución

Aplicando la fórmula de Biot y Sabart y considerando que el ángulo φ es 90°, obtendremos para valor del campo creado, por cada uno de los elementos de un circuito circular, en su centro:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl}{R^2}$$

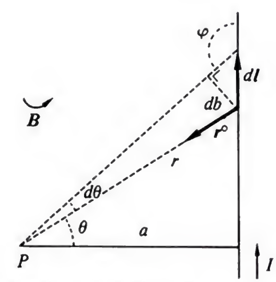
Todos estos campos se suman aritméticamente, ya que tienen la misma dirección (perpendicular al plano del circuito) y el mismo sentido:

$$B = \oint \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I}{R^2}\oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\,2\pi R \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

Problema 24. Determinar, aplicando la ley de Biot y Sabart, el valor del campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida en un punto a una distancia a del hilo.

Solución

Consideremos un elemento del hilo conductor dl de la figura, el vector $d\mathbf{B}$ que le corresponde es un vector perpendicular a dl y a $\mathbf{r}$, por tanto perpendicular al plano de la figura y hacia afuera. Si consideramos otro dl', su correspondiente $d\mathbf{B}'$ también será perpendicular al plano de la figura y, por consiguiente, paralelo al anterior; lo mismo ocurrirá para cualquier otro elemento que consideremos en el hilo, por lo cual el médulo del cmpo magnético total será la suma (integral) de los módulos creados por cada elemento; al ser:



Problema XXX-24

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\,\frac{dl\,\text{sen}\varphi}{r^2}$$

y teniendo en cuenta la figura, en la que se verifica:

$$dl = \frac{db}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{rd\theta}{\operatorname{sen}\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dl\operatorname{sen}\varphi}{r} = d\theta$$

sustituyendo nos dará:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\theta}{r}$$

sustituyendo r por su valor:

$$r = \frac{a}{\cos\theta}$$

obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta d\theta$$

Integrando para los límites $\theta = -\pi/2$ y $\theta = \pi/2$, abarcaremos todo el conductor rectilíneo indefinido:

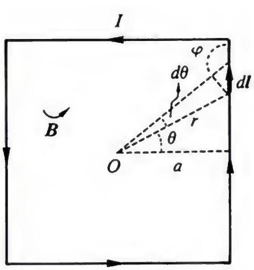
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\overset{\mu_0}{\pi_0 I}}{4\pi a}\,2$$

y en definitiva:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

Problema 25. Por integración de la ley de Biot y Savart, calcular el valor del campo magnético creado en el centro de un circuito cuadrado de lado l por el que circula una intensidad I. Realizar el cálculo para $l = 20$ cm e $I = 10$ A.

Solución



Problema XXX-25

Realizando en la expresión de la ley de Biot y Savart el mismo cambio de variables que los realizados al demostrar el campo creado por una corriente rectilínea e indefinida, obtenemos por cada uno de los lados del cuadrado:

$$B_1 = \frac{I\mu_0}{4\pi a}\int\cos\theta d\theta$$

Los límites de integración son $-\pi/4$ y $\pi/4$ y el valor de a es la mitad del lado del cuadrado:

$$B_1 = \frac{2I\mu_0}{4\pi l}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta d\theta = \frac{2I\mu_0}{4\pi l}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{2I\mu_0}{4\pi l}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{I\mu_0}{\pi l\sqrt{2}}$$

Como los campos producidos por cada uno de los lados del cuadrado coinciden en dirección (perpendicular al plano del papel) y en sentido (hacia el exterior), el campo total se obtendrá multiplicando al anterior por 4:

$$B = 4B_1 = \frac{4I\mu_0}{\pi l\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{4 \times 10 \times 4\pi}{10^7\pi 0{,}2\sqrt{2}} = 5{,}66 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}}$$

Problema 26. Calcular el campo magnético creado en el centro de un circuito en forma de hexágono regular de perímetro $36\sqrt{3}$ cm, cuando circula por él una corriente capaz de depositar por electrólisis de nitrato de plata 10,062 g de este metal en 16 min y 40 s.

Solución

Realizando en la expresión de la ley de Biot y Savart el mismo cambio de variables que en el problema anterior, obtenemos, para cada uno de los seis lados del hexágono:

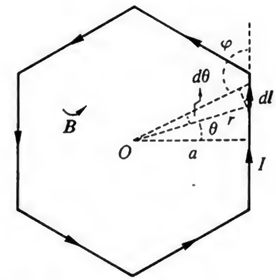
$$B_1 = \frac{I\mu_0}{4\pi a}\int_{\mathrm{l}}\cos\theta d\theta$$

Los límites de integración son $-\pi/6$ y $\pi/6$ ($-30°$ y $30°$). El valor de a es:

$$a = \frac{l}{2}\cos 30° = l\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

luego:

$$B_1 = \frac{I\mu_0}{\pi l\sqrt{3}}\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_{-30°}^{30°} = \frac{I\mu_0}{\pi l\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{I\mu_0}{\pi l\sqrt{3}}$$



Problema XXX-26

Y para los seis lados del hexágono (los campos de los lados coinciden en dirección y sentido):

$$B = \frac{6I\mu_0}{\pi l\sqrt{3}} = \frac{2I\mu_0\sqrt{3}}{\pi l} \qquad [1]$$

siendo:

$$l = \frac{\text{perímetro}}{6} = \frac{36\sqrt{3}}{6} = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$$

y como:

$$M = E_c It \;\Rightarrow\; I = \frac{M}{E_c t} = \frac{10{,}062}{0{,}001118(16\times 60+40)} = 9\text{ A}$$

Sustituyendo en [1]:

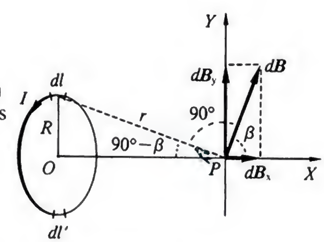
$$\boxed{B = \frac{2\times 9\times 4\pi\sqrt{3}}{10^7\pi 0{,}06\sqrt{3}} = 12\times 10^{-5}\text{ T}}$$

Problema 27. Determinar el campo magnético creado por un circuito circular de radio R en un punto del eje y a una distancia a de su centro, cuando circula por él una intensidad de corriente I.

Solución

Aplicando la fórmula de Biot y Sabart, el campo magnético creado por el elemento dl (figura) en un punto P del eje, y como la dirección de la corriente y la distancia r son perpendiculares ($\varphi = 90°$), nos quedará:

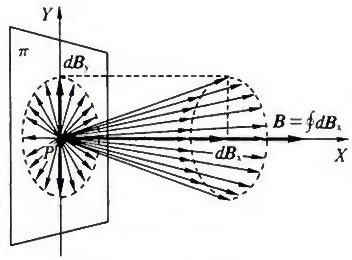
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl}{r^2}$$



Problema XXX-27-1.ª

Descomponiendo el vector dB en los ejes X e Y de la figura, y teniendo en cuenta que la componente del eje Y se nos anulará con la componente del campo creado por el elemento dl' en el punto P, y que esto nos ocurrirá con todas las componentes en el plano π (figura) de los campos magnéticos creados por todos los elementos que constituyen la espira, sacamos en consecuencia que el campo activo será la suma (integral) de todas las componentes de los campos magnéticos creados por todos los elementos de corriente, según el eje OX. Como la componente dB_x toma el valor:

$$dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{Idl}{r^2}\cos\beta$$



Problema XXX-27-2.ª

y de la figura deducimos:

$$r^2 = R^2 + a^2 \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}(90 - \beta) = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

sustituyendo, tenemos:

$$dB_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi[R^2 + a^2]^{3/2}}\, dl$$

e integrando para todo el circuito:

$$B = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0 IR}{4\pi[R^2 + a^2]^{2/3}}\, dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi[R^2 + a^2]^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi[R^2 + a^2]^{3/2}}\, 2\pi R$$

y simplificando:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 IR^2}{2[R^2 + a^2]^{3/2}}}$$

Si tenemos un arrollamiento de n espiras, y suponiendo que es plano, el campo magnético creado por él en un punto del eje a una distancia a será:

$$B = \frac{\mu_0 nIR^2}{2[R^2 + a^2]^{3/2}}$$

Problema 28. Por un solenoide recto de longitud l y radio R y que tiene arrolladas n espiras circula una intensidad de corriente I. Determinar:

1. El campo magnético en su interior, en un punto de su eje, aplicando la ley de Biot y Sabart.

2. El campo magnético en uno cualquiera de los extremos del solenoide y en un punto del eje cuando $l \gg R$.

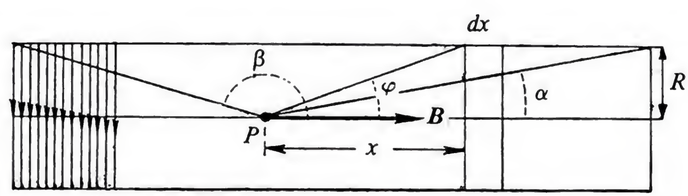
3. El campo magnético en su interior cuando se verifica que $l \gg R$ (solenoide recto e indefinido).

Solución

1) Siendo n/l el número total de espiras que existen en la unidad de longitud, entonces un elemento dx del solenoide tendrá ndx/l espiras. El campo magnético creado por estas ndx/l espiras en un punto P del eje será, según el problema anterior:

$$dB = \frac{\mu_0 InR^2}{2l[R^2 + x^2]^{3/2}}\, dx$$

Siendo R el radio del solenoide y x la distancia indicada en la figura:



Problema XXX-28

Teniendo en cuenta que:

$$x = \frac{R}{\text{tag}\varphi}$$

diferenciando esta expresión:

$$dx = -\frac{R}{\text{sen}^2\varphi}\,d\varphi$$

Sustituyendo y simplificando, nos queda:

$$dB = -\frac{\mu_0 In}{2l}\,\text{sen}\varphi d\varphi$$

e integrando para toda la longitud del solenoide entre los límites β y α, obtenemos:

$$\boxed{B = \int_\beta^\alpha -\frac{\mu_0 In}{2l}\,\text{sen}\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 In}{2l}\int_\alpha^\beta \text{sen}\varphi d\varphi = \frac{\mu_0 In}{2l}(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

2) En uno de los extremos del solenoide, siendo éste lo suficientemente largo ($l \gg R$), y en un punto del eje al ser $\alpha = 0$ y $\beta = 90°$, nos queda para valor del campo magnético:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 In}{2l}}$$

3) En este caso será: $\alpha = 0$ y $\beta = 180°$, con lo que tendremos para valor del campo:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 In}{l}}$$

Esta fórmula obtenida para un punto del eje es aplicable con gran aproximación para cualquier punto del interior de un solenoide largo, con la excepción de puntos próximos a los extremos.

C) LEY DE AMPERE

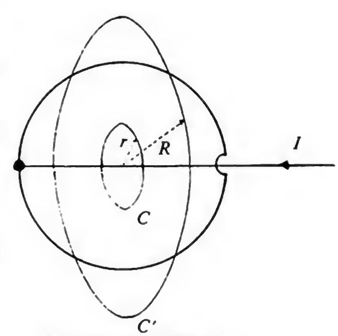
FORMULARIO

LEY DE AMPERE:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{rot}\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}$$

$\boldsymbol{J}$: densidad de corriente estacionaria.

Problema 29. Sea una esfera conductora hueca con un orificio por el que pasamos un hilo conductor que unimos a la pared opuesta de la esfera. Suponiendo que por el hilo conductor pasa una corriente I y vuelve por la esfera uniformemente repartida, calcular el campo magnético en el interior y exterior de la esfera.



Problema XXX-29

Solución

Aplicaremos la ley de Ampere a una circunferencia C de radio r menor que el de la esfera, para puntos interiores:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I$$

como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ son paralelos:

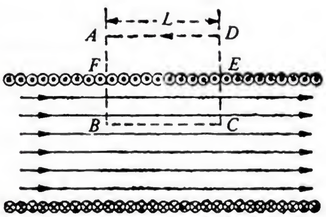
$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = Bdl \quad\Rightarrow\quad \oint Bdl = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad B2\pi r = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

Haciendo lo mismo para puntos exteriores, tomando una circunferencia C' de radio R, mayor que el de la esfera, y teniendo en cuenta que la intensidad que atraviesa la superficie en un sentido lo hace después en el otro, tendremos:

$$\oint_{C'} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_0 I \quad\Rightarrow\quad B2\pi R = \mu_0[I-I] = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B = 0}$$

Problema 30. Aplicando la ley de Ampere, determínese el campo magnético en el interior de un solenoide recto y largo con N espiras por unidad de longitud cuando por él circula una corriente de intensidad I.

Solución



Problema XXX-30

Representamos en la figura la sección de un solenoide muy largo comparado con su diámetro, de tal forma que si nos interesa sólo el cálculo del campo en un punto interior alejado de los extremos, podemos suponerlo como indefinido, y sabemos (de antemano) que el campo en el interior es uniforme y en el exterior el campo es nulo. Sabiendo esto, calculemos la circulación del campo a lo largo de una trayectoria que nos interese, es decir, que sea cómoda de cálculo, y en este caso de campo uniforme la elegimos como un rectángulo $ABCD$, parte del cual esté dentro del campo y parte fuera. Tenemos que calcular:

$$\oint_{ABCDA} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}$$

esta integral la podemos descomponer en suma de varias:

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_A^F \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} + \int_F^B \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} + \int_B^C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} + \int_C^E \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} + \int_E^D \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} + \int_D^A \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl}$$

pero:

$$\int_A^F \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_E^D \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_D^A \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = 0$$

puesto que $\boldsymbol{B} = 0$ en el exterior. Además:

$$\int_F^B \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_C^E \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = 0$$

porque $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ en los tramos FB y CE son siempre prependiculares, luego el producto escalar será nulo. Por tanto, el valor de:

$$\oint_{ABCDA} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_B^C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \int_B^C Bdl = B\int_B^C dl = BL$$

ya que en el tramo BC todo $\boldsymbol{dl}$ es paralelo a $\boldsymbol{B}$, y al ser el campo uniforme, el módulo de $\boldsymbol{B}$ es constante en todo punto, por lo que se puede sacar de la integral. Apliquemos ahora la ley de Ampere:

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_0 I$$

teniendo en cuenta que I es la intensidad que atraviesa el área de la curva C. En nuestro caso el área del rectángulo $ABCD$ es cortada sucesivas veces por el conductor que suponemos que transporta una intensidad I. Cada espira la corta una vez, y si hay N espiras por unidad de longitud, el número total de veces que la intensidad corta al área del rectángulo será: NL. Luego tendremos que:

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{dl} = \mu_0 NLI$$

e igualando nos queda:

$$BL = \mu_0 NLI$$

es decir:

$$\boxed{B = \mu_0 NI}$$

Si la longitud total del solenoide fuese l y n el número total de espiras:

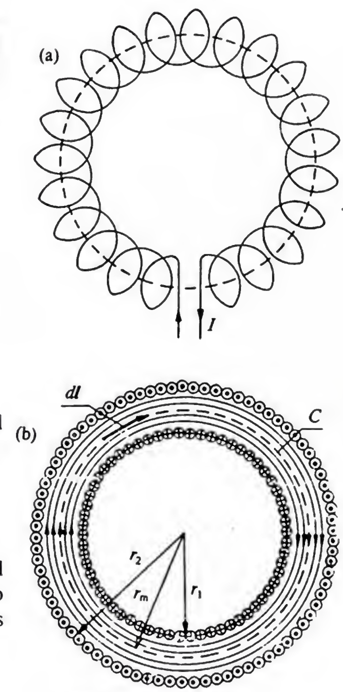
$$N = \frac{n}{l}$$

luego:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l}$$

de acuerdo con lo que ya habíamos obtenido en el problema 28 aplicando la ley de Biot y Savart.

Problema 31. Hallar el campo magnético en el interior de una bobina toroidal de n espiras recorridas por una intensidad I. Demostrar que para la misma bobina el campo magnético exterior es nulo. (Supondremos que la diferencia entre el radio externo e interno del toroide es despreciable frente al radio interno.)



Problema XXX-31

Solución

Aplicaremos la ley de Ampere para una curva C de radio:

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

como $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ son paralelos:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \oint_C B dl = B 2\pi r_m$$

ya que $\boldsymbol{B}$, debido a las hipótesis hechas, es prácticamente independiente de la distancia al centro. Como además la superficie de la curva C está atravesada por n espiras, tendremos:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 nI \quad \Rightarrow \quad B 2\pi r_m = \mu_0 nI \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 nI}{\pi(r_1 + r_2)}}$$

Para demostrar que el campo en el exterior es nulo, tomaremos una curva contenida en el plano del toroide, de radio mayor que r_2, con lo cual la intensidad que atraviesa en un sentido la superficie de la curva lo vuelve a hacer en el sentido contrario; luego la ley de Ampere nos da:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \oint_C B dl = \mu_0 [nI - nI] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0} \qquad \text{c.q.d.}$$

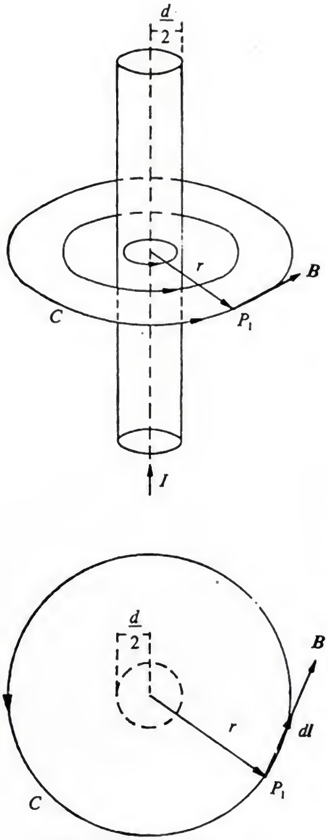
Problema 32. Aplicando la ley de Ampere, determínese el campo magnético creado por un hilo conductor rectilíneo indefinido de diámetro d y que transporta una intensidad I:

1. En un punto que diste r del conductor para $r > d/2$.

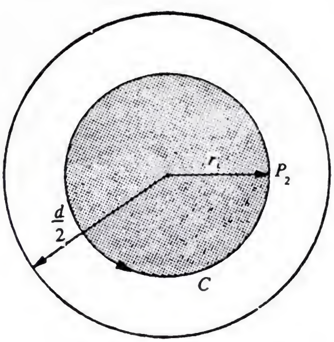
2. En un punto que diste r del conductor para $r < d/2$.

Solución

Por simetría el campo magnético tiene que ser tal que sus líneas de fuerza sean circulares, con centro en el eje del conductor, como se indica en la figura.



Problema XXX-32-1.ª



Problema XXX-32-2.ª

1) Elegimos como línea de integración una circunferencia C que coincida con la línea de fuerza de radio r. De esta manera el campo $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ son paralelos en todo punto de la línea; por tanto, se verifica que:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \oint_C Bdl = B \oint_C dl = B2\pi r$$

hemos sacado fuera de la integral el módulo del campo magnético, pues es constante en todo punto de la línea C.
Por otra parte, la aplicación de la ley de Amper nos dará:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 I$$

ya que la intensidad que atraviesa el área de la línea C es la que circula por el conductor. Igualando, queda:

$$B2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$

2) Elegimos como línea de integración una circunferencia C que coincida con una línea de fuerza de radio r. Operando exactamente igual que en el caso anterior, la circulación del campo a lo largo de dicha línea será:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = B2\pi r$$

La intensidad que atraviesa el área de C no será la misma que circula por el conductor «entero». Como la corriente circula uniformemente a través del conductor, podemos decir que la intensidad por unidad de área es constante, o lo que es lo mismo, que la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ es uniforme en todo el conductor (corrientes estacionarias). El valor de la densidad de corriente será:

$$J = \frac{I}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

luego la intensidad I' que circula por la sección de área C será:

$$J = \frac{I'}{\pi r^2}$$

es decir:

$$\frac{I'}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad I' = 4I\frac{r^2}{d^2}$$

por lo que la aplicación de la ley de Ampere nos dará:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 4I \frac{r^2}{d^2}$$

igualando nos queda:

$$B\ 2\ \pi r = \mu_0 4I\frac{r^2}{d^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{2\mu_0 Ir}{\pi d^2}}$$

D) PROPIEDADES MAGNETICAS DE LA MATERIA. CIRCUITOS MAGNETICOS

FORMULARIO

IMANACIÓN (VECTOR $\boldsymbol{M}$): $\boldsymbol{M} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{m}}{\Delta V}$

en módulo: $M = j_M = \dfrac{I_M}{l}$

j_M: densidad de corriente de magnetización.
I_M: corriente equivalente de magnetización.

INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO (EXCITACIÓN, VECTOR $\boldsymbol{H}$):

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$$

LEY DE AMPER: $\oint_c \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = I \Leftrightarrow \boldsymbol{rot H} = \boldsymbol{j}$

LEY DE BIOT Y SABART: $d\boldsymbol{H} = \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{I d\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{r}}{r^3}$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA Y PERMEABILIDAD RELATIVA:

$$\mu = \mu_0 \mu'$$

RELACIÓN ENTRE $\boldsymbol{B}$ Y $\boldsymbol{H}$: $\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$

CAMPO MAGNÉTICO EN EL INTERIOR DE UN SOLENOIDE:

Finito y en un punto de su eje: $B = \dfrac{\mu I n}{2l} (\cos\alpha - \cos\beta)$

Indefinido o cerrado: $B = \dfrac{\mu I n}{l}$

FUERZA MAGNETOMOTRIZ: $\mathcal{M} = nI$

RELUCTANCIA: $\mathcal{R} = \dfrac{1}{\mu} \dfrac{l}{A}$

«La reluctancia equivalente a otras en serie es la suma de las reluctancias asociadas.»

LEY DE OHM A CIRCUITOS MAGNÉTICOS: $\Phi = \dfrac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}}$

Problema 33. Un imán está constituido por una barra cilíndrica de 15 cm de longitud. Podemos obtener un solenoide equivalente arrollando sobre un cilindro de cartón, de las mismas dimensiones, 150 espiras y haciéndole pasar por ellas una intensidad de corriente de 3 A. Determínese la imanación M del imán.

Solución

El momento magnético es:

$$\Delta m = nIA$$

y la imanación (momento magnético de la unidad de volumen) nos queda:

$$\boxed{M = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{nIA}{lA} = \frac{nI}{l} = \frac{150 \times 3}{0{,}15} = 3\ 000 \text{ A/m}}$$

Problema 34. Por un hilo conductor recto y muy largo circula una corriente de 10 A. Calcular el campo magnético B, la intensidad del campo magnético H y la imanación M en un punto que se encuentra a 20 cm de él, según se encuentre «sumergido»:

1. En el vacío.
2. En el mu-metal ($\mu' = 2 \times 10^4$).
3. En el alumbre férrico ($\mu' = 1{,}00754$).

Solución

Para los tres casos:

$$H = \frac{I}{2\pi a} = \frac{10}{2\pi \times 0{,}2} = \frac{25}{\pi} \text{ A/m}$$

puesto que H sólo depende de las corrientes reales.

1)

$$B = \mu_0 H = \frac{4\pi 25}{10^7 \pi} = 10^{-5} \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{10^{-5}\ 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = 0$$

en el vacío M siempre es nulo, puesto que en él no se producen corrientes equivalentes de magnetización.

2)

$$B = \mu H = \mu_0 \mu' H = \frac{4\pi 2 \times 10^4 \times 25}{10^7 \pi} = 0{,}2 \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{0{,}2 \times 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = 15{,}9 \times 10^4 \text{ A/m}$$

3)

$$B = \mu H = \mu_0 \mu' H = \frac{4\pi 1{,}00754 \times 25}{10^7 \pi} = 100{,}754 \times 10^{-7} \text{ T}$$

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{100{,}754 \times 10^{-7} \times 10^7}{4\pi} - \frac{25}{\pi} = \frac{18{,}85 \times 10^{-2}}{\pi} \text{ A/m}$$

Problema 35. Un anillo de Rowland de 8 cm de radio medio, en el que arrollamos 800 vueltas de un hilo conductor a un núcleo de permeabilidad relativa 1 000, se le hace pasar una corriente de 5 A. Calcular:

1. El valor del campo magnético B en su interior.

2. El valor de la intensidad del campo magnético H en su interior.

3. La imanación del anillo.

Solución

1)

$$\boxed{B = \mu \frac{nI}{l} = \mu_0\mu' \frac{nI}{2\pi r} = \frac{4\pi \times 10^3 \times 800 \times 5}{10^7 \times 2\pi \times 8 \times 10^{-2}} = 10 \text{ T}}$$

2)

$$B = \mu H \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{B}{\mu_0\mu'} = \frac{10 \times 10^7}{4\pi \times 10^3} = \frac{10^5}{4\pi} \text{ A/m}}$$

3)

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{10 \times 10^7}{4\pi} - \frac{10^5}{4\pi} = \frac{999 \times 10^5}{4\pi} \text{ A/m}}$$

Problema 36. Considérese un anillo de Rowland de 10 cm de radio medio en el que arrollamos 1 000 espiras a un núcleo de hierro, por el arrollamiento circula una intensidad de corriente (corriente de conducción) de 5 A. El valor del campo magnético B en su interior es de 2 T. Calcular:

1. La intensidad del campo magnético H (excitación).

2. La imanación M.

3. El valor de la intensidad de la corriente de magnetización.

Solución

1) El valor de H es independiente del material del núcleo, y su valor es:

$$\boxed{H = \frac{nI}{l} = \frac{nI}{2\pi r} = \frac{10^3 \times 5}{2\pi 10^{-1}} = 7\,958 \text{ A/m}}$$

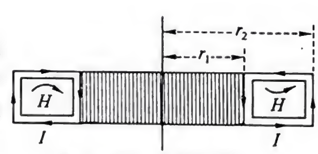
2)

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{2 \times 10^7}{4\pi} - 7\,958 = 15{,}8 \times 10^5 \text{ A/m}}$$

3)

$$\boxed{I_M = lj_M = lM = 2\pi r M = 2\pi 10^{-1} \times 7\,958 = 5\,000 \text{ A}}$$

Problema 37. Determinar el flujo de inducción magnética que atraviesa a la sección transversal cuadrada del toroide de hierro de la figura, siendo $r_1 = 10$ cm y $r_2 = 15$ cm, cuando lleva un arrollamiento de 1 000 vueltas; sabiendo que la intensidad de corriente que lo recorre es de 1 A y que la permeabilidad magnética relativa del hierro es $\mu' = 1\,200$.



Problema XXX-37

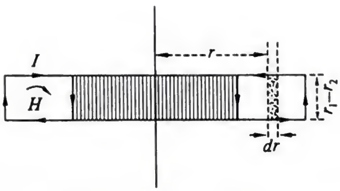
Solución

En este caso no se puede considerar la aproximación hecha en los problemas anteriores y operar con un radio medio, puesto que $r_2 - r_1$ no es despreciable frente a r_1. Por aplicación de la ley de Ampere a una curva circular C de radio r ($r_1 < r < r_2$) se obtiene:

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = nI$$

y como $\boldsymbol{H}$ y $d\boldsymbol{l}$ tienen la misma dirección y H es la misma en toda la curva C, se obtiene:

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_C H dl = H \int_C dl = H 2\pi r$$



Problema XXX-37-1.

que, junto con que $B = \mu H = \mu_0 \mu' H$, nos queda:

$$B = \frac{\mu_0 \mu'}{2\pi} \frac{nI}{r}$$

no siendo constante B en toda la sección transversal. El flujo que atravesará a una espira será:

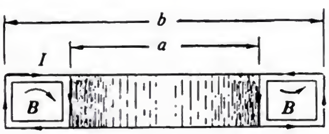
$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = \int_{r_1}^{r_2} B dA$$

siendo $dA = (r_2 - r_1) dr$, luego:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' nI(r_2 - r_1)}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \mu' nI(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores, queda:

$$\boxed{\Phi = \frac{4\pi 1\,200 \times 1\,000 \times 1 \times 5 \times 10^{-2}}{10^7\, 2\pi} \ln \frac{3}{2} \simeq 48 \times 10^{-4} \text{ Wb}}$$



Problema XXX-38

Problema 38. Un anillo de hierro de sección cuadrada y diámetro interior y exterior, respectivamente, de 25 cm y 35 cm, lleva un arrollamiento de 500 vueltas. Sabiendo que el flujo de inducción magnética vale 0,01 Wb, calcular la intensidad de la corriente que recorre el arrollamiento. (Permeabilidad magnética relativa del hierro: $\mu' = 1\,200$.)

Solución

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el problema anterior, en el que:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' nI(r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

y que en este caso:

$$r_1 = \frac{a}{2} \qquad r_2 = \frac{b}{2}$$

nos queda:

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mu' nI(b - a)}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

luego:

$$\boxed{I = \frac{4\pi\Phi}{\mu_0 \mu' n(b-a) \ln \dfrac{b}{a}} = \frac{4\pi 10^{-2}\, 10^7}{4\pi 1\,200 \times 500 \times 10^{-1} \ln \dfrac{7}{5}} \simeq 4{,}95 \text{ A}}$$

Si hacemos el problema por aproximación y tomando a B como constante en toda la sección transversal, como la longitud media del anillo es:

$$l = 2\pi r = 2\pi \frac{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}{2} = \frac{\pi(a+b)}{2} = 0{,}3\pi \text{ m}$$

Sección del anillo:

$$A = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 = 25 \text{ cm}^2 = 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\Phi = BA = \mu HA = \mu'\mu_0 \frac{In}{l} A \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I = \frac{\Phi l}{\mu'\mu_0 n A} = \frac{10^{-2}\, 0{,}3\pi}{1\,200 \times 4\pi 10^{-7}\, 500 \times 25 \times 10^{-4}} = 5 \text{ A}}$$

Problema 39. Se arrolla a un anillo de Rowland de hierro un hilo conductor recubierto de una materia aislante. La longitud media del anillo es 60 cm, y la sección es de 4 cm^2. Si es 3 el número de espiras por centímetro, el hilo está recorrido por una corriente de 5 A y la permeabilidad relativa del hierro en estas condiciones es 400; determinar:

1. La intensidad del campo magnético H dentro del anillo.
2. El valor del campo magnético B.
3. El flujo Φ.
4. La reluctancia R.
5. La fuerza magnetomotriz M.

Solución

El número total de espiras será:

$$n = lN = 60 \times 3 = 180 \text{ vueltas}$$

1)

$$\boxed{H = \frac{nI}{l} = \frac{180 \times 5}{0{,}6} = 1\,500 \text{ A/m}}$$

2)

$$\boxed{B = \mu H = \mu_0\mu' H = \frac{4\pi}{10^7} 400 \times 1\,500 = 24\pi 10^{-2} \text{ T}}$$

3)

$$\boxed{\Phi = BA = 24\pi 10^{-2}\, 4 \times 10^{-4} = 96\pi 10^{-6} \text{ Wb}}$$

4)

$$\boxed{R = \frac{1}{\mu}\frac{l}{A} = \frac{10^7 \times 0{,}6}{4\pi \times 400 \times 4 \times 10^{-4}} = \frac{93{,}75}{\pi} 10^5 \text{ A/Wb}}$$

5)

$$\boxed{M = R\Phi = nI = 180 \times 5 = 900 \text{ A}}$$

Problema 40. Alrededor de un anillo de hierro en el que la permeabilidad relativa es 1 000, que tiene una longitud total del circuito magnético de 40 cm y una sección de 80 cm^2, se enrolla un hilo conductor por el que circula una intensidad de corriente de 0,5 A. ¿Cuántas espiras se han de arrollar si se quiere conseguir un flujo magnético de 0,02 Wb a través de su armadura (sin entrehierro)?

Solución

La ley de Ohm aplicable a circuitos magnético es:

$$\Phi = \frac{M}{R}$$

Siendo la fuerza magnetomotriz de valor:

$$M = nI$$

y la reluctancia:

$$R = \frac{l}{\mu A}$$

luego:

$$\Phi = \frac{nI\mu A}{l} = \frac{nI\mu_0\mu' A}{l}$$

con lo que:

$$\boxed{n = \frac{\Phi l}{I\mu_0\mu' A} = \frac{0{,}02 \times 0{,}4 \times 10^7}{0{,}5 \times 4\pi \times 10^3 \times 80 \times 10^{-4}} = 1\ 591 \text{ espiras}}$$

Problema 41. En el interior de un solenoide de radio medio 20 cm y sección 15 cm^2 se le introduce un núcleo de hierro dulce de permeabilidad relativa $\mu' = 2\ 000$. Calcular la fuerza magnetomotriz capaz de producir en el entrehierro de $e = 2$ mm un flujo magnético de 15×10^{-4} Wb.

Solución

La reluctancia del circuito magnético será:

$$R = \frac{1}{\mu'\mu_0}\frac{l}{A} + \frac{1}{\mu_0}\frac{e}{A} = \frac{1}{\mu_0}\frac{l + \mu' e}{\mu' A}$$

siendo l la longitud del hierro y e la del entrehierro. Sustituyendo nos queda:

$$R = \frac{10^7}{4\pi}\frac{2\pi 20 \times 10^{-2} + 2\ 000 \times 2 \times 10^{-3}}{2\ 000 \times 15 \times 10^{-4}} = 1\ 394 \times 10^3 \text{ A/Wb}$$

despejando en la ley de Ohm para circuitos magnéticos la fuerza magnetomotriz, nos queda:

$$\boxed{M = R\Phi = 1\ 394 \times 10^3 \times 15 \times 10^{-4} = 2\ 091 \text{ A}}$$

Capítulo XXXI

CORRIENTES INDUCIDAS-ALTERNAS

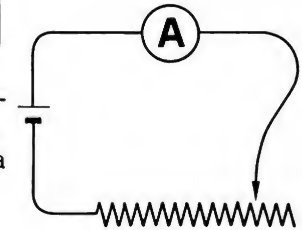
A) LEY DE FARADAY-LENZ

FORMULARIO

LEYES DE FARADAY Y DE LENZ:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} \qquad \epsilon = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

Problema 1. **1.** Determinar el sentido de las corrientes de autoinducción al deslizar hacia la izquierda o hacia la derecha el contacto del reóstato de la figura. **2.** ¿Por qué al abrir un circuito por medio de un interruptor de palanca salta una chispa eléctrica cuando ya el circuito está abierto?



Problema XXXI-1

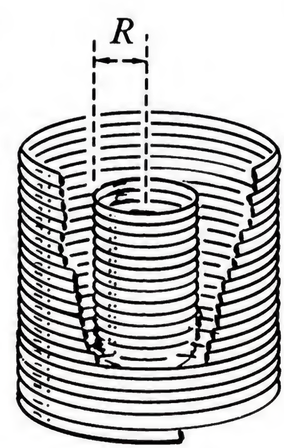
Solución

1) a) Al deslizar el contacto hacia la derecha, como aumentamos la resistencia, disminuirá la intensidad y se producirá una corriente de autoinducción que tenderá a oponerse a esta disminución y, por tanto, tendrá el sentido de la corriente originada por la pila (en la figura, sentido de las saetas del reloj).

b) Al deslizar el contacto hacia la izquierda se produce una disminución en la resistencia y, por tanto, un aumento en la intensidad. La corriente de autoinducción tenderá a oponerse al aumento de intensidad y su sentido será el contrario al de la corriente originada por la pila (la corriente de autoinducción tendrá sentido contrario a las saetas del reloj, en el caso de la pila de figura).

2) Abrir un circuito por el que circula corriente equivale a disminuir la intensidad de ésta y se origina una corriente de autoinducción que tiende a oponerse a la disminución de intensidad, y la chispa salta entre la palanca y la línea.

Problema 2. En el interior de un solenoide largo que tiene $200/\pi$ vueltas/cm introducimos una bobina que posee un total de 100 espiras y un diámetro de $2/\sqrt{\pi}$ cm, de forma que ambos (solenoide y bobina) queden con un eje común. **1.** Si en el solenoide, con ritmo constante de 0,1 s, hacemos pasar una corriente de 2 A reduciéndola a cero y a continuación la aumentamos a 2 A, pero en sentido contrario, reproduciendo el ciclo cuantas veces se quiera, calcular la FEM inducida en la bobina en el período de tiempo que hemos indicado.



Problema XXXI-2

2. Si la intensidad de la corriente en la bobina varía con el tiempo, según la ecuación escrita en el SI: $I = t^2 + 2t + 3$, y la resistencia de la bobina es de 0,1 Ω, ¿cuál es la intensidad de la corriente inducida en la bobina en el instante en que $t = 4$ s?

Solución

1) El campo magnético en el interior del solenoide cuando por él circulan 2 A es:

$$\left.\begin{aligned} B &= \mu_0 \frac{nI}{l} \\ \frac{n}{l} &= \frac{200}{\pi} 10^2 = \frac{2 \times 10^4}{\pi} \frac{\text{vueltas}}{\text{m}} \end{aligned}\right| \Rightarrow B = \frac{4\pi 2 \times 10^4 \times 2}{10^7 \pi} = 16 \times 10^{-3} \text{ T}$$

el flujo que atraviesa una espira de la bobina será:

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= BA \\ A &= \pi R^2 = 1 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \Phi = 16 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

y la variación de flujo en 0,1 s a través de una espira será desde 16×10^{-7} Wb hasta -16×10^{-7} Wb; en total, 32×10^{-7} Wb; luego:

$$\boxed{\mathcal{E} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -10^2 \frac{32 \times 10^{-7}}{0{,}1} = -32 \times 10^{-4} \text{ V}}$$

2) En este caso el flujo que atraviesa a una espira de la bobina es una función del tiempo:

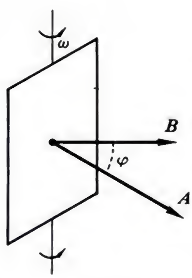
$$\Phi = IA = A(t^2 + 2t + 3)$$

luego:

$$I = -\frac{N}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{NA}{R}(2t + 2)$$

Sustituyendo valores y para $t = 4$ s:

$$\boxed{I = -\frac{10^2\, 10^{-4}}{0{,}1} 10 = -1 \text{ A}}$$



Problema XXXI-3

Problema 3. Hacemos girar una espira cuadrada de 0,5 m de lado con una velocidad angular de 200 rad/s en el interior de un campo magnético uniforme de 0,8 T tal y como se indica en la figura. Calcular la FEM inducida en el cuadro.

Solución

Supongamos que inicialmente la espira se encuentra perpendicular a $\boldsymbol{B}$. Entonces:

$$\varphi = \omega t$$

luego:

$$\Phi = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = BA \cos\omega t$$

aplicando la ley de Faraday se obtiene:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \operatorname{sen}\omega t = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\omega t$$

obteniéndose una FEM variable con el tiempo, obedeciendo a una ley «periódica sinusoidal» que en nuestro caso será:

$$\boxed{\mathcal{E} = 0{,}8 \times 0{,}5^2 \times 200 \operatorname{sen} 200t = 40 \operatorname{sen} 200t}$$

(Esta es la forma del generador de corriente alterna más simplificado posible.)

Problema 4. El circüito rectangular de la figura se mueve perpendicularmente a una línea de corriente rectilínea atravesada por una intensidad de 10 A con una velocidad uniforme de 1 m/s. Los valores de a y b son 5 y 10 cm, respectivamente. Determinar la fuerza electromotriz inducida en el circuito en el instante en que se encuentra a 20 cm de él (x = 20 cm).

Solución

El flujo magnético que atraviesa el cuadro cuando éste se encuentra a una distancia x (problema 22 del capítulo anterior) viene dado por:

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{x + a}{x}$$

luego:

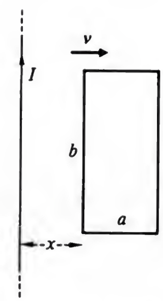
$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} v$$

y como:

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\frac{x}{x + a}\frac{x - x - a}{x^2} = -\frac{\mu_0 I a b}{2\pi x(x + a)}$$

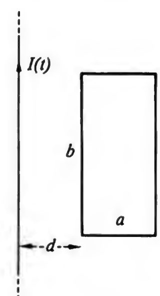
luego:

$$\boxed{\epsilon = \frac{\mu_0 I a b}{2\pi x(x + a)} v = \frac{4\pi 10 \times 5 \times 10}{10^7 \times 2\pi 20 \times 25} = 2 \times 10^{-7}\ \mathrm{V}}$$



Problema XXXI-4

Problema 5. Calcular la FEM inducida en el circuito rectangular de la figura cuando por la línea rectilínea e indefinida circula una corriente alterna (variable con el tiempo) cuya intensidad viene dada en el SI por $I = 10 \operatorname{sen} 100\pi t$; siendo a = 5 cm, b = 10 cm y d = 5 cm.



Problema XXXI-5

Solución

En un instante determinado el flujo magnético que atraviesa el cuadro (problema 22 del capítulo anterior), si llamamos I_0 = 10 A y $\omega = 100\pi\ \mathrm{s}^{-1}$, será:

$$\Phi = \frac{\mu_0 b I_0 \operatorname{sen}\omega t}{2\pi} \ln \frac{d + a}{d}$$

luego:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b I_0}{2\pi}\left[\ln \frac{d + a}{d}\right]\cos\omega t$$

luego la FEM será variable con el tiempo según la expresión escrita en el SI:

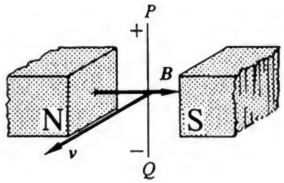
$$\boxed{\epsilon = -\frac{4\pi 10^{-1}\ 10 \ln 2}{10^7\ 2\pi}\cos 100\pi t = -1{,}39 \times 10^{-7}\cos 100\pi t}$$

Problema 6. Justificar la ley de Faraday para un hilo recto y conductor que se mueve perpendicularmente a un campo magnético con una velocidad v.

Solución

La ley de Faraday es empírica y, en general, no es demostrable lógicamente. Ahora bien, en algún caso particular, como es el que plantea el problema, sí es demostrable. En efecto: supon-

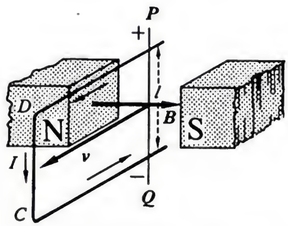
gamos un hilo conductor PQ, que lo desplazamos en un campo magnético perpendicular a las líneas de fuerza, con una velocidad v. Cada uno de los electrones «libres» del conductor estará sometido a una fuerza:



Problema XXXI-6-1.ª

$$F = Bqv$$

siendo q la carga del electrón. La fuerza será de sentido hacia abajo, por ser negativa la carga de la partícula. Habrá un verdadero transporte de electrones que cargará negativamente al extremo Q y positivamente al P, como se puede demostrar partiendo el hilo durante el movimiento y observando cómo su mitad inferior y superior quedan con las cargas citadas. Se ha originado así en circuito abierto una diferencia de potencial que en este caso se identifica con una FEM, funcionando en realidad el extremo P como positivo de un generador y el Q como negativo. Si la experiencia se hubiese realizado estableciendo contacto entre los extremos del hilo, con otro formando con él circuito cerrado, hubiese circulado, en realidad, una corriente en el sentido que determina la polaridad positiva de P y la negativa de Q. La fuerza de Lorenz nos indica que sobre la longitud l del conductor PQ actúa una fuerza:



Problema XXXI-6-2.ª

$$F = BIl$$

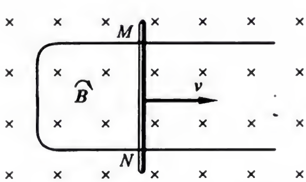
ya que en el caso que estamos estudiando la dirección de la corriente y el campo magnético son perpendiculares entre sí; esta fuerza F actúa hacia el interior del plano de la figura. Al desplazar el conductor PQ, contra esta fuerza realizamos un trabajo, igual y de sentido contrario a la variación de la energía del sistema (si el sistema realiza un trabajo, hay una pérdida de energía potencial, o si realizamos nosotros un trabajo contra el sistema, hay una acumulación de energía de éste). La variación de energía potencial es, por tanto:

$$dU = -BIldl' = -BIdA$$

siendo dl' el camino recorrido y ldl' la variación de superficie del circuito. El valor de la intensidad es $I = dq/dt$ y $BdA = d\Phi$ es la variación del flujo de inducción a través del circuito; por tanto:

$$dU = -d\Phi\,\frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dq} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Puesto que el concepto físico del primer miembro es la variación de energía que corresponde a la unidad de carga por el hecho de haber transportado el conductor AB, el camino dl', a través del campo magnético B. Es, por tanto, la diferencia de potencial, que en circuito abierto hemos identificado con la FEM, quedando así justificada en este caso sencillo la ley de Faraday.



Problema XXXI-7

Problema 7. El sistema del dibujo está «sumergido» en un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del papel y hacia el interior. ¿Qué sentido tiene la corriente inducida al desplazar MN con la velocidad indicada, sin perder contacto con sus guías? Si $B = 5$ T, la longitud $MN = 10$ cm y la velocidad de desplazamiento, $v = 1$ m/s. ¿Qué FEM inducida se produce?

Solución

Al desplazar MN hacia la derecha hay un aumento de flujo entrante; por consiguiente, se debe producir flujo saliente, y el sentido de la corriente es de N a M.

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{BdA}{dt} = -\frac{Bldl}{dt} = -Blv$$

(l = longitud MN.) El valor de la FEM es:

$$\boxed{\epsilon = 5 \times 0{,}1 \times 1 = 0{,}5 \text{ V}}$$

Es de hacer notar que la única dimensión de la espira que interviene es la longitud l de la parte conductora del extremo izquierdo, con lo que podemos considerar que la FEM inducida está localizada en esta parte. Tal tipo de FEM inducida producida al mover un conductor a través de un campo magnético (o al revés) recibe el nombre de «FEM de movimiento».

Problema 8. Suponiendo que en el sistema del problema anterior no hay variaciones de resistencia al desplazar MN y que la resistividad del hilo móvil es $2 \times 10^{-6}\ \Omega \cdot \text{m}$ y su sección 0,1 mm^2, calcular:

1. La intensidad de corriente.
2. La fuerza que actúa sobre MN.
3. El trabajo realizado en el desplazamiento durante 0,2 s.
4. La potencia mecánica para producir la velocidad.

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{\epsilon}{R} \\ R &= \rho \frac{l}{A} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{I = \frac{\epsilon A}{\rho l} = \frac{0{,}5 \times 10^{-7}}{2 \times 10^{-6}\ 0{,}1} = 0{,}25\ \text{A}}$$

2)

$$\boxed{F = BIl = 5 \times 0{,}25 \times 0{,}1 = 0{,}125\ \text{N}}$$

3)

$$\boxed{W = Fs = Fvt = 0{,}125 \times 0{,}2 = 0{,}025\ \text{J}}$$

4)

$$\boxed{P = \frac{W}{t} = \frac{Fvt}{t} = Fv = 0{,}125\ \text{W}}$$

Problema 9. Demostrar sin aplicar la ley de Faraday, que la FEM inducida (FEM de movimiento) en un conductor de longitud $\boldsymbol{l}$ que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ en el interior de un campo magnético $\boldsymbol{B}$ viene dada por $\epsilon = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$.

Solución

La fuerza que se ejerce sobre el conductor por estar «sumergido» en el campo magnético $\boldsymbol{B}$ es:

$$\boldsymbol{F} = I(\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

y el trabajo realizado al desplazarse el conductor móvil un espacio $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$ será:

$$dW = (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}Idt$$

de la definición de intensidad tenemos:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \quad dq = Idt$$

siendo dq la carga de los portadores existentes en el interior del conductor y sobre los cuales actúa la fuerza de Lorentz. Nos quedará, por tanto:

$$dW = dq\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})$$

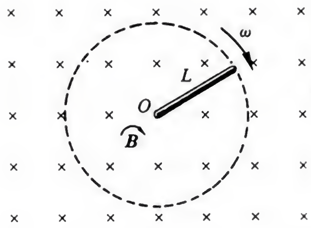
obteniéndose por aplicación del concepto físico de FEM:

$$\boxed{\epsilon = \frac{dW}{dq} = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B})}$$

para el caso en que los tres vectores sean perpendiculares se obtiene:

$$\epsilon = vlB$$

Problema 10. Hacemos girar una varilla conductora de 1 m de longitud con velocidad angular constante de 6 rad/s alrededor de su extremo en el interior de un campo magnético uniforme de 5 T, perpendicular al plano en que se encuentra la varilla y en el sentido indicado en la figura. Determinar la «FEM de movimiento» inducida entre los dos extremos de la varilla.



Problema XXXI-10

Solución

Consideremos un elemento dl de varilla, se moverá con una velocidad v perpendicularmente al campo B y en dicho elemento se producirá una «FEM de movimiento» (ver problema XXXI-9) de valor:

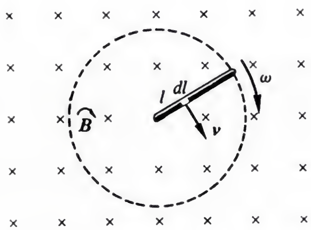
$$d\in = - Bvdl$$

el valor de v a la distancia l de O será:

$$v = \omega l$$

con lo que:

$$d\in = - B\omega ldl$$

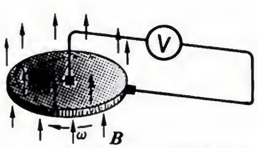


Problema XXXI-10-1.

calcularemos la FEM total inducida en la varilla considerando la suma (integral) de todas las contribuciones de cada elemento dl, puesto que se encuentran en «serie»; con lo que:

$$\boxed{\in = \int_0^L d\in = - B\omega \int_0^L ldl = - \frac{1}{2} B\omega L^2 = - \frac{1}{2} 5 \times 6 \times 1^2 = - 15 \text{ V}}$$

Problema 11. Un disco circular, conductor, de radio 1 m gira con velocidad angular constante de 20 rad/s en su campo magnético de 2 T como se indica en la figura. ¿Qué voltaje marca el voltímetro?



Problema XXXI-11

Solución

Todos los puntos situados en circunferencias concéntricas se encuentran al mismo potencial. Tomando un elemento en la dirección del radio dr y a una distancia r del centro, tendremos:

$$d\in = - Bvdr = - B\omega rdr$$

integrando desde el centro a la periferia, nos queda:

$$\in = \int_0^R d\in = - B\omega \int_0^R rdr = - \frac{1}{2} B\omega R^2$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$\boxed{\in = - \frac{1}{2} 2 \times 20 \times 1^2 = - 20 \text{ V}}$$

marcará 20 V el signo menor corresponde a la ley de Lenz.

B) AUTOINDUCCION. INDUCCION MUTUA. ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

FORMULARIO

AUTOINDUCCIÓN EN CIRCUITOS INDEFORMABLES:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{d\Phi}{dI}$$

Si el medio es lineal, homogéneo e isótopo o estamos en el vacío:

$$\Phi = LI \quad \Rightarrow \quad L = \frac{\Phi}{I}$$

para n espiras: $$L = n\frac{\Phi}{I}$$

EXTRACORRIENTE DE CIERRE Y APERTURA. CONSTANTE DE TIEMPO (CIRCUITO LR):

Cierre: $$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad K = \frac{L}{R}$$

Apertura: $$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

INDUCCIÓN ENTRE CORRIENTES. COEFICIENTE DE INDUCCIÓN MUTUA:

$$\epsilon_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -\frac{d\Phi_{12}}{dI_2}\frac{dI_2}{dt} = -M_{12}\frac{dI_2}{dt} \qquad M_{12} = M_{21}$$

Si el medio es lineal, homogéneo e isótopo o estamos en el vacío:

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

para n espiras: $$M_{12} = n\frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

ENERGÍA ASOCIADA A UNA AUTOINDUCCIÓN:

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

ENERGÍA DEL CAMPO MAGNÉTICO:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv \quad \Leftrightarrow \quad dU = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\,dv$$

ENERGÍA POR UNIDAD DE VOLUMEN EN UN CAMPO MAGNÉTICO:

$$u = \frac{dV}{dv} = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$$

Problema 12. Por una bobina que tiene 500 espiras muy próximas entre sí y de 10^{-2} H de autoinducción circula una corriente de 10^{-2} A. Determínese el flujo magnético a través del arrollamiento.

Solución

$$L = n\frac{\Phi}{I} \quad \Rightarrow \boxed{\Phi = \frac{LI}{n} = \frac{10^{-2} \times 10^{-2}}{500} = 2 \times 10^{-3} \text{ Wb}}$$

Problema 13. Un solenoide largo tiene una longitud l y una sección A. Si es n el número de espiras y μ la permeabilidad magnética del medio interno, calcular el valor de la autoinducción del solenoide.

Solución

El campo magnético en su interior será:

$$B = \frac{\mu I n}{l}$$

y, por tanto:

$$\Phi = BA = \frac{\mu I n A}{l}$$

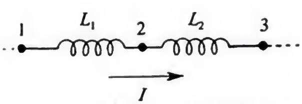
y el que atraviesa las n espiras del solenoide:

$$\Phi = \frac{\mu I n^2 A}{l}$$

luego:

$$\Phi = LI \quad \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu n^2 A}{l}}$$

dependiendo la autoinducción solamente de los parámetros geométricos.



Problema XXXI-14

Problema 14. Demostrar que la autoinducción equivalente a la de dos bobinas acopladas en serie como indicamos en la figura, cuando su separación es lo suficientemente grande para poder despreciar las influencias de los flujos mutuos, es igual a la suma de las autoinducciones de las dos así acopladas.

Solución

La aplicación de la ley de Faraday-Lenz a las dos bobinas nos da:

$$\epsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1\frac{dI}{dt} \qquad \epsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2\frac{dI}{dt}$$

por lo que la FEM total inducida entre los extremos 1 y 3 de los dos inductores será:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = -(L_1 + L_2)\frac{dt}{dt}$$

por tanto, ambos inductores equivalen a una única bobina que tuviera una autoinducción:

$$\boxed{L = L_1 + L_2} \qquad \text{c.q.d.}$$

Problema 15. Un anillo de Rowland de 8 cm de radio medio y 10 cm^2 de sección tiene arrolladas 800 vueltas de un hilo conductor recubierto de un material aislante. El núcleo tiene una permeabilidad relativa de 1 500. Calcular:
1. La autoinducción del arrollamiento.
2. Si la corriente que circula por el conductor aumenta a razón de 10 A/s, ¿qué valor toma la FEM inducida?

Solución

1)

$$B = \mu \frac{nI}{l} = \mu_0\mu' \frac{nI}{2\pi r}$$

el flujo a través de una espira es:

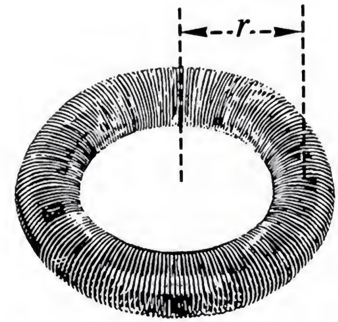
$$\Phi = BA = \mu_0\mu' \frac{nI}{2\pi r} A$$

luego:

$$\boxed{L = n\frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu' n^2 A}{2\pi r} = \frac{4\pi 1\,500 \times 800^2 \times 10^{-3}}{10^7\, 2\pi 8 \times 10^{-2}} = 2{,}4\ \text{H}}$$

2)

$$\boxed{\epsilon = -L\frac{dI}{dt} = -2{,}4 \times 10 = -24\ \text{V}}$$



Problema XXXI-15

Problema 16. Se arrollan a un anillo de Rowland de hierro 4 000 espiras de un hilo conductor recubierto de una materia aislante y hacemos pasar por él una corriente de 2 A. El radio medio del anillo es 20 cm y su sección 5 cm^2. Cortamos el anillo formando un entrehierro de 2 mm de anchura. Determinar la autoinducción de éste antes y después del corte. Permeabilidad relativa del hierro: 1 000.

Solución

La ley de Ohm aplicada a circuitos magnéticos es:

$$\Phi = \frac{M}{R}$$

1) Antes del corte:

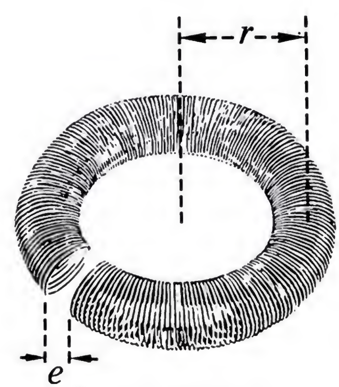
$$M = nI \qquad R = \frac{l}{\mu A} = \frac{2\pi r}{\mu_0\mu' A}$$

con lo que:

$$\Phi = \frac{\mu_0\mu' nIA}{2\pi r}$$

luego:

$$\boxed{L = n\frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu' n^2 A}{2\pi r} = \frac{4\pi 10^3\, 4\,000^2\, 5 \times 10^{-4}}{10^7\, 2\pi 20 \times 10^{-2}} = 8\ \text{H}}$$



Problema XXXI-16

2) Después del corte:

$$M = nI \qquad R = \frac{2\pi r}{\mu_0\mu' A} + \frac{e}{\mu_0 A} = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{2\pi r + \mu' e}{\mu' A}$$

con lo que:

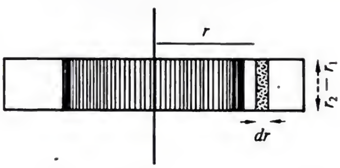
$$\Phi = \frac{\mu_0\mu' A n I}{2\pi r + \mu' e}$$

luego:

$$\boxed{L = n\frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0\mu' n^2 A}{2\pi r + \mu' e} = \frac{4\pi 10^3\ 4\,000^2\ 5\times 10^{-4}}{10^7(2\pi 20\times 10^{-2} + 10^3\times 2\times 10^{-3})} = 3\ \mathrm{H}}$$

Problema 17. Un anillo de hierro de sección cuadrada y de diámetro interior y exterior 10 y 15 cm lleva un arrollamiento de 500 vueltas. Determinar el coeficiente de autoinducción de este toroide. (Para el Fe: $\mu' = 1\,200$.)

Solución



Problema XXXI-17

Por aplicación de la ley de Ampere a una curva circular C de radio r se obtiene:

$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = nI$$

y como $\boldsymbol{H}$ y $d\boldsymbol{l}$ tienen la misma dirección y H es la misma en toda la curva C, se obtiene:

$$\int_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_C H dl = H\int_C dl = H2\pi r$$

que, junto con que $B = \mu H = \mu_0\mu' H$, nos queda:

$$B = \frac{\mu_0\mu'}{2\pi}\,\frac{nI}{r}$$

no siendo constante B en toda la sección transversal. El flujo que atravesará a una espira será:

$$\Phi = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} = \int_{r_1}^{r_2} B dA$$

siendo $dA = (r_2 - r_1)dr$, luego:

$$\Phi = \frac{\mu_0\mu' nI(r_2 - r_1)}{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu' nI(r_2 - r_1)}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

para las n espiras se tiene que:

$$L = n\frac{\Phi}{I}$$

obteniéndose:

$$L = \frac{\mu_0\mu' n^2(r_2 - r_1)}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

Sustituyendo valores:

$$\boxed{L = \frac{4\pi 1\,200\times 500^2\times 2{,}5\times 10^{-2}}{10^7\ 2\pi}\ln\frac{3}{2} \simeq 0{,}6\ \mathrm{H}}$$

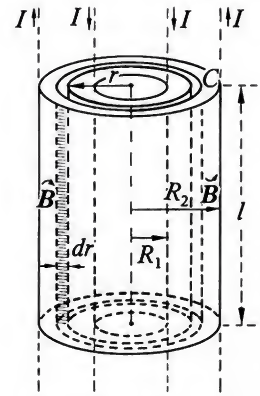
Problema 18. Se tienen dos tubos concéntricos muy largos en los que el espesor de sus paredes es despreciable, de radios R_1 y R_2 y uno de los cuales sirve de ida y el otro para la vuelta de la corriente. Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud del sistema así formado es:

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Solución

Por simetría, el campo magnético tiene que ser tal que sus líneas de fuerza sean circulares. La dirección del campo será tangente a éstas. Aplicando la ley de Amper, eligiendo como línea de integración una circunferencia C que coincida con una línea de fuerza de radio r (de esta forma $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ son paralelos en todo punto de la línea), se verificará:

$$\int_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \int_C Bdl = B \int_C dl = B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Problema XXXI-18

el flujo que atraviesa a la superficie $dA = ldr$ será debido únicamente a la intensidad que circula por el tubo interno y, por tanto:

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dA} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

luego:

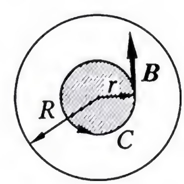
$$\boxed{\frac{L}{l} = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{c.q.d.}$$

Problema 19. Demostrar que la autoinducción en el interior de una fracción h de conductor cilíndrico muy largo es $\mu_0 h/8\pi$; suponiendo que la intensidad de corriente I_0 que lo recorre es uniforme en todo punto de la sección transversal.

Solución

Por simetría, el campo magnético tiene que ser tal que sus líneas de fuerza sean circulares, la dirección del campo ha de ser tangente a éstas y sentido el de giro de un sacacorchos que avance con la corriente (en nuestra figura, hacia afuera del papel). Aplicando la ley de Ampere, eligiendo como línea de integración una circunferencia C que coincida con una línea de fuerza de radio r. De esta forma el campo $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{dl}$ son paralelos en todo punto de la línea; por tanto, se verifica que:

$$\oint_C \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \oint_C Bdl = B \oint_C dl = B2\pi r$$



Problema XXXI-19-1.

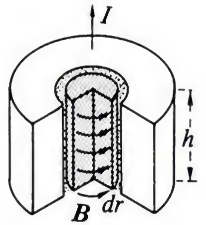
hemos sacado fuera de la integral el módulo del campo magnético, pues es constante en todo punto de la línea C.

La intensidad que atraviesa el área de C no será la misma que circula por el conductor «entero». Como la corriente circula uniformemente a través del conductor, podemos decir que la intensidad por unidad de área es constante, o lo que es lo mismo, que la densidad de corriente $\boldsymbol{J}$ es uniforme en todo el conductor (corrientes estacionarias). El valor de la densidad de corriente será:

$$J = \frac{I_0}{\pi R^2}$$

luego la intensidad que circula por la sección de área C será:

$$J = \frac{I}{\pi r^2}$$



Problema XXXI-19-2.ª

es decir:

$$\frac{I}{\pi r^2} = \frac{I_0}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{r^2}{R^2} I_0$$

por lo que la aplicación de la ley de Ampere nos dará:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \quad \Leftrightarrow \quad B 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I_0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}$$

El flujo que atraviesa a la superficie $dA = hdr$ será debido únicamente a la intensidad de corriente que circula por el interior de la curva C, y, por tanto:

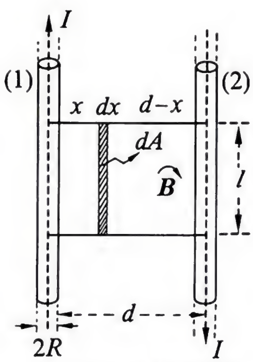
$$\Phi = \int_0^R \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^R \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} hdr = \int_0^R \frac{\mu_0 I_0 h}{2\pi R^4} r^3 dr = \frac{\mu_0 I_0 h}{8\pi}$$

con lo que:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I_0} = \frac{\mu_0 h}{8\pi}} \quad \text{c.q.d.}$$

Problema 20. Demostrar que la autoinducción por unidad de longitud existente entre dos conductores cilíndricos de radio R, paralelos e indefinidos cuando se encuentran a una distancia $d \gg R$ (de esta forma puede despreciarse la autoinducción en el interior de los hilos) por los que pasa una intensidad I que circula en sentido contrario, viene dada por:

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d - R}{R}$$



Problema XXXI-20

Solución

El conductor (1) crea un campo a la distancia x de valor:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

El conductor (2) crea un campo en el mismo punto de valor:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d - x)}$$

el campo total resultante en dicho punto será, por tanto:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right]$$

el flujo a través de la superficie $dA = ldx$ será:

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = BdA = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{d - x} \right] ldx$$

y el flujo a través de la superficie $A = l(d - 2R)$ vendrá dado por:

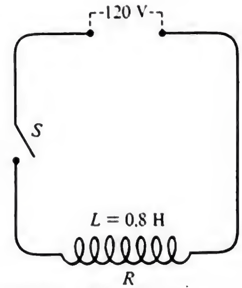
$$\Phi = \int_R^{d-R} d\Phi = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \int_R^{d-R} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right) dx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \left(\ln \frac{x}{d-x} \right)_R^{d-R} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{d-R}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0 Il}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}$$

para $l = 1$ y siendo $\Phi = LI$, nos queda:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-R}{R}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Problema 21. A una fuente de corriente continua de 120 V conectamos un solenoide de 0,8 H de autoinducción. Calcular la velocidad de elevación de la corriente en el solenoide en los siguientes casos:
1. En el instante en que se conecta a la fuente.
2. En el instante en que la corriente alcanza el 80 % de su valor estacionario.



Problema XXXI-21

Solución

La aplicación de la ley de Ohm al circuito así formado nos conduce a:

$$\epsilon - L \frac{dI}{dt} = IR$$

siendo $\epsilon = I_0 R$. (I_0 es la intensidad cuando se alcanza el régimen estacionario.)

1) Para $t = 0 \Rightarrow I = 0$, luego:

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = \frac{\epsilon}{L} = \frac{120}{0{,}8} = 150 \text{ A/s}}$$

2) Para $t \to \infty \Rightarrow I = I_0$ y $\frac{dI}{dt} = 0$, luego:

$$\epsilon = I_0 R \Rightarrow I_0 = \frac{\epsilon}{R}$$

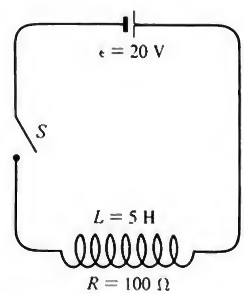
en nuestro caso:

$$I = 0{,}8 I_0 = 0{,}8 \frac{\epsilon}{R}$$

con lo que:

$$\epsilon - L \frac{dI}{dt} = 0{,}8 \frac{\epsilon}{R} R = 0{,}8\epsilon \Rightarrow \boxed{\frac{dI}{dt} = 0{,}2 \frac{\epsilon}{L} = \frac{0{,}2 \times 120}{0{,}8} = 30 \text{ A/s}}$$

Problema 22. En el circuito de la figura la autoinducción de la bobina es de 5 H y su resistencia 100 Ω. Despreciamos la resistencia interior de la pila.
1. Calcular la intensidad máxima estando cerrado el interruptor.
2. ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito?
3. ¿En qué instante se hace la intensidad 0,632 veces la máxima?
4. ¿En qué tiempo se hace la mitad de la máxima?



Problema XXXI-22

Solución

1)

$$\boxed{I_0 = \frac{\epsilon}{R} = \frac{20}{100} = 0{,}2 \text{ A}}$$

2)

$$\boxed{K = \frac{L}{R} = \frac{5}{100} = 0{,}05 \text{ H}/\Omega}$$

3)

$$\boxed{t = 0{,}05 \text{ s}}$$

4)

$$\frac{I_0}{2} = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow$$

$$-\frac{R}{L}t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \Rightarrow \boxed{t = K\ln 2 = 0{,}05\ln 2 = 35 \times 10^{-3} \text{ s}}$$

Problema 23. En un circuito *LR* la intensidad de la corriente se hace la tercera parte de su valor estacionario en 0,3 s. Calcular:
1. La constante de tiempo del circuito.
2. Valor de la autoinducción si la resistencia del circuito es de 50 Ω.

Solución

1)

$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{K}}\right) \Rightarrow \frac{1}{3}I_0 = I_0\left(1 - e^{-\frac{0{,}3}{K}}\right) \Rightarrow e^{-\frac{0{,}3}{K}} = \frac{2}{3}$$

tomando logaritmos neperianos, queda:

$$-\frac{0{,}3}{K} = \ln\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{K = -\frac{0{,}3}{\ln\frac{2}{3}} = 0{,}74 \text{ H}/\Omega}$$

2)

$$K = \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{L = KR = 37 \text{ H}}$$

Problema 24. Por un solenoide de 500 Ω de resistencia circula una corriente de 3 A. Repentinamente se corta la corriente y ésta disminuye hasta 10^{-2} A en 0,5 s. Determinar la autoinducción del solenoide.

Solución

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow 10^{-2} = 3e^{-\frac{500}{L}0{,}5} = 3e^{-\frac{250}{L}}$$

tomando logaritmos neperianos, se obtiene:

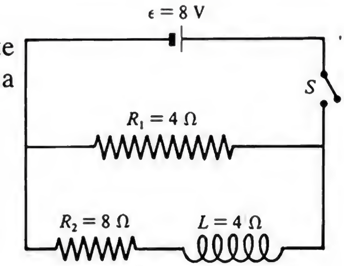
$$-2\ln 10 = \ln 3 - \frac{250}{L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{250}{\ln 3 + 2\ln 10} = 43{,}8 \text{ H}}$$

Problema 25. En el circuito de la figura determínese:

1. La intensidad de la corriente a través de la resistencia R_1 inmediatamente después de cerrar el interruptor y transcurrido el suficiente tiempo para que ésta se haga estacionaria.

2. Id., íd., a través de R_2.

3. Id., íd., a través del interruptor.



Problema XXXI-25

Solución

1)

$$\epsilon = I_1 R_1 \quad \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{\epsilon}{R_1} = \frac{8}{4} = 2\text{ A}}$$

en ambos casos.

2)

$$I_2 = I_{02}\left(1 - e^{-\frac{R_2}{L}t}\right) \left| \begin{array}{l} t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{I_2 = 0} \\ t \to \infty \quad \Rightarrow \boxed{I_2 = I_{02} = \frac{\epsilon}{R_2} = 1\text{ A}} \end{array} \right.$$

3)

$$t = 0 \quad \Rightarrow \boxed{I = 2\text{ A}}$$

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \boxed{I = 3\text{ A}}$$

Problema 26. En una bobina se induce una FEM de 5×10^{-3} V cuando en otra cercana a ella varía la corriente con una rapidez de 4 A/s. Determínese el coeficiente de inducción mutua del sistema.

Solución

Teniendo en cuenta:

$$\epsilon = M \left|\frac{dI}{dt}\right| \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\epsilon}{\left|\frac{dI}{dt}\right|}$$

sustituyendo valores:

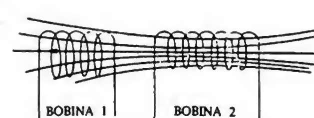
$$\boxed{M = \frac{5 \times 10^{-3}}{4} = 125 \times 10^{-5}\text{ H}}$$

Problema 27. La figura nos muestra dos bobinas que poseen 5 000 y 3 000 espiras, respectivamente. Cuando por la primera circula una intensidad de corriente de 1 A se produce en ella un flujo de 2×10^{-3} Wb y en la segunda 10^{-3} Wb. Calcular:

1. El coeficiente de autoinducción de la primera.

2. El coeficiente de inducción mutua entre ambas.

3. La FEM inducida en la 2.ª, si la corriente en la 1.ª se hace nula en 10^{-1} s.



Problema XXXI-27

Solución

1)

$$\boxed{L_1 = n_1 \frac{\Phi_1}{I_1} = 5\,000 \frac{2 \times 10^{-3}}{1} = 10 \text{ H}}$$

2)

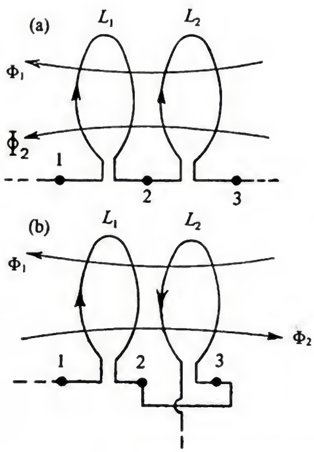
$$\boxed{M = n_2 \frac{\Phi_2}{I_1} = 3\,000 \frac{10^{-3}}{1} = 3 \text{ H}}$$

3)

$$\boxed{\epsilon_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t} = -3 \frac{1-0}{10^{-1}} = -30 \text{ V}}$$

o también:

$$\epsilon_2 = -n_2 \frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} = -3\,000 \frac{10^{-3}-0}{10^{-1}} = -30 \text{ V}$$



Problema XXXI-28-1.ª

Problema 28. Supongamos dos bobinas acopladas en serie como se indica en las figuras, en las que ambas están afectadas por sus autoflujos (flujo debido a la intensidad en una de ellas) y por los flujos mutuos (flujo que una de ellas es atravesada por efecto de la intensidad de la otra). Demostrar:

1. Que si los autoflujos y los flujos mutuos son del mismo sentido [caso (a) de la figura], la autoinducción equivalente es: $L = L_1 + L_2 + 2M$

2. Que si los autoflujos y los flujos mutuos son de sentido contrario [caso (b) de la figura], entonces: $L = L_1 + L_2 - 2M$

Solución

1) Teniendo en cuenta que:

$$\epsilon = -L \frac{dI}{dt} \qquad \epsilon_{12} = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}$$

que ambas están atravesadas por la misma corriente y que $M = M_{12} = M_{21}$; la FEM total entre los extremos 1 y 3 será:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_{12} + \epsilon_{21} = -(L_1 + L_2 + 2M) \frac{dI}{dt}$$

luego el sistema se puede sustituir por un inductor de autoinducción:

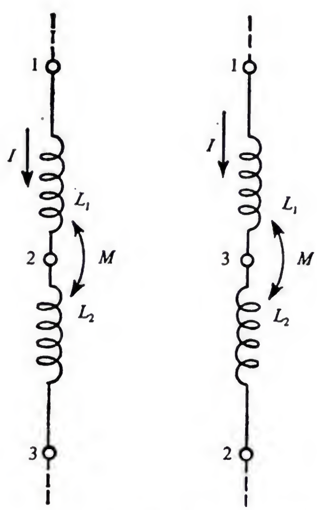
$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M}$$

2) En este caso la FEM total será:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_{12} - \epsilon_{21} = -(L_1 + L_2 - 2M) \frac{dI}{dt}$$

en este caso equivale a una autoinducción de valor:

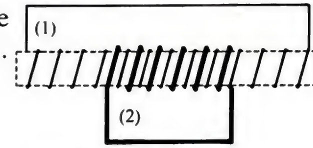
$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2M}$$



Problema XXXI-28-2.ª

Se obtienen los mismos efectos manteniendo las conexiones pero girando las bobinas 180° (fig. 2).

Problema 29. Un solenoide de 1 m de longitud y 8 cm^2 de sección consta de 5 000 espiras. En su centro enrollamos 200 espiras como se indica en la figura. Calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambas bobinas.



Problema XXXI-29

Solución

Suponiendo que a través del solenoide (1) circula una corriente I_1, entonces se creará un campo magnético en su interior de valor:

$$B_1 = \mu_0 \frac{n_1}{l} I_1$$

y el flujo a través de una espira del solenoide (2) será:

$$\Phi_{21} = B_1 A = \mu_0 \frac{n_1}{l} I_1 A$$

con lo que:

$$\boxed{M = n_2 \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 n_1 n_2 A}{l} = \frac{4\pi 5\,000 \times 200 \times 8 \times 10^{-4}}{10^7 \times 1} \simeq 10^{-3} \text{ H}}$$

Problema 30. Sobre una barra cilíndrica de hierro muy larga de 1 cm de radio realizamos dos arrollamientos superpuestos que tienen 50 y 30 espiras por cada cm de longitud. Determínese el coeficiente de inducción mutua por unidad de longitud del sistema así formado. (Para el hierro: $\mu' = 800$.)

Solución

Llamaremos:

$$N_1 = \frac{n_1}{l} = 5 \times 10^3 \frac{\text{vueltas}}{\text{m}} \qquad N_2 = \frac{n_2}{l} = 3 \times 10^3 \frac{\text{vueltas}}{\text{m}}$$

Si I_1 es la intensidad de corriente que circula por el primer arrollamiento, el valor del campo magnético debido a esta corriente y en el interior del solenoide así formado será:

$$B_1 = \mu_0 \mu' \frac{n_1}{l} I_1$$

y el flujo a través de una espira del segundo rebobinado debido a éste será:

$$\Phi_{21} = B_1 A = \mu_0 \mu' \frac{n_1}{l} I_1 \pi r^2$$

llamando $M = M_{12} = M_{21}$ al coeficiente de inducción mutua, obtenemos:

$$M = n_2 \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 \mu' \pi r^2 \frac{n_1 n_2}{l}$$

con lo que:

$$\boxed{\frac{M}{l} = \mu_0 \mu' \pi r^2 N_1 N_2 = \frac{4\pi}{10^7} 800 \pi 10^{-4}\, 5 \times 10^3\, 3 \times 10^3 \simeq 4{,}74 \text{ H/m}}$$

Problema 31. Calcular el coeficiente de inducción mutua de dos arrollamientos toroidales superpuestos si tienen longitud media l y sección A, con n_1 y n_2 vueltas, respectivamente.

Solución

El campo magnético producido por la intensidad I_1 que circula por el primer arrollamiento toma el valor:

$$B = \mu_0 \frac{n_1 I_1}{l}$$

el flujo que atraviesa a este mismo arrollamiento es:

$$\Phi = n_1 BA = \mu_0 \frac{I_1 n_1^2 A}{l} = LI_1 \quad \Rightarrow \quad L = \mu_0 \frac{n_1^2 A}{l}$$

El flujo que atraviesa a las n_2 espiras debido al campo anterior será:

$$\Phi_{21} = n_2 BA = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l} I_1 = M_{21} I_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_{21} = \mu_0 \frac{n_1 n_2 A}{l}}$$

si invirtiéramos este procedimiento, se comprueba que $M_{21} = M_{12}$.

Problema 32. Un anillo de hierro de sección cuadrada y de diámetro interior y exterior 10 y 15 cm lleva dos arrollamientos aislados eléctricamente y tienen 500 y 300 vueltas, respectivamente. Determínese el coeficiente de inducción mutua entre ambos embobinados. (Para el hierro: $\mu' = 1\,200$.)

Solución

Debido a la intensidad de corriente I_1 que circula por la primera bobina, el flujo que atraviesa una espira de la segunda bobina será (ver problema 17 de este capítulo):

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 \mu' n_1 I_1 (r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

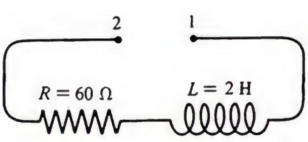
llamando $M = M_{12} = M_{21}$ al coeficiente de inducción mutua, obtenemos:

$$M = n_2 \frac{\Phi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 \mu' n_1 n_2 (r_2 - r_1)}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{M = \frac{4\pi 1\,200 \times 500 \times 300 \times 2{,}5 \times 10^{-2}}{10^7\, 2\pi} \ln \frac{3}{2} \simeq 0{,}36 \text{ H}}$$

Problema 33. En el circuito de la figura $V_1 - V_2 = 120$ V. Calcular la energía almacenada en el campo magnético cuando se ha alcanzado el valor máximo de la corriente.



Problema XXXI-33

Solución

El valor de la máxima intensidad alcanzada en el circuito es:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{120}{60} = 2 \text{ A}$$

La energía asociada a la autoinducción es:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} 2 \times 4 = 4 \text{ J}}$$

Problema 34. Un solenoide largo que tiene 10 espiras por cm está recorrido por una corriente de 10 A. Calcular la densidad cúbica de energía en su interior. ¿Qué le ocurriría a tal densidad cúbica si el solenoide estuviese arrollado a un núcleo de hierro de permeabilidad relativa al vacío 2 000?

Solución

1)

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{2} HB \\ B_0 &= \mu_0 H \\ B_0 &= \frac{\mu_0 In}{l} \\ N &= \frac{n}{l} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{u_0 = \frac{\mu_0 I^2 N^2}{2} = \frac{4\pi 10^2\ 10^6}{10^7\ 2} = 20\pi \text{ J/m}^3}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} = \frac{1}{2} HB \\ B &= \mu H = \mu_0 \mu' H \\ B &= \frac{\mu_0 \mu' In}{l} \\ N &= \frac{n}{1} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{u = \mu' u_0 = 2\,000 \times 20\pi = 4 \times 10^4 \pi \text{ J/m}^3}$$

queda multiplicada por 2 000.

Problema 35. Determinar la energía almacenada en el campo magnético del anillo de hierro del problema 17, en el supuesto que por el hilo del arrollamiento circule una intensidad de 5 A.

Solución

En dicho problema se obtenía para valor de B en un punto a una distancia r del eje del anillo:

$$B = \frac{\mu nI}{2\pi r}$$

con lo que:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{nI}{2\pi r}$$

ambos vectores tienen la misma dirección, luego:

$$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} = BH = \frac{\mu n^2 I^2}{4\pi^2 r^2}$$

La integral de energía extendida al volumen $dv = 2\pi r(r_2 - r_1)dr$ nos quedará:

$$U = \frac{1}{2}\int_V B \cdot H dv = \frac{\mu n^2 I^2 2\pi(r_2 - r_1)}{8\pi^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0\mu' n^2 I^2 (r_2 - r_1)}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{U = \frac{4\pi 1\,200 \times 500^2 \times 5^2 \times 2{,}5 \times 10^{-2}}{10^7\, 4\pi}\ln\frac{3}{2} = 7{,}6\ \text{J}}$$

Problema 36. En el problema 19 demostrábamos, aplicando la definición de autoinducción, que la autoinducción de una fracción h de conductor cilíndrico largo es $\mu_0 h/8\pi$ cuando la intensidad I_0 que lo recorre es uniforme en todo punto de la sección transversal. Demuéstrese lo mismo a partir de la integral de energía.

Solución

En el problema mencionado en el enunciado obteníamos para valor del campo magnético a una distancia $r < a$ del eje del hilo es:

$$B = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}$$

con lo que:

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{I_0 r}{2\pi R^2}$$

ambos vectores tienen la misma dirección, luego:

$$B \cdot H = BH = \frac{\mu_0 I_0^2 r^2}{4\pi^2 R^4}$$

La integral de energía extendida al volumen $dv = 2\pi rhdr$ nos quedará:

$$U = \frac{1}{2}\int_V B \cdot H dv = \frac{\mu_0 I_0^2 2\pi h}{8\pi^2 R^4}\int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I_0^2 h}{16\pi}$$

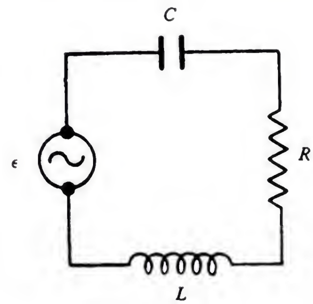
y como la energía asociada a una autoinducción es:

$$U = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{2U}{I_0^2} = \frac{\mu_0 h}{8\pi}} \qquad \text{c.q.d.}$$

C) CORRIENTES ALTERNAS

FORMULARIO

CARACTERÍSTICAS DE UN CIRCUITO BÁSICO DE CORRIENTE ALTERNA:



Circuito de corriente alterna

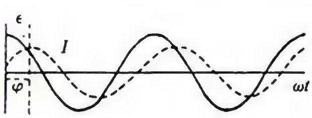
Consideremos un circuito en el que existe una FEM alterna:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos\omega t$$

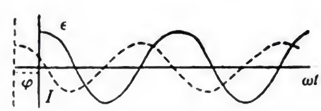
tal circuito posee una resistencia total R, una autoinducción L y hay intercalada una capacidad C. La intensidad de corriente que circula es:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

variando la intensidad I de los valores $+I_0$ hasta $-I_0$; siendo I_0 el valor absoluto de la intensidad máxima y φ el ángulo de desenfase de la intensidad con respecto a la FEM. Un ángulo φ positivo indica un retraso de la intensidad con respecto a la FEM, un ángulo φ negativo indica un adelanto de I con respecto a ϵ.



I retrasada en fase con respecto a la FEM



I adelantada en fase con respecto a la FEM

La autoinducción del circuito provoca retrasos de I con respecto a ϵ. La capacidad adelantos de I con respecto a ϵ. El valor de φ viene dado por la expresión:

$$\mathrm{tag}\varphi = \frac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$$

Al numerador de esta fracción ($L\omega - 1/C\omega$) se le llama REACTANCIA (X), que consta de dos términos: $L\omega$ = INDUCTANCIA y $1/C\omega$ = CAPACITANCIA.

La intensidad máxima de la corriente alterna viene dada por:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{\epsilon_0}{Z_0}$$

Al denominador de la fracción:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

se le llama IMPEDANCIA DEL CIRCUITO. La última fórmula es la expresión de la LEY DE OHM:

«La intensidad máxima de una corriente alterna es igual a la FEM máxima, dividida por la impedancia.»

Tanto la impedancia como la reactancia, la inductancia y la capacitancia se miden en ohmios, de la misma manera que la resistencia; supuesta la impedancia del circuito localizada en el exterior del generador, su FEM y la diferencia de potencial entre sus bornes se identifican y podremos escribir:

$$V = V_0 \cos\omega t$$

INTENSIDAD Y FEM EFICACES:

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad \epsilon_e = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} \qquad V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

LEY DE OHM APLICADA A LAS MAGNITUDES EFICACES:

$$I_e = \frac{\epsilon_e}{Z} \qquad I_e = \frac{V_e}{Z}$$

POTENCIA:

$$P = I_e V_e \cos\varphi$$

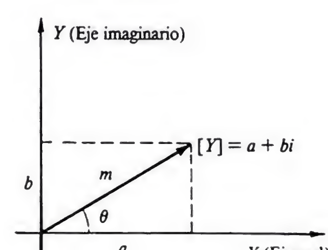
IDEAS SOBRE EL ÁLGEBRA DE NÚMEROS COMPLEJOS:

El estudio de las corrientes alternas empleando la notación de números complejos nos facilita extraordinariamente la resolución de los problemas; para utilizarlo comencemos por recordar algunas ideas fundamentales del álgebra de números complejos. Un número complejo [Y] se puede representar de tres formas diferentes:

Forma binómica:

$$[Y] = a + bi$$

a: parte real.
b: parte imaginaria.
i: unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$).



Forma trigonométrica:

$$[Y] = m(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = a + bi$$

m: módulo. θ: argumento.

Teniendo en cuenta la figura, obtenemos las siguientes relaciones:

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad a = m\cos\theta$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{b}{a} \qquad b = m\operatorname{sen}\theta$$

Forma exponencial:

$$[Y] = me^{i\theta} = m(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = a + bi$$

expresión que se demuestra desarrollando en serie e^{θ}, $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Consecuencias inmediatas de esta forma y de la trigonométrica es:

$$i = e^{i\pi/2} \qquad e^{-i\theta} = -\, e^{i\theta}$$

La ventaja que vamos a tener en la utilización de la forma exponencial es que las operaciones se simplifican extraordinariamente, ya que en vez de operar con expresiones trigonométricas, lo haremos con exponenciales, que es siempre mucho más fácil.

MAGNITUDES COMPLEJAS:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos\omega t \quad \Leftrightarrow \quad [\epsilon] = \epsilon_0 e^{i\omega t}$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad \Leftrightarrow \quad [I] = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$\left.\begin{array}{l} X = L\omega - \dfrac{1}{C\omega} \\ Z_0 = \sqrt{R^2 + x^2} \\ \operatorname{tag}\varphi = \dfrac{X}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \quad [Z] = Z_0 e^{i\varphi}$$

tendremos en cuenta siempre que en las expresiones complejas sólo tendrá sentido físico la parte real de la ecuación.
Se suelen expresar la intensidad y la FEM, en vez de en función de los valores máximos (I_0, ϵ_0), en función de las magnitudes eficaces, como se verá en el desarrollo de los problemas.

LEY DE OHM A LAS EXPRESIONES COMPLEJAS:

$$[Z] = \frac{[\epsilon]}{[I]}$$

INTENSIDAD ACTIVA Y REACTIVA:

$$I_A = I_0 \cos\varphi \cos\omega t$$

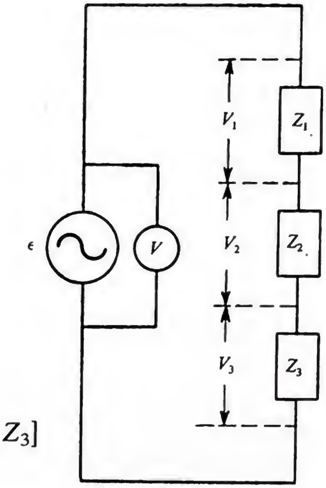
$$I_R = I_0 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega t$$

POTENCIA TEÓRICAL ACTIVA Y REACTIVA:

$$P_T = V_e I_e$$

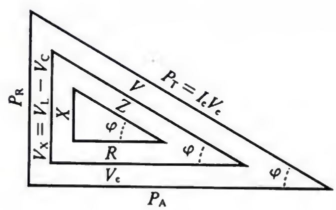
$$P_A = V_e I_e \cos\varphi$$

$$P_R = V_e I_e \operatorname{sen}\varphi$$



IMPEDANCIAS EN SERIE:

$$\left.\begin{array}{l}[V_1] = [I]\,[Z_1] \\ [V_2] = [I]\,[Z_2] \\ [V_3] = [I]\,[Z_3]\end{array}\right| \Rightarrow [Z] = [Z_1] + [Z_2] + [Z_3]$$



TRIÁNGULOS DE OHMIOS, VOLTIOS Y VATIOS:

Podemos resumir en una sola figura aplicable a los circuitos en serie las relaciones entre las impedancias, potenciales eficaces y potencias, en las diversas partes del circuito. Este esquema y el conocimiento de que la potencia activa que tiene por valor:

$$P_A = I_e^2 R$$

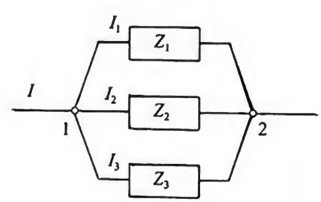
nos resuelven abundantes problemas relativos a impedancias en serie.

IMPEDANCIAS EN DERIVACIÓN:

$$\left.\begin{array}{l}[I] = [I_1] + [I_2] + [I_3] \\ [I] = \dfrac{[V]}{[Z_1]} + \dfrac{[V]}{[Z_2]} + \dfrac{[V]}{[Z_3]}\end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{[Z]} = \frac{1}{[Z_1]} + \frac{1}{[Z_2]} + \frac{1}{[Z_3]}$$

Para facilitar el cálculo de impedancias en paralelo se introduce el concepto de ADMITANCIA, que ès la magnitud inversa a la impedancia:

$$[Y] = \frac{1}{[Z]}$$



y, por tanto:

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] + [Y_3]$$

RESONANCIA EN SERIE:

Si en un circuito LCR la reactancia es nula, es decir:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \operatorname{tag}\varphi = 0$$

entonces la intensidad y la FEM están en concordancia de fase, es decir, las dos se anulan o se hacen máximas en el mismo instante. En tal caso se realiza un fenómeno llamado «RESONANCIA» eléctrica: la impedancia se hace mínima e igual a R; entonces I_0 adquiere su mayor valor posible:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{R}$$

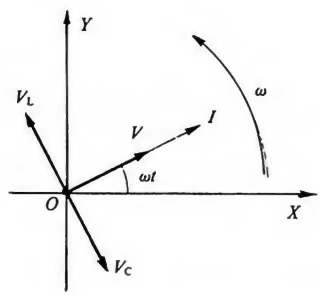
Así, cuando hay concordancia de fase entre la intensidad y la FEM, I_0 crece extraordinariamente, haciéndose peligrosa para la seguridad del aislamiento de la línea. Los circuitos industriales no están preparados para tan altas intensidades, por lo que debe evitarse, por tanto, tal fenómeno de resonancia. Siendo:

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

como $\omega = 2\pi/T$, obtenemos:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{1}{L\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$$

(FÓRMULA DE TOMSON)



que nos da el período de la corriente, en el fenómeno de resonancia, en función de la autoinducción y la capacidad. Este tiempo es el llamado «PERIODO DE DESCARGA DEL CONDENSADOR».

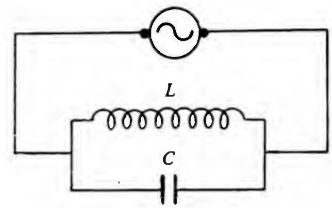
En un circuito LCR en resonancia se verificará:

$$[V_C] = [V_L]$$

y el diagrama vectorial será como el de la figura.

RESONANCIA EN PARALELO:

Supongamos un circuito como el de la figura en el que suponemos nula la resistencia de la línea y derivaciones; siendo el potencial en la línea de la forma $V = V_0 \cos \omega t$ y verificándose:



$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{LC}$$

entonces:

$$[Z_L] = L\omega i \quad \Rightarrow \quad [Y_L] = -\frac{1}{L\omega} i = \frac{1}{L\omega} e^{-i\pi/2}$$

$$[Z_C] = -\frac{1}{C\omega} i \quad \Rightarrow \quad [Y_2] = C\omega i = C\omega e^{i\pi/2}$$

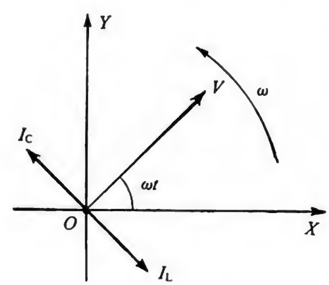
con lo que:

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] = \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) i = 0$$

luego como $[Z] = 1/[Y]$ la impedancia equivalente es infinita ($Z = \infty$); luego en la línea será nula la intensidad, tomando en cada derivación los valores:

$$[I_L] = [V]\,[Y_L] = \frac{V_0}{L\omega} e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

$$[I_C] = [V]\,[Y_C] = V_0 C\omega e^{i(\omega t + \pi/2)}$$



que son iguales en módulo y forman en el diagrama un ángulo π, y por tanto:

$$[I_L] + [I_C] = 0$$

resultado que ya habíamos previsto.

MÉTODO FASORIAL PARA EL CÁLCULO CON MAGNITUDES SINUSOIDALES:

Con el fin de simplificar los cálculos, se prescinde del término $e^{i\omega t}$ (que indica la rotación del «fasor» con velocidad angular constante ω), por ser el mismo para todas las tensiones e intensidades del circuito; por lo tanto, se trabajará con lo que llamaremos el FASOR; así, por ejemplo, si la intensidad alterna es de la forma $I = I_0(\cos\omega t - \varphi)$, la escribíamos en forma compleja:

$$[I] = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

el fasor que le corresponde será:

$$\overline{I} = I_0 e^{-i\varphi}$$

tendremos que incluir el término $e^{i\omega t}$ cuando deseemos obtener la expresión específica de la magnitud física.

Problema 37. En un circuito de corriente alterna hay intercalado un condensador de 10 μF de capacidad. Calcular la capacitancia del condensador. Considerando una resistencia de 50 Ω, ¿cuál será la impedancia del circuito? La frecuencia de la corriente alterna es de 100 Hz.

Solución

La capacitancia viene dada por la fórmula:

$$\boxed{X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{10^6}{2\,000\pi} = 159{,}2\ \Omega}$$

Para hallar la impedancia aplicaremos:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{50^2 + 159{,}2^2} = 167\ \Omega}$$

Problema 38. Calcular la reactancia inductiva de una bobina de 2×10^{-3} H de autoinducción si la corriente alterna que la recorre tiene un período de 1/50 de segundo. ¿Cuál será la impedancia de la bobina si su resistencia es de 5 Ω? Si la bobina está intercalada en un circuito de resistencia 10 Ω, ¿cuál será la impedancia del circuito?

Solución

Si el período es 1/50, la frecuencia será 50 Hz:

$$\boxed{X_L = L\omega = 2\pi\nu L = 2\pi 50 \times 0{,}002 = 0{,}63\ \Omega}$$

La impedancia de la bobina vendrá dada por:

$$\boxed{Z_b = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{5^2 + 0{,}63^2} = 5{,}04\ \Omega}$$

La impedancia del circuito es:

$$\boxed{Z = \sqrt{(\Sigma R^2) + X^2} = \sqrt{15^2 + 0{,}63^2} = 15{,}01\ \Omega}$$

Problema 39. Un condensador de 20 μF de capacidad y una bobina de 0,02 H de autoinducción están colocados en serie en un circuito de resistencia total despreciable. La frecuencia de la corriente alterna que recorre el circuito es 50 Hz. Calcular la impedancia del circuito.

Solución

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi 50 \dfrac{20}{10^6}} \simeq 159{,}15\ \Omega$$

$$X_L = L\omega = 2\pi\nu L = 2\pi 50 \times 0{,}02 \simeq 6{,}28\ \Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2} = X_L - X_C = 152{,}87\ \Omega}$$

Problema 40. Calcular la impedancia de un circuito de 2 Ω de resistencia en el que hay colocados en serie una bobina de 0,02 H de autoinducción y un condensador de 20 μF de capacidad, cuando apliquemos una tensión alterna de 50 Hz.

Solución

$$X_L = 2\pi\nu L = 2\pi 50 \times 0{,}02 = 6{,}28\ \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{1}{2\pi 50 \times 20 \times 10^{-6}} = 159{,}15\ \Omega$$

$$\Rightarrow X = X_L - X_C = -\ 152{,}87\ \Omega$$

La impedancia será:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4 + 152{,}87^2} = 152{,}88\ \Omega}$$

Problema 41. En un circuito de corriente alterna que tiene una resistencia de 22 Ω un voltímetro marca 220 V. Siendo su frecuencia de 100 Hz, determinar:

1. El valor máximo que alcanza el potencial en un ciclo.
2. La ecuación del potencial.
3. Lo que marca un amperímetro de corriente alterna.

Solución

Los aparatos de medida de corriente alterna nos marcan los valores eficaces de ésta.

1)

$$V_e = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{2}\, V_e = 220\sqrt{2} = 311\ \mathrm{V}}$$

2) En función del valor máximo, V_0 es:

$$\boxed{V = V_0 \cos 2\pi\nu t = 311 \cos 200\pi t}$$

En función del valor eficaz, V_e será:

$$\boxed{V = V_e \cos 2\pi\nu t = 220 \cos 200\pi t}$$

3) Aplicando la ley de Ohm:

$$\boxed{I_e = \frac{V_e}{R} = \frac{220}{22} = 10 \text{ A}}$$

Problema 42. Un circuito de corriente alterna de 120 V y 100 Hz consta de una autoinducción pura de 1 H. Calcular:

1. La intensidad de la corriente que lo recorre.

2. La potencia perdida en él.

Solución

$$X_L = 2\pi\nu L = 2\pi 100 = 200\pi\ \Omega$$

1)

$$I_e = \frac{\mathcal{E}_e}{X_L} = \frac{120}{200\pi} = \frac{0{,}6}{\pi}\text{ A}$$

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{X}{R} = \infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{I = \frac{0{,}6}{\pi}\cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{0{,}6}{\pi}\operatorname{sen} 200\pi t}$$

2)

$$\boxed{P = \mathcal{E}_e I_e \cos\varphi = 120\ \frac{0{,}6}{\pi}\cos 90° = 0}$$

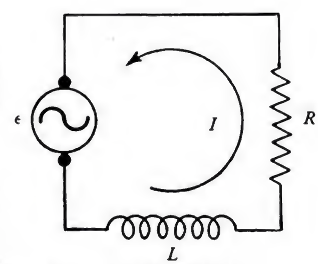
Problema 43. **1.** Dibujar el diagrama vectorial de la corriente alterna que circula en un circuito, considerando únicamente la influencia de la resistencia y la autoinducción.

2. ¿La intensidad está adelantada o retrasada en fase con la FEM?

3. ¿Al disminuir la resistencia el ángulo de desenfase disminuye o aumenta?

4. ¿Cuánto valdría tal ángulo si la resistencia fuese despreciable frente a $L\omega$?

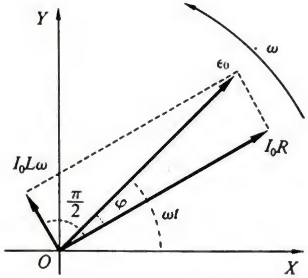
5. Determinar los valores de la impedancia, la intensidad máxima e instantánea en el caso límite (apartado 4).



Problema XXXI-43-1.ª

Solución

1) Dibujaremos un vector de dirección cualquiera y de valor $I_0 R$; formando con él un ángulo de +90°, dibujaremos el vector $I_0 L\omega$, que compondremos con el anterior, obteniendo $\mathcal{E}_0$ y el ángulo de desenfase φ. El ángulo entre $\mathcal{E}_0$ y el eje X es ωt (t, instante arbitrario).



Problema XXXI-43-2.ª

2) Dividiendo I_0R por R se obtiene I_0. Las proyecciones de ϵ_0 e I_0 sobre X nos determinarán los valores instantáneos:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos\omega t \qquad I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

La intensidad en la línea está retrasada con respecto a la FEM aplicada.

3) En este caso:

$$\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}$$

luego, al disminuir R, φ aumenta.

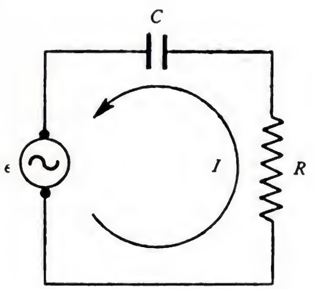
4) Si R fuese despreciable frente a $L\omega$ (inductancia o reactancia inductiva), $\tan\varphi = \infty$ y $\varphi = \pi/2$: «En un circuito con influencia exclusiva de la autoinducción la intensidad está retrasada en fase $\pi/2$ con respecto a la FEM.» Se dice entonces que ambas magnitudes están en «CUADRATURA».

5) En el caso anterior el valor de la impedancia sería:

$$\boxed{Z_0 = L\omega} \Rightarrow \boxed{I_0 = \frac{\epsilon_0}{Z_0} = \frac{\epsilon_0}{L\omega}}$$

y en este caso límite la intensidad instantánea tendría por valor:

$$\boxed{I = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \operatorname{sen}\omega t}$$



Problema XXXI-44-1.ª

Problema 44. **1.** Dibujar el diagrama vectorial de la corriente alterna que circula por un circuito, considerando únicamente la influencia de la resistencia y la capacidad. ¿La intensidad está adelantada o retrasada en fase con la FEM? Determinar la impedancia, el ángulo de desenfase y la intensidad máxima.
2. Vamos disminuyendo la resistencia. ¿El ángulo de desenfase disminuye o aumenta? ¿Cuánto valdría tal ángulo al anularse la resistencia? Determinar la impedancia y la intensidad máxima e instantánea en este caso límite.

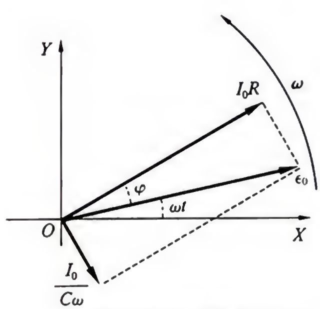
Solución

1) Dibujamos un vector de dirección cualquiera y de valor I_0R; formando con él un ángulo de $-90°$ dibujaremos el vector $I_0/C\omega$, que compondremos con el anterior, obteniendo ϵ_0 y el ángulo de desenfase φ. El ángulo entre ϵ_0 y el eje X es ωt (t, instante arbitrario). Dividiendo I_0R por R, obtenemos I_0. Las proyecciones de ϵ_0 e I_0 sobre X nos determinan los valores instantáneos:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos\omega t \qquad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

(es el valor absoluto del ángulo de desenfase.) La intensidad en la línea está adelantada con respecto a la FEM aplicada. La impedancia será:

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}$$



Problema XXXI-44-2.ª

La tangente del ángulo de desenfase es:

$$\tan\varphi = \frac{-1/C\omega}{R} = -\frac{1}{C\omega R}$$

lo que comprobamos con las representaciones gráficas. Como el ángulo de desenfase es negativo, la intensidad va adelantada en fase con respecto a la tensión. La intensidad máxima vale:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{Z} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + 1/(C\omega)^2}}$$

2) Al ir disminuyendo la resistencia el valor absoluto del ángulo de desenfase va aumentando hasta un valor que corresponde a 90° (adelanto de fase de I con respecto a ϵ):

$$\left.\begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{C\omega}\right)^2} \\ R = 0 \end{array}\right| \quad Z = \sqrt{\left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{1}{C\omega}$$

Los valores de I para este caso límite:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{Z} = \frac{\epsilon_0}{\dfrac{1}{C\omega}} = \epsilon_0 C\omega \qquad I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\, I_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Problema 45. En el circuito completo RLC de las corrientes alternas disminuimos la resistencia. Observar en el diagrama vectorial las variaciones del ángulo desenfase y determinar su valor cuando $R = O$ y $L\omega \gtrless 1/C\omega$. Calcular para estos casos el valor de la impedancia y de la intensidad máxima e instantánea.

Solución

1.er CASO:

$$L\omega > \frac{1}{C\omega}$$

Las proyecciones de ϵ_0 e I_0 son:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

La intensidad está retrasada en fase con la FEM.

Conforme R va disminuyendo φ va aumentando, tendiendo ϵ a adquirir la dirección de $I_0(L\omega - 1/C\omega)$.

En el límite ($R = O$) la impedancia es:

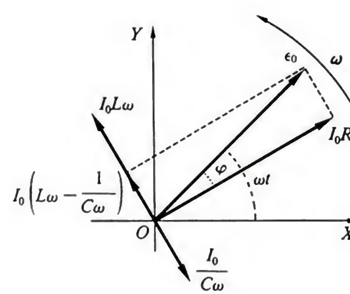
$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = L\omega - \frac{1}{C\omega}$$

La intensidad máxima:

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{Z}$$

La intensidad instantánea:

$$I = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \operatorname{sen} \omega t$$



Problema XXXI-45-1.ª

2.º CASO:

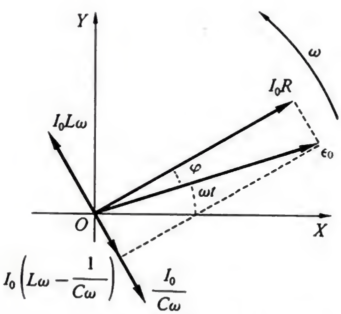
$$L\omega < \frac{1}{C\omega}$$

Las proyecciones de $\mathcal{E}_0$ e I_0 son:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$$

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \qquad (\varphi < 0)$$

La intensidad está adelantada en fase con relación a la FEM. Conforme R va disminuyendo φ va aumentando en valor absoluto, tendiendo $\mathcal{E}_0$ a adquirir la dirección de $I_0/C\omega$. En el límite ($R = 0$) la impedancia es:



Problema XXXI-45-2.ª

$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \frac{1}{C\omega} - L\omega$$

La intensidad máxima:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

La intensidad instantánea:

$$I = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\, I_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Problema 46. Se llaman FEM media e intensidad media al valor medio de la FEM o intensidad de la corriente alterna en un semiperíodo, en el que la corriente circula en todos sus instantes en el mismo sentido. Calcular sus valores:

1. En función de los valores máximos de tales magnitudes.

2. En función de los valores eficaces.

Solución

1) Escojamos el origen de los tiempos cuando la FEM es cero, y a partir de tal instante aumenta por valores positivos, introduciendo en la fórmula general una corrección de fase $-\pi/2$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} \mathcal{E}_0 \operatorname{sen}\omega t\, dt = \frac{2\mathcal{E}_0}{T}\int_0^{T/2} \operatorname{sen}\omega t\, dt = \frac{2\mathcal{E}_0}{T}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right]_0^{T/2} =$$

$$-\frac{2\mathcal{E}_0}{T}\,\frac{T}{2\pi}\left[\cos\frac{2\pi}{T}t\right]_0^{T/2} = -\frac{\mathcal{E}_0}{\pi}[\cos\pi - \cos 0] = -\frac{\mathcal{E}_0}{\pi}[-1-1] = \frac{2\mathcal{E}_0}{\pi}$$

Escogiendo el origen de los tiempos cuando la intensidad es nula y, a partir de tal instante, aumenta por valores positivos, su ecuación es:

$$I = I_0 \operatorname{sen}\omega t$$

y su valor medio:

$$\boxed{I_m = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} I_0 \operatorname{sen}\omega t\, dt = \frac{2I_0}{\pi}}$$

2)

$$\boxed{\epsilon_m = \frac{2\epsilon_0}{\pi} = \frac{2\epsilon_e\sqrt{2}}{\pi}} \qquad \boxed{I_m = \frac{2I_0}{\pi} = \frac{2I_e\sqrt{2}}{\pi}}$$

Problema 47. En un circuito de 25 Ω de resistencia hay instaladas capacidades por valor de 2×10^4 μF; en serie con ellas se instala una bobina de 10 Ω de resistencia y 0,02 H de autoinducción. Aplicamos a los extremos del circuito una tensión alterna cuyo valor eficaz es de 100 V y de frecuencia 100 Hz. Calcular:

1. La impedancia del circuito y de la bobina.
2. La intensidad eficaz y máxima.
3. La tensión eficaz en los bornes de la bobina.
4. El factor de potencia.
5. Las intensidades eficaces, activa y reactiva.
6. La potencia teórica, activa y reactiva.
7. Dibujar el diagrama vectorial.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} X_L = L\omega = 2\pi\nu L = 2\pi 100 \times 0{,}02 = 12{,}57\ \Omega \\ X_C = \dfrac{1}{C\omega} = \dfrac{1}{2\pi\nu C} = \dfrac{1}{200\pi\,\dfrac{2\times10^4}{10^6}} = 0{,}08\ \Omega \end{array}\right| \Rightarrow X = 12{,}49\ \Omega$$

Impedancia de la bobina:

$$\boxed{Z_b = \sqrt{10^2 + 12{,}49^2} = 16\ \Omega}$$

Impedancia del circuito:

$$\boxed{Z = \sqrt{(\Sigma R)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{35^2 + 12{,}49^2} = 37\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{I_e = \frac{\epsilon_e}{Z} = \frac{100}{37} = 2{,}7\ \text{A}} \qquad \boxed{I_0 = I_e\sqrt{2} = 3{,}8\ \text{A}}$$

3)

$$\boxed{V_b = I_e Z_b = 43{,}2\ \text{V}}$$

4)

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{35}{37} = 0{,}946}$$

5)

$$\boxed{I_{ea} = I_e\cos\varphi = 2{,}7 \times 0{,}946 = 2{,}5\ \text{A}} \qquad \boxed{I_{er} = I_e\,\text{sen}\,\varphi = 0{,}9\ \text{A}}$$

6) Potencia teórica:

$$\boxed{P_t = I_e \varepsilon_e = 2{,}7 \times 100 = 270 \text{ V} \cdot \text{A}}$$

Potencia activa:

$$\boxed{P_a = I_e \varepsilon_e \cos\varphi = I_{ea} \varepsilon_e = 2{,}5 \times 100 = 250 \text{ W}}$$

Potencia reactiva:

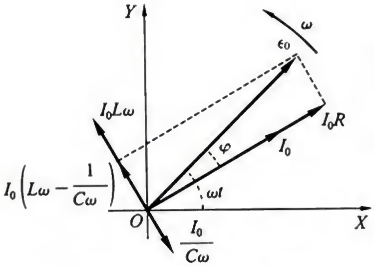
$$\boxed{P_r = I_e \varepsilon_e \operatorname{sen}\varphi = I_{er} \varepsilon_e = 0{,}9 \times 100 = 90 \text{ W}}$$

7) Para dibujar el diagrama consideramos los siguientes valores:

$$I_0 R = 3{,}8 \times 35 = 133 \text{ A} \cdot \Omega$$

$$I_0 L\omega = 3{,}8 \times 12{,}57 = 47{,}8 \text{ A} \cdot \Omega$$

$$\frac{I_0}{C\omega} = 3{,}8 \times 0{,}08 = 0{,}3 \text{ A} \cdot \Omega$$



Problema XXXI-47

Problema 48. En un circuito de corriente alterna de 50 Hz y 22,5 Ω de resistencia señalan los aparatos registradores 150 V y 5 A como tensión e intensidad eficaz. Calcular:

1. El factor de potencia.
2. La potencia activa.
3. La potencia reactiva.
4. La potencia teórica.
5. La intensidad instantánea activa.
6. La intensidad instantánea reactiva.
7. La impedancia.
8. La reactancia.
9. Supuesta anulada la reactancia, calcular la intensidad en el fenómeno de resonancia.
10. Supuesto en un alternador trifásico, que cada uno de los circuitos tuviese las características calculadas en los nueve primeros apartados, determinar la potencia del alternador.
11. Supuesto el fenómeno de resonancia y un alternador trifásico (noveno apartado), calcular la potencia.

Solución

1)

$$I_0 = I_e \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_e \sqrt{2} = 150\sqrt{2} \text{ V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{I_0 R}{\varepsilon_0} = \frac{5\sqrt{2} \times 22{,}5}{150\sqrt{2}} = 0{,}75}$$

2)

$$\boxed{P_a = I_e \varepsilon_e \cos\varphi = 5 \times 150 \times 0{,}75 = 562{,}5 \text{ W}}$$

3)

$$\boxed{P_r = I_e \varepsilon_e \operatorname{sen}\varphi = 5 \times 150 \sqrt{1 - 0{,}75^2} = 496 \text{ W}}$$

4)

$$\boxed{P_t = I_e \varepsilon_e = 5 \times 150 = 750 \text{ V} \cdot \text{A}}$$

5)

$$\boxed{I_a = I_0 \cos\varphi \cos\omega t = 5\sqrt{2} \times 0{,}75 \cos 2\pi 50 t = 5{,}3 \operatorname{sen} 100\pi t}$$

6)

$$\boxed{I_r = I_0 \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega t = 5\sqrt{2}\sqrt{1 - 0{,}75^2} \operatorname{sen} 2\pi 50 t = 4{,}7 \cos 100\pi t}$$

7)

$$\boxed{Z = \frac{\epsilon_0}{I_0} = \frac{150\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 30\ \Omega}$$

8)

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \Rightarrow X^2 = Z^2 - R^2 = 900 - 506{,}25 = 393{,}75\ \Omega^2 \Rightarrow \boxed{X = 19{,}8\ \Omega}$$

9)

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{R} = \frac{150\sqrt{2}}{22{,}5} = 9{,}4\ \text{A}$$

su valor eficaz es:

$$\boxed{I_e = \frac{150}{22{,}5} = 6{,}7\ \text{A}}$$

10)

$$\boxed{P = \sqrt{3}\epsilon_e I_e \cos\varphi = \sqrt{3}\, P_a = 974{,}3\ \text{W}}$$

11)

$$\boxed{P = \sqrt{3}\, \epsilon_e I_e = \sqrt{3} \times 150 \times 6{,}7 = 1\,740{,}7\ \text{W}}$$

Problema 49. Un solenoide de 1 m de longitud de 50 Ω de resistencia, 10 espiras/cm y 10 cm^2 de sección tiene en su interior un núcleo de hierro ($\mu' = 2\,000$) y es recorrido por una corriente alterna de 50 Hz. Calcular:

1. La autoinducción.
2. Su reactancia.
3. Su impedancia.
4. El desenfase entre la tensión y la intensidad.
5. La intensidad de la corriente para una tensión de 2 000 V.
6. El factor de potencia.
7. La potencia de la corriente (considerar el solenoide como indefinido).

Solución

1)

$$\boxed{L = \frac{\mu'\mu_0 n^2 A}{l} = \frac{2\,000 \times 4\pi 1\,000^2 \times 10 \times 10^{-4}}{10^7 \times 1} = 0{,}8\pi\ \text{H}}$$

2)

$$\boxed{X_L = L\omega = 0{,}8\pi 2\pi 50 = 80\pi^2\ \Omega}$$

3)

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{50^2 + (80\pi^2)^2} = 791\ \Omega}$$

4)

$$\mathrm{tag}\varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{80\pi^2}{50} \Rightarrow \boxed{\varphi = 1{,}5 \text{ rad}}$$

5)

$$\boxed{I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{2\,000}{791} = 2{,}5 \text{ A}}$$

6) Del triángulo de ohmios:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{50}{791} = 0{,}06}$$

7)

$$\boxed{P = V_e I_e \cos\varphi = 2\,000 \times 2{,}5 \times 0{,}06 = 300 \text{ W}}$$

Problema 50. Los aparatos registradores nos indican para un circuito de alterna: $I_e = 10$ A, $V_e = 500$ V, $P_A = 3$ kW, la frecuencia es de 50 Hz y la intensidad está retrasada con respecto al voltaje. Determinar el factor de potencia y la capacidad del condensador en serie, capaz de elevarlo hasta 0,8. ¿Qué potencia tomará el circuito de la red, una vez hecha tal modificación?

Solución

Del triángulo de ohmios, voltios y vatios del formulario se obtiene:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P_A}{I_e V_e} = \frac{3\,000}{10 \times 500} = 0{,}6} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \mathrm{sen}\varphi = \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 0{,}8 \\ \\ \mathrm{tag}\varphi = 4/3 \end{array}\right.$$

$$P_A = I_e^2 R \Rightarrow R = \frac{P_A}{I_e^2} = \frac{3\,000}{100} = 30 \ \Omega$$

Del triángulo de ohmios obtenemos:

$$X = R\,\mathrm{tag}\varphi = 30 \times \frac{4}{3} = 40 \ \Omega \qquad Z = \frac{R}{\cos\varphi} = \frac{30}{0{,}6} = 50 \ \Omega$$

quedando así determinadas las características del circuito. A $\cos\varphi' = 0{,}8$ (que queremos obtener) corresponde:

$$\mathrm{sen}\varphi' = 0{,}6 \quad \text{y} \quad \mathrm{tag}\varphi' = \frac{3}{4}$$

Del triángulo de ohmios:

$$X' = R\,\mathrm{tag}\varphi' = 30\,\frac{3}{4} = 22{,}5 \ \Omega$$

Intercalada una capacidad C', para aproximar la fase de la intensidad a la del voltaje, la nueva capacidad equivalente y la nueva capacitancia serán:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \Rightarrow \frac{1}{C_e\omega} = \frac{1}{C'\omega} + \frac{1}{C\omega}$$

$$X' = L\omega - \frac{1}{C_e\omega} = L\omega - \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{C'\omega} = X - \frac{1}{C'\omega}$$

$$C' = \frac{1}{(X - X')\omega} = \frac{1}{(40 - 22{,}5)2\pi 50} = 182 \times 10^{-6} \text{ F} = 182 \ \mu\text{F}$$

La nueva impedancia es:

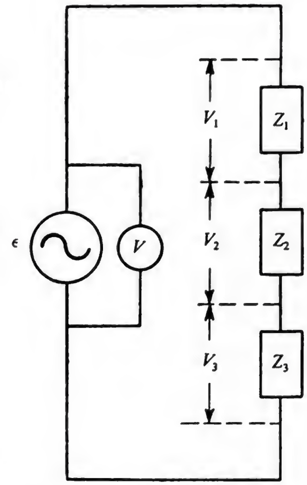
$$Z' = \frac{R}{\cos\varphi'} = \frac{30}{0{,}8} = 37{,}5\ \Omega$$

Y la intensidad eficaz y la potencia activa:

$$I'_e = \frac{V_e}{Z'} = \frac{500}{37{,}5}\ \text{A}$$

$$\boxed{P'_A = I'_e V_e \cos\varphi' = \frac{500 \times 500 \times 0{,}8}{37{,}5 \times 1\ 000}\ \text{kW} = 5{,}3\ \text{kW}}$$

Problema 51. Demostrar que la impedancia equivalente a otras en serie es la suma geométrica de las impedancias asociadas. Hacer una representación gráfica.



Problema XXXI-51-1.ª

Solución

Si conectamos varias impedancias en serie como indicamos en la figura, entonces la intensidad de corriente por cada una de ellas es la misma. Si ponemos los potenciales, las impedancias y las intensidades en forma compleja y aplicamos la ley de Ohm, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}[V_1] &= [I]\,[Z_1] \\ [V_2] &= [I]\,[Z_2] \\ [V_3] &= [I]\,[Z_3]\end{aligned}\right| \Rightarrow [V] = [V_1] + [V_2] + [V_3] = ([Z_1] + [Z_2] + [Z_3])\,[I]$$

de donde deducimos que «en la conexión de impedancias en serie se suman las impedancias».

$$\boxed{[Z] = [Z_1] + [Z_2] + [Z_3]}$$

conviene resaltar que esta expresión es válida si las impedancias están expresadas en forma compleja; luego:

$$\left.\begin{aligned}[Z_1] &= R_1 + iX_1 \\ [Z_2] &= R_2 + iX_2 \\ [Z_3] &= R_3 + iX_3\end{aligned}\right| \Rightarrow [Z] = (R_1 + R_2 + R_3) + i(X_1 + X_2 + X_3)$$

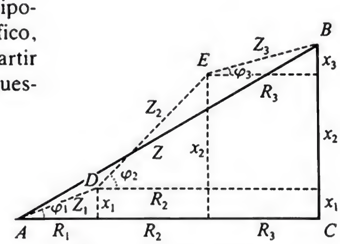
que, escrita en forma exponencial:

$$[Z] = Ze^{i\varphi} \quad \left\|\begin{aligned} Z &= \sqrt{(R_1 + R_2 + R_3)^2 + (X_1 + X_2 + X_3)^2} \\ \operatorname{tag}\varphi &= \frac{X_1 + X_2 + X_3}{R_1 + R_2 + R_3}\end{aligned}\right.$$

por tanto, Z (en módulo) no es la suma de los módulos de Z_1, Z_2 y Z_3.

La impedancia (triángulo de ohmios) queda determinada por el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la resistencia y la reactancia.
Construyamos un triángulo cuyos catetos son: $R = \Sigma R_i$ y $X = \Sigma X_i$ (X = reactancia). Su hipotenusa será la impedancia Z que podría haberse construido, según se observa en el gráfico, dibujando a partir de un punto A la impedancia Z_1; a partir de su extremo D, la Z_2, y a partir de su extremo E, la Z_3. Se une el origen con el último extremo y se obtiene Z, lo que demuestra el enunciado:

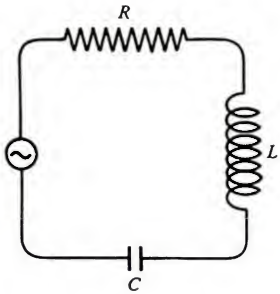
$$[Z] = \Sigma\,[Z_i]\ .$$



Problema XXXI-51-2.ª

En tal suma geométrica los ángulos que $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ forman con el eje AC son:

$$\operatorname{tag}\varphi_1 = \frac{X_1}{R_1} \qquad \operatorname{tag}\varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} \qquad \operatorname{tag}\varphi_3 = \frac{X_3}{R_3}$$



Problema XXXI-52

Problema 52. En el circuito RLC de la figura, $L = 0{,}5$ H, la tensión aplicada es $V = 300 \cos 500t$ y la intensidad $I = 1{,}5 \cos(500t - \pi/6)$, ambas escritas en el SI. Calcular:

1. La resistencia.
2. La capacidad del condensador.
3. La frecuencia que debería tener la corriente para que el circuito estuviera en resonancia.

Solución

La impedancia será:

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0} = \frac{300}{1{,}5} = 200\ \Omega$$

que, expresada en forma compleja:

$$[Z] = Z_0 e^{i\varphi} = R + Xi = 200 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right)$$

1) De lo anterior deducimos:

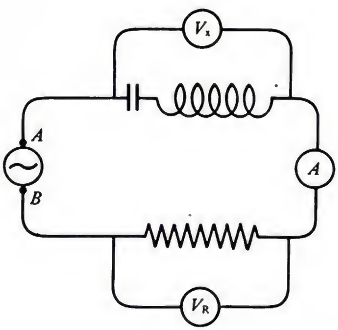
$$\boxed{R = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}\ \Omega}$$

2)

$$X = L\omega - \frac{1}{C\omega} \quad \Rightarrow \quad 200 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 250 - \frac{1}{500\,C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{40}{3}\ \mu\text{F}}$$

3)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}5\ \frac{40}{3}\ 10^{-6}}} = 387{,}3\ \text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 61{,}6\ \text{Hz}}$$



Problema XXXI-53

Problema 53. Los voltímetros de la figura nos indican: $V_R = 80$ V y $V_X = 60$ V. Si el amperímetro marca 5 A, calcular:

1. La impedancia total del circuito y el ángulo de desenfase.
2. El potencial eficaz V_{AB}.
3. La potencia reactiva del circuito.

Solución

1)

$$Z_R = \frac{V_R}{I_e} = \frac{80}{5} = 16\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Z_R] = 16$$

$$Z_X = \frac{V_X}{I_e} = \frac{60}{5} = 12\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Z_X] = 12i$$

$$[Z] = [Z_R] + [Z_X] = 16 + 12i = 20 e^{0{,}64\,i}$$

luego la impedancia equivalente de todo el circuito es:

$$\boxed{Z = 20\ \Omega}$$

y el ángulo en que está retrasada la intensidad respecto al potencial es:

$$\boxed{\varphi = 0{,}64 \text{ rad}}$$

2) El fasor que nos representa la intensidad es:

$$\bar{I} = 5e^{-0{,}64i} \quad \Leftrightarrow \quad I = 5\cos(\omega t - 0{,}64)$$

aplicando la ley de Ohm:

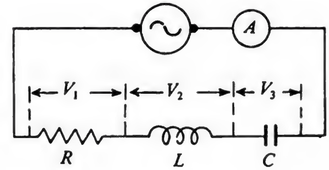
$$\bar{V} = \bar{I}\,[Z] = 100 \quad \Leftrightarrow \quad V = 100\cos\omega t$$

luego:

$$\boxed{V_e = V_{AB} = 100 \text{ V}}.$$

3)

$$\boxed{P_R = I_e V_e \operatorname{sen}\varphi = 5 \times 100 \operatorname{sen} 0{,}64 \simeq 300 \text{ W}}$$



Problema XXXI-54

Problema 54. En el circuito de la figura $R = 40\ \Omega$, $L = 1/\pi$ H, $C = 1/7\pi$ mF y la frecuencia $\nu = 50$ Hz, el amperímetro indica una intensidad eficaz de 10 A. Calcular:

1. Las impedancias complejas de cada uno de los elementos del circuito.
2. La impedancia compleja total a que equivale todo el circuito, ángulo de desenfase y diagrama vectorial de impedancias.
3. Expresión fasorial de la intensidad.
4. Diferencia de potencial entre los bornes del condensador, de la autoinducción, de la resistencia y del alternador; indicar en todos los casos los valores eficaces y dibujar el diagrama correspondiente.
5. Potencia del circuito.

Solución

1.er MÉTODO:

1) La impedancia correspondiente a la resistencia y que se identifica con ella es:

$$Z_1 = R = 40\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Z_1] = 40}$$

La impedancia de la autoinducción (que se identifica con la inductancia) es:

$$Z_2 = L\omega = \frac{1}{\pi}\,2\pi 50 = 100\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Z_2] = 100i = 100e^{\frac{\pi}{2}i}}$$

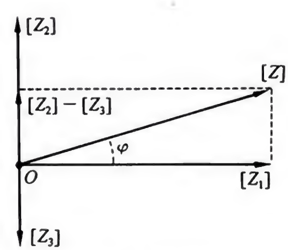
La impedancia de la capacidad (que se identifica con la capacitancia) es:

$$Z_3 = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{\dfrac{1}{7\pi 10^3}\,2\pi 50} = 70\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Z_3] = -70i = 70e^{-\frac{\pi}{2}i}}$$

2)

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] + [Z_3] = 40 + 30i = 50e^{0{,}64i} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{Z = 50\ \Omega} \qquad \boxed{\varphi = 0{,}64 \text{ rad}}$$



El diagrama vectorial de impedancias es el de la figura.

Problema XXXI-54-1.ª

3) La intensidad en el circuito vendrá dada por:

$$I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

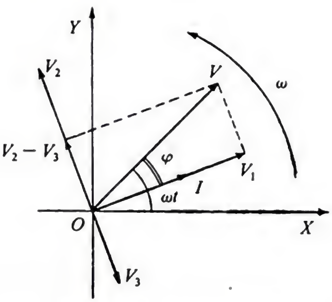
como $I_0 = \sqrt{2}\, I_e = 14$ A, luego:

$$I = 14\cos(100\pi t - 0{,}64) \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = 14 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}$$

se suele expresar la intensidad (y el potencial), en vez de en función de los valores máximos, en función de sus valores eficaces, es decir:

$$\boxed{\bar{I} = 10 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}}$$

en todo lo que sigue y mientras no se diga lo contrario, trabajaremos con las eficaces, que son las que nos dan los aparatos de medida.



Problema XXXI-54-2.ª

4) Por aparición de la ley de Ohm:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}\,[Z_1] = 400 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}$$

$$\bar{V}_2 = \bar{I}\,[Z_2] = 10 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}\, 100 e^{\mathrm{i}\pi/2} = 1\,000 \bar{e}^{(\pi/2 - 0{,}64)\,\mathrm{i}}$$

$$\bar{V}_3 = \bar{I}\,[Z_3] = 10 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}\, 70 e^{-\mathrm{i}\pi/2} = 700 \bar{e}^{(\pi/2 + 0{,}64)\,\mathrm{i}}$$

$$\bar{V} = \bar{I}\,[Z] = 10 e^{-0{,}64\,\mathrm{i}}\, 50 e^{0{,}64\,\mathrm{i}} = 500$$

Los valores instantáneos serán:

$$\boxed{\begin{aligned} V_1 &= 400\cos(100\pi t - 0{,}64) \\ V_2 &= 1\,000\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2} - 0{,}64\right) \\ V_3 &= 700\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{2} - 0{,}64\right) \\ V &= 500\cos 100\pi t \end{aligned}}$$

siendo 400 V, 1 000 V, 700 V y 500 V los valores eficaces respectivos.

Con los valores obtenidos se deduce que existiendo en todos los puntos del circuito la misma intensidad, la cual en la resistencia debe estar en fase con el potencial; pero en la autoinducción pura la intensidad debe ir retrasada $\pi/2$ con respecto al potencial (potencial adelantadc con respecto a la intensidad), y en la capacidad debe estar la intensidad adelantada $\pi/2$ con respecto al potencial (potencial retrasado con respecto a la intensidad). El fenómeno queda expresado por los vectores V_1, V_2 y V_3. El vector resultante de los tres (V) es el potencial en bornes del alternador.

5) El factor de potencia toma el valor:

$$\cos\varphi = 0{,}8$$

luego la potencia es:

$$\boxed{P = V_e I_e \cos\varphi = 500 \times 10 \times 0{,}8 = 4\,000 \text{ W}}$$

2.º MÉTODO:

Se ha resuelto el problema empleando el cálculo fasorial para que el lector se ejercite con estas operaciones, que tendrá que utilizar en circuitos con impedancias en paralelo, siendo quizá más fácil emplear la ley de Ohm a los valores eficaces, y se obtendrá:

$$V_1 = I_e Z_1 = 10 \times 40 = 400 \text{ V}$$

$$V_2 = I_e Z_2 = 10 \times 100 = 1\,000 \text{ V}$$

$$V_3 = I_e Z_3 = 10 \times 70 = 700 \text{ V}$$

teniendo en cuenta que:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = \sqrt{40^2 + (100 - 70)^2} = 50\ \Omega$$

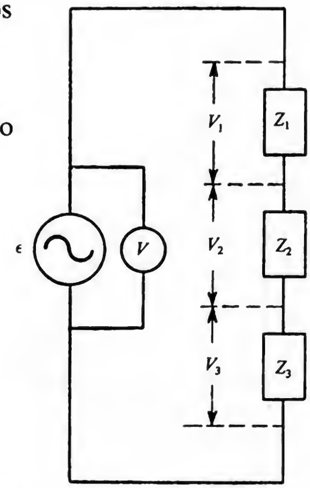
con lo que:

$$V_c = I_c Z = 10 \times 50 = 500\ \text{V}$$

construyendo a continuación el diagrama vectorial de la figura, que es consecuencia de la teoría expuesta, nos proporciona el valor del ángulo de desenfase φ y, por tanto, todos los demás resultados.

Problema 55. En el circuito de la figura, $[Z_1] = 20 + 30i\ \Omega$, $[Z_2] = 10 - 20i\ \Omega$, $[Z_3] = 20 + 20i\ \Omega$, y la frecuencia $\nu = 50/\pi$ Hz, un voltímetro colocado entre los extremos de $[Z_2]$ nos marca un voltaje eficaz de 224 V. Calcular:

1. La impedancia equivalente y el ángulo de desenfase.
2. Si en la línea $V = V_c \cos\omega t$. ¿Qué ángulo φ_2 está desfasado V_2 con respecto a V? ¿Qué valor toma V_2?
3. Valor de I en el circuito.
4. Valor de V_1, V_3 y V.
5. Potencia del circuito.



Problema XXXI-55

Solución

1)

$$[Z] = [Z_1] + [Z_2] + [Z_3] = 50 + 30i = 10\sqrt{34}\,e^{0,54\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = 10\sqrt{34}\ \Omega} \quad \boxed{\varphi = 0{,}54\ \text{rad}}$$

2) y 3) Como I es la misma para todo el circuito y el resultado anterior nos dice que está retrasada en fase φ respecto al potencial en la línea ($\varphi > 0$), entonces I es de la forma:

$$I = I_c \cos(100t - 0{,}54) \quad \Rightarrow \quad \bar{I} = I_c e^{-0,54\,i}$$

suponiendo un desenfase φ_2 entre V y V_2, este último se expresará por:

$$V_2 = 224\cos(100t + \varphi_2) \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_2 = 224\,e^{\varphi_2 i}$$

y como:

$$[Z_2] = 10 - 20i = 10\sqrt{5}\,e^{-1,11\,i}$$

aplicando la ley de Ohm a los extremos de Z_2, nos queda:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_2}{[Z_2]} \quad \Leftrightarrow \quad I_c e^{-0,54\,i} = \frac{224\,e^{\varphi_2 i}}{10\sqrt{5}\,e^{-1,11\,i}} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{|l} I_c = \dfrac{224}{10\sqrt{5}}\ \text{A} \simeq 10\ \text{A} \\ -0{,}54 = \varphi_2 + 1{,}11 \quad \Rightarrow \boxed{\varphi_2 = -\,1{,}65\ \text{rad}} \end{array}$$

luego:

$$\boxed{V_2 = 224\cos(100t - 1{,}65)} \qquad \boxed{I = 10\cos(100t - 0{,}54)}$$

4) Como:

$$[Z_1] = 20 + 30i = 10\sqrt{13}\,e^{0,98\,i} \qquad [Z_3] = 20 + 20i = 20\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

por aplicación de la ley de Ohm se obtiene:

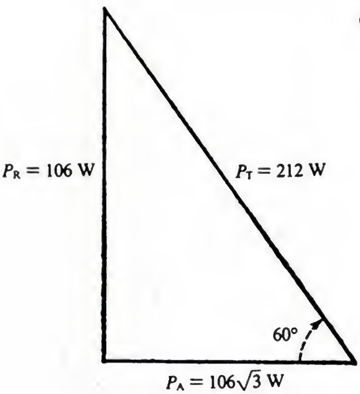
$$\bar{V}_1 = \bar{I}\,[Z_1] = 100\sqrt{13}\,e^{(0{,}98-0{,}54)\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = 100\sqrt{13}\cos(100t + 0{,}44)}$$

$$\bar{V}_3 = \bar{I}\,[Z_3] = 200\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{4} - 0{,}54\right)\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_3 = 200\sqrt{2}\cos(100t + 0{,}24)}$$

$$\bar{V} = \bar{I}\,[Z] = 100\sqrt{34}\,e^{(0{,}54-0{,}54)\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = 100\sqrt{34}\cos 100t}$$

5)

$$\boxed{P = I_e V_e \cos\varphi = 1\,000\sqrt{34}\cos 0{,}54 \simeq 5\,000 \text{ W}}$$



Problema XXXI-56

Problema 56. Dibujar el triángulo de potencias para un circuito con una tensión $\epsilon = 300\cos(\omega t + 15°)$ V y cuya intensidad es $I = 1{,}4\cos(\omega t - 45°)$ A, y ambos en función de sus magnitudes máximas. Calcular el factor de potencia.

Solución

Los valores eficaces de la tensión y de la intensidad serán:

$$\epsilon_e = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}} = 212 \text{ V}$$

$$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 1 \text{ A}$$

Para calcular el desenfase tenemos en cuenta que:

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_e e^{i\varphi_1} = 212\,e^{i\pi/12}$$

$$\bar{I} = I_2 e^{i\varphi_2} = e^{-i\pi/4}$$

y como:

$$[Z] = Z_0 e^{i\varphi} = \frac{\bar{\epsilon}}{\bar{I}} = 212\,e^{i\pi/6}$$

luego:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\varphi = 0{,}5}$$

otra forma de calcular el factor de potencia sería haciendo el siguiente cambio:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(\omega t + 15) = \cos\omega' t' \\ \cos(\omega t - 45) = \cos(\omega' t' - \varphi) \end{array}\right| \begin{array}{l} \omega t + 15 = \omega' t' \\ \omega t - 45 = \omega' t' - \varphi \end{array} \left| \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60° \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = 0{,}5\right.$$

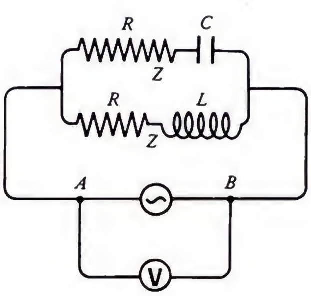
con lo que:

$$P_T = V_e I_e = 212 \times 1 = 212 \text{ W}$$

$$P_A = V_e I_e \cos\varphi = 106 \text{ W}$$

$$P_R = V_e I_e \operatorname{sen}\varphi = 106\sqrt{3} \text{ W}$$

obteniéndose el triángulo de la figura.



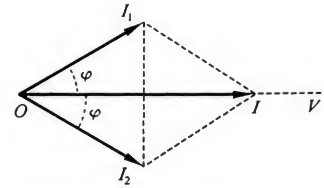
Problema XXXI-57

Problema 57. En el circuito de la figura las impedancias derivadas son iguales (Z), así como sus resistencias (R). El voltímetro nos indica el potencial eficaz V_{AB} (V). Determinar los valores de las intensidades en las derivaciones y en el circuito general en función de Z, R y V. Demostrar que el valor de la impedancia equivalente a las dos en derivación es $Z_{eq} = Z^2/2R$.

Solución

$$\boxed{I_1 = \frac{V}{Z}} \qquad \boxed{I_2 = \frac{V}{Z}} \qquad \cos\varphi = \frac{R}{Z}$$

$$\boxed{I = 2I_2\cos\varphi = 2\,\frac{VR}{Z^2} = \frac{V}{Z_{eq}}} \;\Rightarrow\; \boxed{Z_{eq} = \frac{Z^2}{2R}}$$

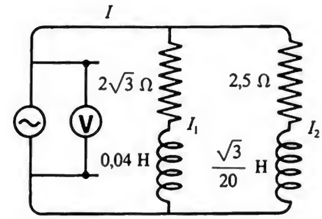


Problema XXXI-57-1.ª

Problema 58. Dado el circuito en la figura, en el que $V = 20\sqrt{2}\cos(50t + \pi/3)$, determinar:

1. Intensidades que circulan por cada rama en paralelo.

2. Factores de potencia de cada rama.



Problema XXXI-58

Solución

1) Las impedancias complejas correspondientes a cada rama son:

$$[Z_1] = 2\sqrt{3} + 50 \times 0{,}04i = 2\sqrt{3} + 2i = 4e^{i\pi/6}$$

$$[Z_2] = 2{,}5 + 50\,\frac{\sqrt{3}}{20}\,i = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}\,i = 5e^{i\pi/3}$$

luego las impedancias de cada rama y los ángulos de desenfase son:

$$Z_1 = 4\ \Omega \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_2 = 5\ \Omega \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$$

como el fasor correspondiente al potencial es:

$$\bar{V} = 20\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}$$

los fasores de intensidad en cada rama (aplicando la ley de Ohm) serán:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{[Z_1]} = \frac{20\sqrt{2}\,e^{i\pi/3}}{4e^{i\pi/6}} = 5\sqrt{2}\,e^{i\pi/6}$$

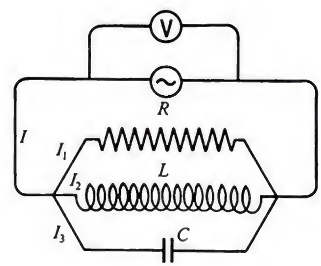
$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{[Z_2]} = 4\sqrt{2}\,e^{i0} = 4\sqrt{2}$$

las intensidades que circulan por cada rama son:

$$\boxed{I_1 = 5\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{6}\right)} \qquad \boxed{I_2 = 4\sqrt{2}\cos 50t}$$

2)

$$\boxed{\cos\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \boxed{\cos\varphi_2 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}}$$



Problema XXXI-59

Problema 59. En el circuito de la figura el potencial eficaz en bornes del alternador es 200 V, $R = 25\ \Omega$, $L\omega = 50\ \Omega$, $1/C\omega = 20\ \Omega$ y $\nu = 50$ Hz. Determinar:

1. Las expresiones complejas de las admitancias de cada una de las partes del circuito.

2. La intensidad en cada una.
3. La impedancia equivalente.
4. El ángulo de desenfase entre el potencial y la intensidad en la línea.
5. La intensidad en la línea.
6. La potencia del circuito.
7. Dibujar los diagramas vectoriales correspondientes.

Solución

1)

$$Z_1 = R = 25\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Z_1] = 25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Y_1] = \frac{1}{25}\ \Omega^{-1}}$$

$$Z_2 = L\omega = 50\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Z_2] = 50i \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Y_2] = -\frac{i}{50}\ \Omega^{-1} = \frac{1}{50}\ e^{-i\pi/2}}$$

$$Z_3 = \frac{1}{C\omega} = 20\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Z_3] = -20i \quad \Rightarrow \quad \boxed{[Y_3] = \frac{i}{20}\ \Omega^{-1} = \frac{1}{20}\ e^{i\pi/2}}$$

2) Como:

$$V = V_e \cos\omega t \quad \Rightarrow \quad V = 200 \cos 100\pi t$$

el fasor correspondiente a este potencial es:

$$\bar{V} = 200$$

al ser el mismo potencial para cualquiera que aea la rama del circuito, por aplicación de la ley de Ohn, se obtiene:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{[Z_1]} = \bar{V}[Y_1] = 8\ \text{A}$$

lo que nos indica que la intensidad en la resistencia está en fase con el potencial.

$$\bar{I}_2 = \bar{V}[Y_2] = 200\ \frac{1}{50}\ e^{-i\pi/2} = 4e^{-i\pi/2}$$

lo que nos indica que en la autoinducción hay un retraso de $\pi/2$ de la intensidad con respecto al potencial.

$$\bar{I}_3 = \bar{V}[Y_3] = 10e^{i\pi/2}$$

lo que nos indica que en el condensador hay un adelanto de $\pi/2$ de la intensidad con respecto al potencial. Los valores instantáneos de las intensidades en cada una de las derivaciones es:

$$\boxed{I_1 = 8\cos 100\pi t}$$

$$\boxed{I_2 = 4\cos(100\pi t - \pi/2)}$$

$$\boxed{I_3 = 10\cos(100\pi t + \pi/2)}$$

siendo 8, 4 y 10 A los valores eficaces de ellas en cada una de las líneas, respectivamente.

3) y 4) La admitancia equivalente será:

$$[Y] = [Y_1] + [Y_2] + [Y_3] = \frac{4 + 3i}{100} = \frac{1}{20}\ e^{0,64i} \quad \Rightarrow$$

$$[Z] = \frac{1}{[Y]} = 16 - 12i = 20e^{-0,64i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = 20\ \Omega} \quad \boxed{\varphi = -0,64\ \text{rad}}$$

lo que indica que la intensidad en la línea estará «adelantada» en fase respecto del potencial.

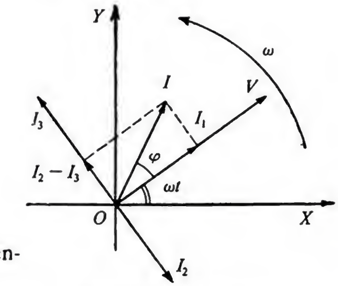
5) El valor de la intensidad en la línea se obtiene:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

o más fácilmente por aplicación de la ley de Ohm:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{[Z]} = \bar{V}\,[Y] = 10e^{0{,}64\,i} \quad \Rightarrow \boxed{I = 10\cos(100\pi t + 0{,}64)}$$

10 A es el valor de la intensidad eficaz en la línea.

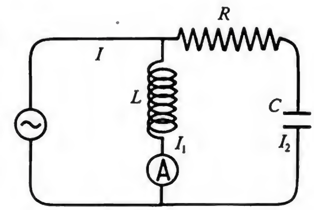


Problema XXXI-59-1.ª

6) La potencia del circuito se obtiene teniendo en cuenta que el valor del factor de potencia es:

$$\cos\varphi = 0{,}8 \quad \Rightarrow \boxed{P = I_e V_e \cos\varphi = 10 \times 200 \times 0{,}8 = 1\,600\ \mathrm{W}}$$

Problema 60. En el circuito de la figura $I_1 = 5\cos 10^3 t$. (Los 5 A son marcados por el amperímetro.) Si $R = 50\ \Omega$, $C = 4\ \mu\mathrm{F}$ y $L = 0{,}1$ H, determínese:
1. Diferencia de potencial en bornes del alternador.
2. La intensidad en la rama *CR*.
3. Las diferencias de potencial existentes en bornes de la resistencia y del condensador.



Problema XXXI-60

Solución

El fasor correspondiente a la intensidad que circula por la autoinducción es:

$$\bar{I}_1 = 5$$

Las expresiones complejas de las impedancias correspondientes a cada rama serán:

$$[Z_1] = L\omega i = 100i = 100e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$[Z_2] = R - \frac{1}{C\omega}\,i = 50 - 250i = 50\sqrt{26}\,e^{-1{,}373\,i}$$

1) Aplicando la ley de Ohm:

$$\bar{V} = \bar{I}_1\,[Z_1] = 500e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \Rightarrow \boxed{V = 500\cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

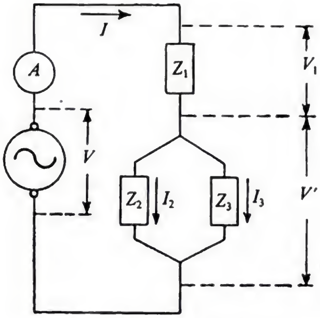
2)

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{V}}{[Z_2]} = \frac{500e^{\frac{\pi}{2}i}}{50\sqrt{26}\,e^{-1{,}373\,i}} = \frac{10}{\sqrt{26}}\,e^{2{,}944\,i} \quad \Rightarrow \boxed{I_2 = \frac{10}{\sqrt{26}}\cos(10^3 t + 2{,}944)}$$

3) Como:

$$[Z_R] = 50 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_R = \bar{I}_2\,[Z_R] = \frac{500}{\sqrt{26}}\,e^{2{,}944\,i} \quad \Rightarrow \boxed{V_R = \frac{500}{\sqrt{26}}\cos(10^3 t + 2{,}944)}$$

$$[Z_C] = -250i = 250e^{-\frac{\pi}{2}i} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}_C = \bar{I}_2\,[Z_C] = \frac{2\,500}{\sqrt{26}}\,e^{1{,}373\,i} \quad \Rightarrow \boxed{V_C = \frac{2\,500}{\sqrt{26}}\cos(10^3 t + 1{,}373)}$$



Problema XXXI-61

Problema 61. En el circuito de la figura el amperímetro marca 10 A eficaces y $[Z_1] = 2 + 3i\ \Omega$, $[Z_2] = 1 - i\ \Omega$ y $[Z_3] = 3 + 2i\ \Omega$, el alternador funciona a $\nu = 200/\pi$ Hz. Calcular:

1. La impedancia «equivalente» del circuito y ángulo de desenfase.
2. Las expresiones de la intensidad y del potencial instantáneos en el alternador.
3. La tensión en bornas de cada impedancia.
4. La intensidad en cada una de las dos derivaciones.
5. La potencia del circuito.
6. Dibujar el diagrama vectorial de intensidades.

Solución

1)

$$[Y_2] = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{0{,}785\,i}$$

$$[Y_3] = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{13} = \frac{\sqrt{13}}{13}\, e^{-0{,}588\,i}$$

$$[Y'] = [Y_1] + [Y_2] = \frac{19}{26} + \frac{9}{26}\, i = \frac{\sqrt{442}}{26}\, e^{0{,}442\,i} = \sqrt{\frac{17}{26}}\, e^{0{,}442\,i}$$

$$[Z'] = \frac{1}{[Y']} = \sqrt{\frac{26}{17}}\, e^{-0{,}442\,i} = \frac{26}{19+9i} = \frac{19}{17} - \frac{9}{17}\, i$$

$$[Z] = [Z_1] + [Z'] = \frac{53}{17} + \frac{42}{17}\, i \simeq 4e^{0{,}670\,i} \Rightarrow \boxed{Z = 4\ \Omega} \quad \boxed{\varphi = 0{,}670 \text{ rad}}$$

lo que nos indica que la intensidad de la línea estará «retrasada» respecto del potencial.

2)

$$\bar{I} = 10e^{-0{,}670\,i} \Rightarrow \boxed{I = 10\cos(400t - 0{,}670)}$$

$$\bar{V} = \bar{I}[Z] = 40 \Rightarrow \boxed{V = 40\cos 400t}$$

3) Como:

$$[Z_1] = 2 + 3i = \sqrt{13}\, e^{0{,}983\,i}$$

entonces:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}[Z_1] = 10\sqrt{13}\, e^{0{,}313\,i} \Rightarrow \boxed{V_1 = 36\cos(400t + 0{,}313)}$$

$$\bar{V}' = \bar{V}_2 = \bar{V}_3 = \bar{I}[Z'] = 10\sqrt{\frac{26}{17}}\, e^{-1{,}112\,i} \Rightarrow \boxed{V_2 = V_3 = 12{,}4\cos(400t - 1{,}112)}$$

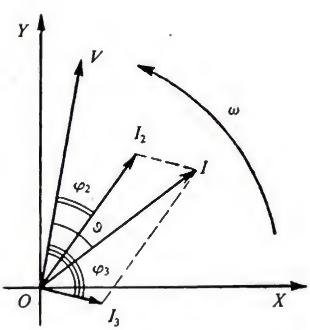
4)

$$\bar{I}_2 = \bar{V}'\,[Y_2] = 12{,}4\,\frac{\sqrt{2}}{2}\, e^{-0{,}327\,i} \Rightarrow \boxed{I_2 = 8{,}7\cos(400t - 0{,}327)}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{V}'\,[Y_3] = 12{,}4\,\frac{\sqrt{13}}{13}\, e^{-1{,}700\,i} \Rightarrow \boxed{I_3 = 3{,}4\cos(400t - 1{,}7)}$$

5)

$$\boxed{P = I_e V_e \cos\varphi = 10 \times 40\cos 0{,}67 = 313 \text{ W}}$$



Problema XXXI-61-1.ª

6) En la figura:

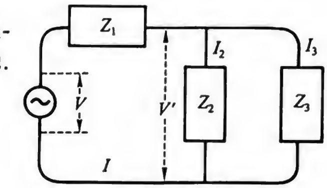
$$\varphi = -0,67 = -38,4°$$

$$\varphi_2 = -0,327 = -18,7°$$

$$\varphi_3 = -1,7 = -97,4°$$

Problema 62. En el circuito de la figura el potencial eficaz en bornes del alternador es 206 V y $\omega = 560$ rad/s, si $[Z_1] = 1,5i\ \Omega$, $[Z_2] = -2i\ \Omega$ y $[Z_3] = 2 + 2i\ \Omega$. Calcular:

1. La impedancia equivalente del circuito y ángulo desenfase.
2. Las expresiones de la I y el V en la línea.
3. La tensión en bornas de cada impedancia.
4. La intensidad en cada una de las dos derivaciones.



Problema XXXI-62

Solución

1)

$$[Y_2] = \frac{1}{2} i = \frac{1}{2} e^{i\pi/2}\ \Omega^{-1}$$

$$[Y_3] = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} i = 0,35 e^{-i\pi/4}\ \Omega^{-1}$$

$$[Y'] = [Y_2] + [Y_3] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\ \Omega^{-1}$$

$$[Z'] = \frac{1}{[Y']} = 2 - 2i = 2,83 e^{-i\pi/4}$$

$$[Z] = [Z_1] + [Z'] = 2 - \frac{1}{2} i = 2,06 e^{-i\,0,24} \Rightarrow \boxed{Z = 2,06\ \Omega} \quad \boxed{\varphi = -0,24 \text{ rad}}$$

luego la intensidad está «adelantada» en fase respecto del potencial.

2) Tomaremos:

$$\boxed{V = V_e \cos\omega t = 206 \cos 500t} \Rightarrow \bar{V} = 206 \text{ V}$$

entonces:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{[Z]} = \frac{206}{2,06 e^{-i\,0,24}} = 100 e^{0,24\,i} \Rightarrow \boxed{I = 100 \cos(500t + 0,24)}$$

3)

$$\bar{V}_1 = \bar{I}[Z_1] = 100 e^{i\,0,24}\, 1,5 e^{i\pi/2} = 150 e^{i(\pi/2 + 0,24)} \Rightarrow \boxed{V_1 = 150 \cos(500t + \pi/2 + 0,24)}$$

$$\bar{V}' = \bar{V}_2' = \bar{V}_3' = \bar{I}[Z'] = 283 e^{i(0,24 - \pi/4)} \Rightarrow \boxed{V' = V_1 = V_2 = 283 \cos(500t - \pi/4 + 0,24)}$$

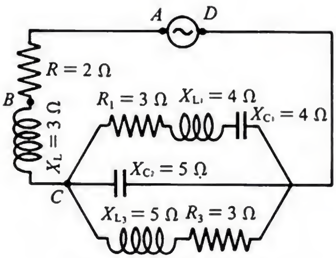
4)

$$\bar{I}_2 = \bar{V}'[Y_2] = 141,5 e^{i(\pi/4 + 0,24)} \Rightarrow \boxed{I_2 = 141,5 \cos(500t + \pi/4 + 0,24)}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{V}'[Y_3] = 100 e^{i(0,24 - \pi/2)} \Rightarrow \boxed{I_3 = 100 \cos(500t - \pi/2 + 0,24)}$$

Problema 63. En el circuito de la figura el generador de corriente alterna tiene una FEM de 100 V eficaces y una frecuencia de 50 Hz, y su impedancia es despreciable. Determínese:

1. La impedancia equivalente del sistema.
2. La intensidad que circula por el circuito general.
3. Las expresiones de V_{AB}, V_{BC} y V_{CD}.
4. Las intensidades que circulan por cada derivación.



Problema XXXI-63

Solución

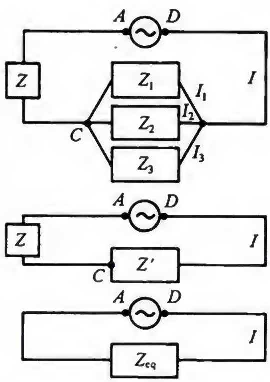
1) De las figuras deducimos:

$$[Z] = 2 + 3i\ \Omega$$

$$[Z_1] = 3 + i\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Y_1] = \frac{1}{[Z_1]} = \frac{3 - i}{10}\ \Omega^{-1} = 0{,}316e^{-0{,}322\,i}$$

$$[Z_2] = -5i\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Y_2] = \frac{1}{[Z_2]} = \frac{1}{5}\,i\ \Omega^{-1} = 0{,}200e^{i\,\pi/2}$$

$$[Z_3] = 3 + 4i\ \Omega \quad \Rightarrow \quad [Y_3] = \frac{1}{[Z_3]} = \frac{3 - 4i}{25}\ \Omega^{-1} = 1{,}000e^{-0{,}927\,i}$$



Problema XXXI-63-1.ª

$$[Y'] = [Y_1] + [Y_2] + [Y_3] = \frac{21 - 3i}{50}\ \Omega^{-1}$$

$$[Z'] = \frac{1}{[Y']} = \frac{7 + i}{3} = 2{,}357e^{0{,}142\,i}$$

$$[Z_{eq}] = [Z] + [Z'] = \frac{1}{3}(13 + 10i) = 5{,}467e^{0{,}656\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{eq} = 5{,}467\ \Omega} \quad \varphi = 0{,}656\ \text{rad}$$

luego la intensidad está «retrasada» en fase con respecto al potencial en el alternador.

2) Siendo $\bar{V} = 100e^{0i}$, por aplicación de la ley de Ohm se obtiene:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}}{[Z_{eq}]} = \frac{100}{5{,}467}e^{-0{,}656\,i} = 18{,}292e^{-0{,}656\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = 18{,}292\cos(100\pi t - 0{,}656)}$$

3)

$$\boxed{\bar{V}_{AB} = IR = 36{,}584\cos(100\pi t - 0{,}656)}$$

$$\bar{V}_{BC} = \bar{I}3i = 18{,}292e^{-0{,}656\,i}\,3e^{i\,\pi/2} = 54{,}876e^{0{,}915\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{V}_{BC} = 54{,}876\cos(100\pi t + 0{,}915)}$$

$$\bar{V}_{CD} = \bar{I}\,[Z'] = 18{,}292e^{-0{,}656\,i}\,2{,}357e^{0{,}142\,i} = 43{,}114e^{-0{,}514\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{V}_{CD} = 43{,}114\cos(100\pi t - 0{,}514)}$$

4)

$$\bar{I}_1 = \bar{V}_{CD}\,[Y_1] = 43{,}114e^{-0{,}514}\,0{,}316e^{-0{,}322\,i} = 13{,}624e^{-0{,}836} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_1 = 13{,}624\cos(100\pi t - 0{,}836)}$$

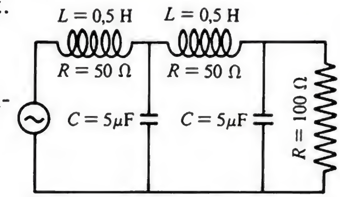
$$\bar{I}_2 = \bar{V}_{CD}\,[Y_2] = 43{,}114e^{-0{,}514}\,0{,}200e^{i\,\pi/2} = 8{,}623e^{1{,}057} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_2 = 8{,}623\cos(100\pi t + 1{,}057)}$$

$$\bar{I}_3 = \bar{V}_{CD}\,[Y_3] = 43{,}114e^{-0{,}514}\,e^{-0{,}927\,i} = 43{,}114e^{-1{,}441\,i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_3 = 43{,}114\cos(100\pi t - 1{,}441)}$$

Problema 64. El potencial proporcionado por el alternador de la figura viene dado por: $V_{\mathrm{AB}} = 220 \cos 200t$ expresado en el SI y en función de su valor eficaz. Determinar:

1. La impedancia equivalente.

2. Las expresiones de las intensidades que circulan por cada una de las impedancias representadas en la figura.



Problema XXXI-64

Solución

1) En las figuras:

$$[Z_1] = [Z_2] = 50 + 100i\ \Omega$$

$$[Z_3] = 100\ \Omega \ \Rightarrow\ [Y_3] = \frac{1}{100}\ \Omega^{-1}$$

$$[Z_4] = [Z_5] = -10^3 i\ \Omega = 10^3 e^{-1{,}571\,\mathrm{i}}\ \Omega \ \Rightarrow\ [Y_4] = [Y_5] = \frac{1}{10^3}\, i\ \Omega^{-1}$$

$$[Y'] = [Y_3] + [Y_4] = \frac{10 + i}{10^3}\ \Omega^{-1} \ \Rightarrow\ [Z'] = \frac{10^3(10 - i)}{101} = 99{,}504 e^{-0{,}100\,\mathrm{i}}\ \Omega$$

$$[Z''] = [Z'] + [Z_2] = 149{,}010 + 90{,}099i = 174{,}132 e^{0{,}544\,\mathrm{i}}\ \Omega \ \Rightarrow$$

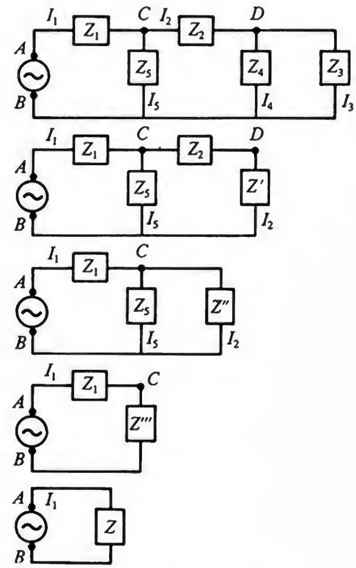
$$[Y''] = \frac{1}{[Z'']} = \frac{149{,}010 - 90{,}099i}{30\,321{,}810}\ \Omega^{-1}$$

$$[Y'''] = [Y''] + [Y_5] = \frac{10^3\ 149{,}010 - 59\,777{,}190i}{10^3\ 30\,321{,}810}\ \Omega^{-1} \ \Rightarrow$$

$$[Z'''] = \frac{1}{[Y''']} = 175{,}280 + 70{,}316i = 188{,}858 e^{0{,}381\,\mathrm{i}}\ \Omega$$

$$[Z] = [Z'''] + [Z_1] = 225{,}280 + 170{,}316i = 282{,}416 e^{0{,}647\,\mathrm{i}}\ \Omega$$

$$\boxed{Z = 282{,}416\ \Omega} \qquad \varphi = 0{,}647\ \mathrm{rad}$$



Problema XXXI-64-1.ª

2) Como $\bar{V} = 220 e^{0\,\mathrm{i}}$ V, entonces:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}}{[Z]} = \frac{220}{282{,}416} e^{-0{,}647\,\mathrm{i}} = 0{,}779 e^{-0{,}647\,\mathrm{i}}\ \mathrm{A} \ \Rightarrow\ \boxed{I_1 = 0{,}779 \cos(200t - 0{,}647)\ \mathrm{A}}$$

$$\bar{V}_{\mathrm{CB}} = \bar{I}_1 [Z'''] = 147{,}120 e^{-0{,}266\,\mathrm{i}}\ \mathrm{V} \ \Rightarrow\ \bar{I}_2 = \frac{\bar{V}_{\mathrm{CB}}}{[Z'']} = 0{,}845 e^{-0{,}810\,\mathrm{i}}\ \mathrm{A}$$

$$\boxed{I_2 = 0{,}845 \cos(200t - 0{,}810)\ \mathrm{A}}$$

$$\bar{I}_5 = \frac{\bar{V}_{\mathrm{CB}}}{[Z_5]} = 0{,}147 e^{1{,}305\,\mathrm{i}}\ \mathrm{A} \ \Rightarrow\ \boxed{I_5 = 0{,}147 \cos(200t + 1{,}305)\ \mathrm{A}}$$

$$\bar{V}_{\mathrm{DB}} = \bar{I}_2 [Z'] = 84{,}081 e^{-0{,}910\,\mathrm{i}}\ \mathrm{V} \ \Rightarrow\ \bar{I}_3 = \frac{\bar{V}_{\mathrm{DB}}}{[Z_3]} = 0{,}841 e^{-0{,}910\,\mathrm{i}}\ \mathrm{A}$$

$$\boxed{I_3 = 0{,}841 \cos(200t - 0{,}910)\ \mathrm{A}}$$

$$\bar{I}_4 = \frac{\bar{V}_{\mathrm{DB}}}{[Z_4]} = 0{,}084 e^{0{,}661\,\mathrm{i}}\ \mathrm{A} \ \Rightarrow\ \boxed{I_4 = 0{,}084 \cos(200t + 0{,}661)\ \mathrm{A}}$$

D) MAQUINAS ELECTRICAS. TRANSFORMADORES

FORMULARIO

TRANSFORMADORES:

«Son aparatos destinados a variar la tensión y la intensidad de las corrientes alternas.» Para un transformador ideal, en el que las pérdidas son nulas (despreciables), la potencia al primario es igual a la potencia en el secundario, de forma que el producto de la intensidad por el voltaje permanece constante:

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

siendo la razón del voltaje igual a la razón del número de espiras:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Problema 65. Un motor de 2 CV de potencia funciona con una corriente de intensidad 2,94 A durante 5 h. Calcular:

1. La fuerza contraelectromotriz del motor.

2. El costo de la energía eléctrica que hace funcionar al motor, suponiendo que el precio de 1 kW · h es 6 ptas.

Solución

$$P = 2 \text{ CV} = 150 \text{ kgm/s} = 1\,470 \text{ W} = 1{,}47 \text{ kW}$$

1) La energía que hace funcionar a un motor es:

$$W = \varepsilon' I t$$

y la potencia:

$$P = \frac{W}{t} = \varepsilon' I \quad \Rightarrow \boxed{\varepsilon' = \frac{P}{I} = \frac{1\,470}{2{,}94} = 500 \text{ V}}$$

2) Como funciona 5 h, el consumo será:

$$W = 1{,}47 \times 5 = 7{,}35 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Como el kW · h cuesta a 6 ptas, el precio de lo consumido será:

$$\boxed{C = 7{,}35 \times 6 = 44{,}10 \text{ ptas}}$$

(Independientemente de la energía disipada en forma de calor = I^2Rt.)

Problema 66. Un salto de agua de un caudal de 500 l/s y de una altura de 10 m mueve una turbina acoplada a una dinamo. Esta suministra la energía eléctrica a una fábrica, en la que existen 98 bombillas de 100 W. Calcular los CV de que se dispone para el movimiento de los motores de la fábrica. El rendimiento industrial se supone de un 60 %.

Solución

La potencia del salto es:

$$P = 500 \times 10 = 5\,000 \text{ kgm/s} = 49\,000 \text{ W}$$

Como el rendimiento en la transformación es del 60 %, nos quedará disponible una potencia de:

$$P = 49\,000 \times 0{,}6 = 29\,400 \text{ W}$$

Como las bombillas consumen:

$$P = 98 \times 100 = 9\,800 \text{ W}$$

los motores consumirán:

$$P = 29\,400 - 9\,800 = 19\,600 \text{ W}$$

Para expresarlo en CV habrá que dividir por 9,8 × 75, y tendremos:

$$\boxed{P = \frac{19\,600}{75 \times 9{,}8} = 26\ 67 \text{ CV}}$$

Problema 67. Plantear los transformadores necesarios para conducir la energía producida en una central (220 V) por líneas de alta tensión (300 000 V) y luego reducir tal tensión a 120 V para su utilización.

Solución

A la salida de la central habrá que realizar una transformación elevando la tensión, por medio de un transformador en el que la relación de espira de inducido e inductor debe ser:

$$\frac{n'_1}{n_1} = \frac{300\,000}{220} = 1\,364$$

Para reducir la tensión de 300 000 a 120 V la relación de espiras entre inductor e inducido debe ser:

$$\frac{n_2}{n'_2} = \frac{300\,000}{120} = 2\,500$$

Problema 68. En un transformador reductor que funciona con 88 kV y 2 A proporciona energía eléctrica a un voltaje de 220 V. Calcular:
1. La relación entre las espiras del primario y el secundario.
2. La corriente que circula por la línea de salida.

Solución

1)

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{88\,000}{220} = 400}$$

2)

$$I_1V_1 = I_2V_2 \quad \Rightarrow \quad 88\,000 \times 2 = 220 I_2 \quad \Rightarrow \boxed{I_2 = 800 \text{ A}}$$

Problema 69. Un transformador elevador maneja en el primario 220 V y produce en el secundario 2 A. Si la razón entre el número de vueltas del primario y el secundario es 10^{-2}, calcular:
1. El voltaje del secundario.

2. La intensidad en el primario.
3. La potencia generada.

Solución

1) y 2)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{220}{V_2} = \frac{2}{I_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{V_2 = 22\,000 \text{ V} = 22 \text{ kV}} \\ \boxed{I_1 = 200 \text{ A}} \end{cases}$$

3)

$$\boxed{P = V_1 I_1 = V_2 I_2 = 22\,000 \times 2 \text{ W} = 44 \text{ kW}}$$

Problema 70. Una casa de campo precisa de 18 kW y toma la corriente de una red de alta tensión a 15 kV. Los aparatos instalados en la casa funcionan a 220 V. El transformador que nos reduce tal tensión tiene un rendimiento del 90 % y su primario precisa, por lo menos, de una espira por cada 0,5 mA. Calcular:
1. Intensidad al primario y al secundario.
2. El número de espiras que deben tener las dos bobinas del transformador.

Solución

1) Como el rendimiento $\eta = 0{,}9$, la potencia al primario será:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_2}{\eta} = \frac{18}{0{,}9} = 20 \text{ kV} \\ P_1 &= V_1 I_1 \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{P_1}{V_1} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \text{ A}}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{P_2}{V_2} = \eta \frac{P_1}{V_2} = \frac{900}{11} \simeq 82 \text{ A}}$$

2)

$$\boxed{n_1 = \frac{4 \times 10^3}{3 \times 0{,}5} \simeq 2\,667 \text{ espiras}}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \boxed{n_2 = n_1 \frac{V_2}{V_1} = 2\,667 \frac{220}{15\,000} \simeq 40 \text{ espiras}}$$

Problema 71. El rendimiento de un transformador elevador es del 90 % y la razón entre el número de vueltas del primario y secundario es 1/25. Si la tensión alterna del primario es de 110 V suministrando una corriente de 2 A, calcular:
1. La corriente en el primario.
2. El voltaje en el secundario.

Solución

1) En el transformador ideal de las mismas características:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{25} \Rightarrow I_1 = 25 I_2 = 50 \text{ A}$$

si tenemos en cuenta el rendimiento, la corriente en el primario tendrá que ser:

$$\boxed{I_1 = \frac{50}{0{,}9} = 55{,}56 \text{ A}}$$

2)

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{25} \Rightarrow \boxed{V_2 = 25 V_1 = 2\,750 \text{ V}}$$

Capítulo XXXII

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

FORMULARIO

DESCARGA OSCILANTE DE UN CONDENSADOR:

a) *Circuito LC (circuito con resistencia despreciable):*

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} Q = Q_0 \cos 2\pi\nu t \\ \\ I = -\dfrac{dQ}{dt} = Q 2\pi\nu \operatorname{sen} 2\pi\nu t = I_0 \operatorname{sen} 2\pi\nu t \end{array} \right.$$

$$T = \frac{1}{\nu} = 2\pi \sqrt{LC}$$

b) *Circuito RCL:*

$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \Rightarrow \quad R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}$$

DISTRIBUCIÓN DE LA ENERGÍA ENTRE C Y L:

$$U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E'^2 + \frac{1}{2\mu} B'^2 = \frac{1}{2\mu} B^2$$

Problema 1. En un circuito hay intercalada una autoinducción de 5 H y un condensador de 20 μF. Calcular:
1. El límite superior de resistencia para que se produzca una descarga oscilante.
2. Suponiendo que el circuito tiene resistencia nula, ¿cuál será el período de la descarga oscilante?

Solución

1) La condición para que se produzca descarga oscilante es:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Sustituyendo valores en el segundo miembro de la desigualdad, tenemos:

$$\boxed{R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 5 \times 10^6}{20}} = 1\,000\ \Omega}$$

2)

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{5 \times 20 \times 10^{-6}} = 2\pi 10^{-2}\ \text{s}}$$

Problema 2. ¿Qué autoinducción debe tener un circuito en el que hay intercalado un condensador de 1 μF de capacidad para que se produzca en él una descarga oscilante de 1,6 kc/s de frecuencia? ¿Cuál es la resistencia máxima para la producción de la descarga oscilante?

Solución

Como la frecuencia es 1,6 kc/s = 1 600 Hz, el período será:

$$T = \frac{1}{1\,600}\ \text{s}$$

1) Aplicando la fórmula del período en la descarga oscilante:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow \boxed{L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{10^6}{4\pi^2 1\,600^2} = 0{,}01\ \text{H}}$$

2)

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}01}{10^{-6}}} = 200\ \Omega \Leftrightarrow \boxed{R < 200\ \Omega}$$

Problema 3. En un circuito de cobre (ρ = 0,018 Ω mm^2/m) de 100 m de longitud y 1,8 mm^2 de sección están intercaladas un condensador de 100 μF y una bobina de 0,01 H de autoinducción.

1. ¿Podrán producirse corrientes oscilantes?

2. En caso afirmativo, ¿cuál es su frecuencia?

Solución

1)

$$R = \rho\frac{l}{A} \Rightarrow R = 0{,}018\frac{100}{1{,}8} = 1\ \Omega$$

Para producirse descargas oscilantes tiene que verificarse:

$$R < \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Sustituyendo valores en el segundo miembro:

$$\sqrt{\frac{4L}{C}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}01}{\frac{100}{10^6}}} = 20\ \Omega$$

$$\boxed{\text{La descarga oscilante es posible.}}$$

2) Su período vendrá dado por la fórmula:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi\sqrt{10^{-2} \times 10^{-4}} = 2\pi 10^{-3}\ \text{s} \Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{10^3}{2\pi}\ \text{Hz}}$$

Problema 4. Se desean producir unas ondas electromagnéticas de 1 km de longitud de onda en el vacío. Se dispone de un circuito de 10^{-3} H de autoinducción; calcular la capacidad que se debe intercalar en el circuito oscilante.

Solución

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad\qquad \lambda = cT$$

$$\frac{\lambda}{c} = 2\pi\sqrt{LC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2c^2L} = \frac{1\,000^2}{4\pi^2(3\times10^8)^2\,10^{-3}}\ \mathrm{F} \simeq 3\times10^{-4}\ \mu\mathrm{F}}$$

Problema 5. Calcular la capacidad que se tiene que intercalar en el circuito oscilante de un receptor de radio que posee una autoinducción de 10^{-4} H, cuando se utiliza para sintonizar una emisora de onda corta cuya longitud de onda emitida por ésta es de 10 m.

Solución

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{10} = 3\times10^7\ \mathrm{Hz} = 30\ \mathrm{MHz}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{1}{4\pi^2\nu^2L} = \frac{1}{4\pi^2 9\times10^{14}\times10^{-4}}\ \mathrm{F} \simeq 0{,}28\ \mathrm{pF}}$$

Problema 6. Un condensador de 2 μF se carga a una tensión de 220 V, se desconecta de la fuente de alimentación y se conectan sus armaduras a una bobina de resistencia despreciable y de 5×10^{-3} H. Calcular la intensidad de la corriente máxima que circula por la bobina.

Solución

1.^{er} MÉTODO:

$$\left.\begin{array}{l} Q = Q_0\cos 2\pi\nu t \\ I = -\dfrac{dQ}{dt} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad I = Q_0 2\pi\nu\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu t = I_0\,\mathrm{sen}\,2\pi\nu t$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = Q_0 2\pi\nu \\ Q_0 = CV_0 \\ \nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_0 = V_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 220\sqrt{\frac{2\times10^{-6}}{5\times10^{-3}}} = 4{,}4\ \mathrm{A}}$$

2.º MÉTODO: Considerando las transformaciones energéticas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{Q_0^2}{C} = \dfrac{1}{2}LI_0^2 \\ Q_0 = V_0C \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_0 = V_0\sqrt{\frac{C}{L}} = 4{,}4\ \mathrm{A}}$$

Problema 7. Un condensador de 2 μF, cargado con $\sqrt{2} \times 10^{-3}$ C, se conecta a una autoinducción de resistencia despreciable y de 10^{-2} H. Calcular:

1. La frecuencia de la descarga oscilante.

2. La carga del condensador cuando la energía en el condensador y en la autoinducción son iguales.

3. Tiempo que se necesita para que ocurra esta última condición.

Solución

1)

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-2}\,2 \times 10^{-6}}} \simeq 1\,125 \text{ Hz}}$$

2) La energía máxima almacenada en el condensador es:

$$U_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$$

llamando Q a la carga del condensador cuando ésta energía está compartida en partes iguales entre el condensador y la autoinducción, la energía de éste será:

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

como la condición pedida es:

$$U = \frac{1}{2}U_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{2C} \quad\Rightarrow\quad \boxed{Q = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} = 10^{-3}\text{ C}}$$

3) Como:

$$Q = Q_0\cos 2\pi\nu t = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \cos 2\pi\nu t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad\Rightarrow$$

$$2\pi\nu t = \frac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \boxed{t = \frac{1}{8\nu} = 1{,}11 \times 10^{-4}\text{ s}}$$

Problema 8. Un condensador de 4×10^{-2} μF se carga a una tensión de 500 V, se desconecta de la fuente de alimentación y se une a una bobina de 0,1 H y 1 000 Ω de resistencia. Calcular:

1. La frecuencia de la oscilación del circuito.

2. La máxima intensidad de corriente que lo recorre.

3. Tiempo que tarda el condensador en reducir su carga a la tercera parte de su valor inicial.

Solución

1)

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{0{,}1 \times 4 \times 10^{-8}} - \frac{10^6}{4 \times 10^{-2}}} = \frac{3 \times 10^4}{4\pi}\text{ Hz} \simeq 2\,387{,}3 \text{ Hz}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} I_0 = 2\pi\nu Q_0 \\ Q_0 = CV_0 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{I_0 = 2\pi\frac{3 \times 10^4}{4\pi}\,500 \times 4 \times 10^{-8} = 0{,}3 \text{ A}}$$

3)

$$Q = Q_0\cos 2\pi\nu t = \frac{Q_0}{3} \quad\Rightarrow\quad \cos 2\pi\nu t = \frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 2\pi\nu t = \text{arcos}\,\frac{1}{3}$$

$$\boxed{t = \frac{\text{arcos}\,\dfrac{1}{3}}{2\pi\,\dfrac{3\times 10^4}{4\pi}} = 82\times 10^{-6}\ \text{s}}$$

Problema 9. Una onda electromagnética plana (polarizada) tiene una amplitud de 3 V/m y una frecuencia de 1 MHz. Determínese la ecuación de la onda que representa al campo eléctrico.

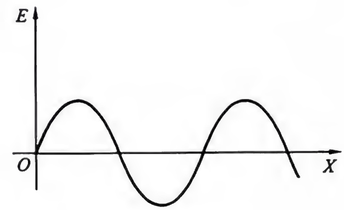
Solución

La ecuación de una onda plana:

$$E = E_0 \,\text{sen}\, 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

como:

$$\left.\begin{aligned} E_0 &= 3\ \text{V/m} \\ T &= \frac{1}{\nu} = \frac{1}{10^6}\ \text{s} = 10^{-6}\ \text{s} \\ \lambda &= cT = 3\times 10^8\ 10^{-6} = 300\ \text{m} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{E = 3\,\text{sen}\left(\frac{x}{300} - 10^6 t\right)\ \text{V/m}}$$



Problema XXXII-9

Capítulo XXXIII

PROPAGACION DE LA LUZ. REFLEXION Y REFRACCION

FORMULARIO

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DE LA LUZ EN EL VACÍO:

$$c_0 = 300\,000 \text{ km/s}$$

REFLEXIÓN DE LA LUZ. LEYES:

1.ª El rayo incidente, el reflejado y el normal están en un mismo plano.
2.ª El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales:

$$\varepsilon = \varepsilon'$$

REFRACCIÓN DE LA LUZ. LEYES:

1.ª La normal, el rayo incidente y el refractado están en un mismo plano.
2.ª La relación entre los senos de los ángulos de incidencia y refracción es una cantidad constante, llamada INDICE DE REFRACCION del segundo medio (al que llega la luz) con relación al primero:

$$\frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\operatorname{sen} \varepsilon'} = n$$

INDICE DE REFRACCIÓN:

1) Absoluto: $$n = \frac{c_0}{c}$$

2) Relativo: $$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}$$

La fórmula de la refracción la escribiremos:

$$n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

CAMINO ÓPTICO:

$$C = \sum_i n_i s_i$$

ANGULO LÍMITE:

$$\varepsilon_2 = 90^\circ \qquad \operatorname{sen} l = \frac{n_2}{n_1}$$

Problema 1. Un foco luminoso en forma de disco de 2 cm de diámetro está situado a 20 cm de una lámina cuadrada opaca de 20 cm de lado. Determínese el ancho de la sombra y penumbra, formadas en una pantalla a 20 cm de la lámina, teniendo todo el sistema un eje perpendicular.

Solución

1)

$$\frac{SA}{40 + x_1} = \frac{10}{20 + x_1} = \frac{1}{x_1} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{20}{9} \text{ cm} \\ SA = 19 \text{ cm} \end{array} \right.$$

La sombra es un cuadrado cuyo lado es:

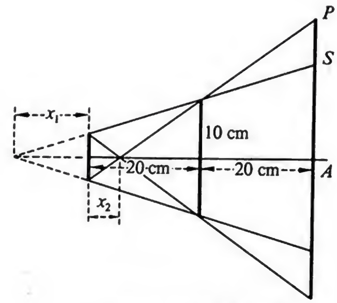
$$\boxed{l_s = 2SA = 38 \text{ cm}}$$

2)

$$\frac{PA}{40 - x_2} = \frac{10}{20 - x_2} = \frac{1}{x_2} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \dfrac{20}{11} \text{ cm} \\ PA = 21 \text{ cm} \end{array} \right.$$

La penumbra es un cuadrado cuyo lado es:

$$\boxed{l_p = 2PA = 42 \text{ cm}}$$



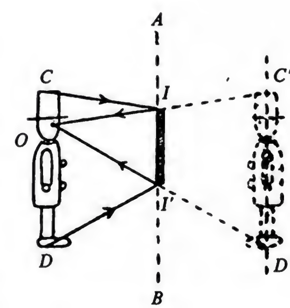
Problema XXXIII-1

Problema 2. ¿Cuál es la altura mínima de un espejo plano para que una persona se vea en él de cuerpo entero?

Solución

Sea la superficie pulimentada del espejo AB. La imagen del señor CD será el «señor virtual» $C'D'$, simétrico al primero respecto al plano AB.
Para que el ojo del observador (O) perciba el extremo C' es necesario que reciba un rayo de luz que sale del espejo como si procediese de C'; es el rayo IO (rayo reflejado que corresponde al incidente CI). Para ver la imagen de los pies es necesario que reciba el ojo el rayo $I'O$ (rayo reflejado que corresponde al incidente DI').
II' es, por lo tanto, la altura mínima del espejo, que, al ser la paralela media (por la simetría de la figura), en el triángulo $OC'D'$ es la mitad de $C'D'$; por lo tanto, la mitad de CD.

> *La altura mínima de un espejo para que un observador se vea de cuerpo entero ha de ser la mitad de la altura del observador.*



Problema XXXIII-2

Problema 3. **1.** En el interior de un automóvil parado observamos por el espejo retrovisor (plano) otro automóvil que por detrás se acerca a nosotros; la velocidad de este último es de 30 km/h. ¿A qué velocidad vemos que se acerca su imagen?
2. El coche que se acercaba en el apartado anterior se ha parado y nuestro automóvil emprende la marcha. ¿A qué velocidad se aleja la imagen del coche parado formada en el espejo retrovisor si nuestra velocidad es de 60 km/h?
3. Ahora marcha nuestro automóvil a 60 km/h y el que está detrás a 30 km/h, siguiéndonos. ¿A qué velocidad se aleja la imagen del coche que miramos por el espejo retrovisor?

Solución

1) $\boxed{\text{A } 30 \text{ km/h.}}$

2) $\boxed{\text{A } 120 \text{ km/h,}}$ puesto que al desplazarse el espejo una longitud d, la imagen se desplaza $2d$.

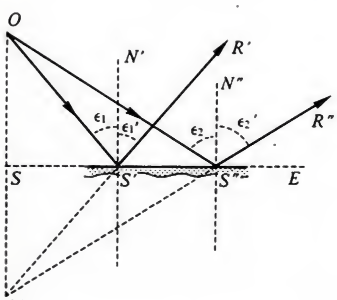
3) Nuestro automóvil se aleja del que nos sigue a una velocidad de:

$$60 - 30 = 30 \text{ km/h}$$

La velocidad con que se aleja la imagen es:

$$\boxed{2 \times 30 = 60 \text{ km/h}}$$

Problema 4. Demostrar geométricamente que un espejo plano es un sistema estigmático.

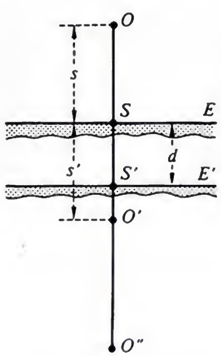


Problema XXXIII-4

Solución

Se pretende demostrar que la imagen del punto O (figura) es siempre O', verificándose que $OS = O'S$, siendo OO' perpendicular a la superficie del espejo.
En efecto: consideremos dos rayos cualesquiera (OS' y OS'') que se reflejan en el espejo E, produciendo los rayos reflejados $S'R'$ y $S''R''$, cuyas prolongaciones se reúnen en O' (imagen virtual). Los triángulos $OS'S''$ y $O'S'S''$ son iguales, por tener $S'S''$ común y los ángulos contiguos a él iguales. (Los ángulos de vértice S' son $90° + \varepsilon_1$ y $90° + \varepsilon_1'$; los de vértice S'' son $90° - \varepsilon_2$ y $90° - \varepsilon_2'$.) Uniendo O con O', por un segmento recto, se habrán formado los triángulos OSS' y $O'SS'$ iguales, por tener el lado $OS' = O'S'$ (igualdad de los anteriores triángulos), el lado SS' común y los ángulos de vértice S' iguales ($90° - \varepsilon_1 = 90° - \varepsilon_1'$). Por tanto, $OS = O'S$ y los ángulos OSS' y $O'SS'$ serán rectos, por ser adyacentes iguales. Con ello hemos demostrado la simetría de O y O' con respecto a E.
Como la demostración anterior es válida para cualquier pareja de rayos, hemos demostrado el estigmatismo de un espejo plano.

Problema 5. Demostrar que al mover un espejo plano paralelamente a sí mismo la imagen de un punto se desplaza el doble que el desplazamiento del espejo.



Problema XXXIII-5

Solución

En efecto: un punto O (figura) forma en el espejo E una imagen O' ($OS = O'S = s$). Desplacemos el espejo paralelamente a sí mismo hasta la posición E', es decir, una distancia $SS' = d$. La imagen de O se formará en el punto O'' ($OS' = O''S'$).
En la figura se observa que:

$$OS' = s + d \qquad O''S' = s' - d + O'O''$$

Por igualación de estas expresiones, obtenemos:

$$s + d = s - d + O'O'' \Rightarrow \boxed{O'O'' = 2d} \qquad \text{c.q.d.}$$

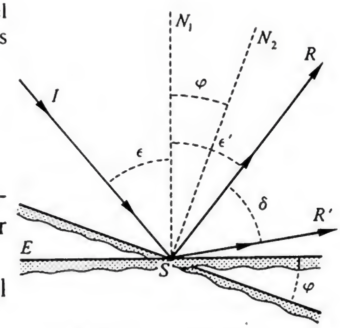
Problema 6. Demostrar que al girar un espejo en torno a un eje perpendicular al plano de incidencia el rayo reflejado gira doble que el espejo.

Solución

En efecto: el rayo IS (figura) se refleja en E, en la dirección SR, formando con la normal —N_1— los ángulos ε y ε' iguales.

Al girar el espejo un ángulo φ la normal gira el mismo ángulo, pasando a la posición N_2; el nuevo ángulo de incidencia es $\varepsilon + \varphi$; el nuevo ángulo de reflexión es $\varepsilon' - \varphi + \delta$; como ambos deben ser iguales, se verifica:

$$\varepsilon + \varphi = \varepsilon' - \varphi + \delta \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\varphi + \delta \quad \Rightarrow \boxed{2\varphi = \delta} \qquad \text{c.q.d.}$$



Problema XXXIII-6

Problema 7. **1.** El diamante tiene un índice de refracción muy elevado —aproximadamente 2,5—. Calcular la velocidad de propagación de la luz en el interior del diamante.
2. La velocidad de propagación de la luz en el agua es 225 563 km/s. Calcular el índice de refracción del agua.

Solución

1)

$$n = \frac{c}{v} \quad \Rightarrow \boxed{v = \frac{c}{n} = \frac{300\,000}{2{,}5} = 120\,000 \text{ km/s}}$$

2)

$$\boxed{n = \frac{c}{v} = \frac{300\,000}{225\,536} = 1{,}33}$$

Problema 8. Un rayo de luz incide, formando un ángulo de 40° con la normal, sobre la superficie plana de separación de dos medios de índices de refracción 1,3 y 1,5. Determínense los ángulos de refracción según que el rayo proceda de uno u otro medio.

Solución

$$n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 1{,}3 \\ \varepsilon_1 = 40° \\ n_2 = 1{,}5 \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon_2 = \frac{1{,}3}{1{,}5} \operatorname{sen} 40° \quad \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 33°51'}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 1{,}5 \\ \varepsilon_1 = 40° \\ n^2 = 1{,}3 \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{sen} \varepsilon_2 = \frac{1{,}5}{1{,}3} \operatorname{sen} 40° \quad \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 47°52'}$$

Problema 9. Calcular el ángulo límite entre el diamante ($n_1 = 2{,}5$) y el vidrio ($n_2 = 1{,}5$).

Solución

$$n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

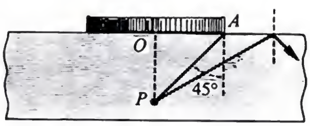
$$\varepsilon_2 = 90° \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 = l \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} l = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \boxed{l = 36°52'}$$

Problema 10. Calcular el índice de refracción de una sustancia con relación al aire, sabiendo que su ángulo límite es de 30°.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} n\,\text{sen}\,\varepsilon = n'\,\text{sen}\,\varepsilon' \\[2ex] \varepsilon' = 90 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = l \end{array}\right| \quad \begin{array}{c} n > n' \\ \Rightarrow \quad \text{sen}\,l = \dfrac{n'}{n} = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 2} \end{array}$$

Problema 11. El ángulo límite que corresponde a la refracción entre el aire y el hielo es de 45°. ¿Cuál debe ser el radio de un disco para que, colocado sobre un bloque de hielo, no permita ver una burbuja situada dentro de éste y a 10 cm de la superficie?



Problema XXXIII-11

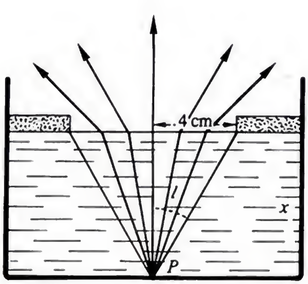
Solución

Todos los rayos que parten de P (burbuja) y que llegan a la superficie con un ángulo mayor de 45° sufren la reflexión total y, por tanto, no pueden ser recibidos por el ojo del observador. El radio del disco que no permite ver P es OA. Al ser el ángulo OAP = 45°, el triángulo POA es isósceles; por tanto:

$$\boxed{PO = OA = 10 \text{ cm}}$$

Problema 12. Sobre la superficie de un líquido contenido en un vaso colocamos una superficie flotante opaca que cubre por completo a la del líquido. La superficie opaca tiene un orificio circular de radio 4 cm. En el fondo del vaso se ha colocado un pequeño objeto P, en la vertical que pasa por el centro del orificio. Calcular hasta qué altura se debe llenar el vaso para que el objeto se vea desde cualquier posición exterior a través del orificio. El índice de refracción del líquido con respecto al aire es 2.

Solución



Problema XXXIII-12

Para que el punto P se vea desde cualquier posición desde el aire es necesario que salgan del orificio rayos de luz en todas las direcciones, y, por tanto, los que llegan a los bordes del orificio deben emerger rasantes a la superficie. Para ello es necesario que el ángulo de incidencia de estos rayos extremos sea el «límite», y por tanto:

$$\text{sen}\,l = \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l = 30°$$

Se habrá formado, así, un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura x que queremos calcular y el radio del orificio (4 cm); la tangente del ángulo límite es así:

$$\text{tag}\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4\sqrt{3}\text{ cm}}$$

Problema 13. Basándonos en el principio de Fermat, demostrar las leyes de la reflexión de la luz.

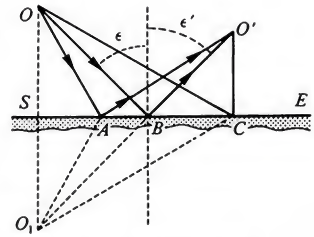
Solución

Supongamos un punto O, una superficie reflectora y otro punto O'. Tracemos el punto O_1, simétrico de O con respecto al plano reflector. De todos los caminos geométricos posibles de luz ($OAO' = O_1AO'$; $OBO' = O_1BO'$; $OCO' = O_1CO'$), el más corto es el $OBO' = O_1BO'$, ya que esta última distancia es el segmento recto que une O_1 y O'; OBO' es, por tanto, el camino real de luz. La igualdad de triángulos rectángulos OSB y O_1SV nos indica que:

$$OBS = O_1BS \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \varepsilon'$$

Cualquier camino que hubiese salido del plano del papel (plano que pasa por O y O' y es normal al espejo) y que después de reflejarse en el espejo, pasase por O', hubiese recorrido mayor camino que OBO'.

Queda demostrado así que OB, la normal NB y $O'B$ están en el mismo plano y la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión.



Problema XXXIII-13

Problema 14. Basándonos en el principio de Fermat, demostrar las leyes de la refracción de la luz.

Solución

Supongamos dos puntos O_1 y O_2 a un lado y otro de una superficie de separación de dos medios distintos (1) y (2). El camino que recorre la luz para ir de O_1 a O_2 es $O_1S'O_2$; si la velocidad de la luz en los medios es v_1 y v_2, el tiempo que emplea la luz en su trayecto de O_1 a O_2 es:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{O_1S'}{v_1} + \frac{O_2S'}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

derivado con respecto a x:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{2x}{2v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{2v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$$

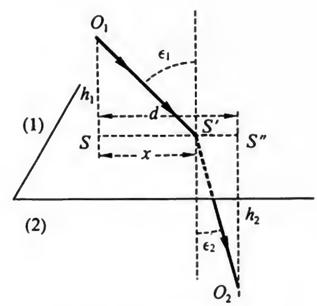
Como para que el tiempo sea mínimo la derivada debe ser nula, tendremos:

$$\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{d-x}{v_2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}}$$

o sea:

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_2}{v_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\varepsilon_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2}$$

quedando demostrada la ley de la refracción.

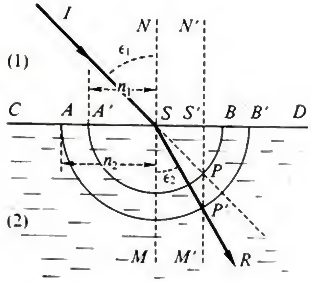


Problema XXXIII-14

Problema 15. Construir geométricamente el rayo refractado de un rayo de luz incidente en la superficie plana de separación entre dos medios de índices n_1 y n_2.

Solución

Sea CD (figura) la superficie de separación de dos medios de índices de refracción n_1 y n_2, IS es el rayo incidente. Se trata de trazar el rayo refractado conocidos n_1, n_2 y la dirección de incidencia.



Problema XXXIII-15

Con centro en S y con radios SA' y SA, respectivamente iguales a n_1 y n_2, se trazan dos circunferencias. Por el punto P (intersección de la prolongación del rayo incidente y la circunferencia de radio n_1) se traza una paralela a la normal NM. El punto en que esta recta —$N'M'$— corta a la circunferencia de radio n_2 (punto P'), unido con S, determina el rayo refractado SR. En efecto: el ángulo de incidencia ε_1 es igual al SPS' por correspondientes; su seno es (triángulo SPS'):

$$\operatorname{sen}\varepsilon_1 = \frac{SS'}{SP}$$

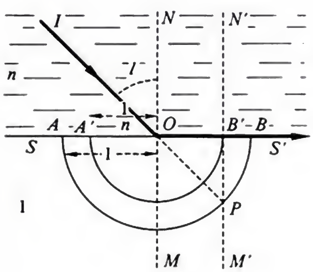
El ángulo ε_2 (que queremos demostrar es el de refracción) es igual a $SP'S'$ por alternos internos; su seno es (triángulo $SP'S'$):

$$\operatorname{sen}\varepsilon_2 = \frac{SS'}{SP'}$$

El cociente de los dos senos es:

$$\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\varepsilon_2} = \frac{SP'}{SP} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad n_2 \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen}\varepsilon_2$$

Por cumplirse las leyes de la refracción, SR es el rayo refractado.



Problema XXXIII-16

Problema 16. Construir gráficamente el ángulo límite de una sustancia, conocido su índice de refracción —n— con relación al aire.

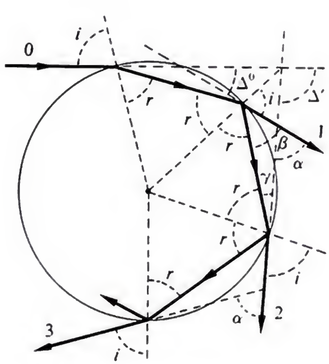
Solución

Se traza una superficie plana de separación del aire y del medio considerado. Por un punto cualquiera —O— se trazan dos semicircunferencias de radios 1 y $1/n$, respectivamente. Por B' (punto en que la circunferencia de radio $1/n$ corta a la superficie) se traza la normal $N'M'$. El punto P en que $N'M'$ corta a la circunferencia de radio 1 se une con O. El ángulo NOI es el ángulo límite, ya que el rayo refractado, OB, forma con la normal un ángulo de 90°.

Problema 17. Un rayo de luz monocromática entra en una esfera homogénea transparente de índice de refracción $n = 4/3$. Después de sufrir p reflexiones, emerge en la dirección R. Calcular:

1. La desviación Δ final experimentada por el rayo.

2. La expresión que da la variación de Δ con el ángulo de incidencia i.



Problema XXXIII-17

Solución

1) La desviación entre los rayos 0 y 1 es Δ°, que por ser exterior de un triángulo es la suma de los dos interiores no adyacentes:

$$\Delta^\circ = (i - r) + (i - r)$$

La desviación entre los rayos 0 y 2 será la que hay entre 0 y 1 más la que se produce entre 1 y 2 (α en la figura):

$$\Delta' = \Delta'' + \alpha$$

La desviación entre 0 y 3 será la que hay entre 0 y 2, más la que hay entre 2 y 3, que es α.

$$\Delta'' = \Delta' + \alpha = \Delta^\circ + 2\alpha$$

En general, después de p reflexiones será:

$$\boxed{\Delta^p = \Delta^0 + p\alpha}$$

Al ser α exterior de un triángulo, valdrá:

$$\alpha = \beta + \gamma = (180 - i - r) + (i - r) = 180 - 2r$$

Luego:

$$\Delta^{p} = \Delta^{0} + p(180 - 2r) = 2(i - r) + p(180 - 2r)$$

2)

$$\Delta^{p} = 2i - 2r + 180p - 2pr$$

derivando:

$$\frac{d\Delta^{p}}{di} = 2 - 2\frac{dr}{di} - 2p\frac{dr}{di} = 2 - 2\frac{dr}{di}(1 + p)$$

$$\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \quad \Rightarrow \quad \cos i = n \cos r \frac{dr}{di}$$

$$\frac{dr}{di} = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 r}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 i}{n^2 - n^2 \operatorname{sen}^2 r}}\ \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 i}{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}$$

y sustituyendo:

$$\boxed{\frac{d\Delta^{p}}{di} = 2 - 2(1 + p)\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}^2 i}{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}}$$

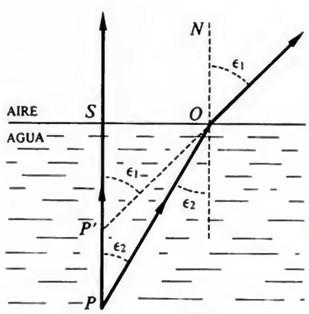
Capítulo XXXIV

DIOPTRIOS - PRISMAS - ESPEJOS

A) DIOPTRIO PLANO. LAMINAS PLANOPARALELAS

FORMULARIO

DIOPTRIO PLANO: $$\frac{n_1}{s_1} = \frac{n_2}{s_2}$$



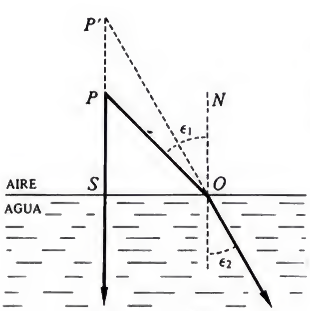
Problema XXXIV-1

Problema 1. Un muchacho que no sabe nadar observa que, a lo sumo, la profundidad de un lago es de 1,5 m. Como es prudente y sabe Física, tomó la precaución antes de bañarse de medir la profundidad introduciendo una caña hasta tocar el fondo; hecho esto, decidió no bañarse. ¿Por qué? (Indice de refracción del agua con respecto al aire = 1,33.)

Solución

La distancia del fondo del lago a la superficie es:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{PO}{1{,}5} = \frac{1{,}33}{1} \Rightarrow \boxed{PO \simeq 2 \text{ m}}$$



Problema XXXIV-2

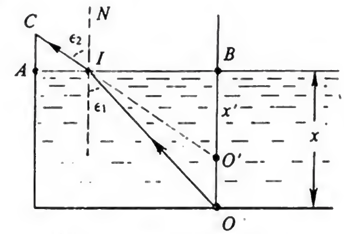
Problema 2. Un buzo observa normalmente a la superficie de un lago y desde dentro del agua un avión que pasa a 200 m sobre dicha superficie. ¿A qué distancia ve el avión?

Solución

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{200}{P'O} = \frac{1}{1{,}33} \Rightarrow \boxed{P'O = 266 \text{ m}}$$

Problema 3. Un foco puntual está sumergido a una profundidad desconocida x en un lago y en un punto a 18 m de la orilla. Un observador, cuyo ojo está a 1,5 m del suelo en el borde del lago, desplaza lentamente su mirada partiendo de

la orilla y observa que el primer rayo que emerge del agua se encuentra a 6 m de dicha orilla. Si el índice de refracción del agua es 4/3, ¿a qué profundidad está sumergido el foco luminoso?



Problema XXXIV-3

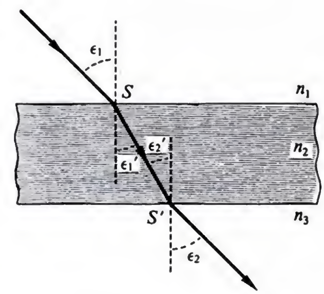
Solución

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{4}{3}}{x} = \frac{1}{x'}$$

Por ser:

$$CAI \sim O'IB \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{IB} = \frac{AC}{AI} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{AC}{AI}\,IB = \frac{1{,}5}{6}\,12 = 3\text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{4}{3}\,x' = 4\text{ m}}$$

Problema 4. Demostrar que al atravesar un rayo de luz una lámina de vidrio de caras planas y paralelas «el rayo emergente es paralelo al incidente si los medios, en contacto con las caras de la lámina, son idénticos».



Problema XXXIV-4

Solución

Supongamos un rayo de luz que atraviesa una lámina de vidrio de caras paralelas, limitadas por medio de índices de refracción n_1, n_2 y n_3, se habrá de cumplir:

$$n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen} \varepsilon_1' \qquad n_2 \operatorname{sen} \varepsilon_2' = n_3 \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

pero como $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ (alternos internos), se cumple:

$$n_1 \operatorname{sen} \varepsilon_1 = n_3 \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

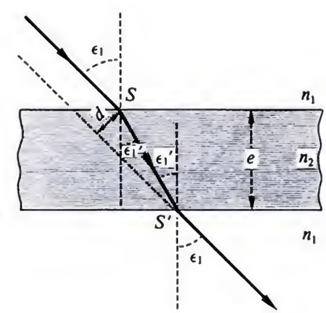
Si los medios exteriores en contacto con las caras son idénticos (aire, por ejemplo), al ser:

$$n_1 = n_3 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \varepsilon_1 = \operatorname{sen} \varepsilon_2$$

y, puesto que los ángulos son agudos:

$$\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$$

Problema 5. Calcular el desplazamiento que sufre un rayo de luz al atravesar una lámina de vidrio de caras planas y paralelas cuando los medios en contacto con las caras de la lámina son idénticos. DATOS: e: espesor de la lámina. ε_1: ángulo de incidencia. n_2: índice de refracción del vidrio. n_1: índice de refracción del medio en contacto con las caras.



Problema XXXIV-5

Solución

De la figura se obtiene:

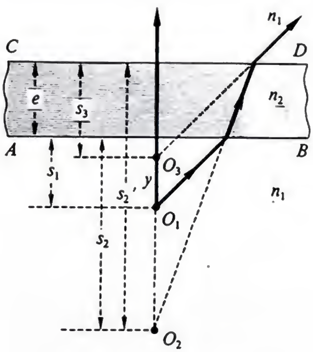
$$d = SS' \operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1') = \frac{e}{\cos \varepsilon_1'} \operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1')$$

y teniendo en cuenta la ley de la refracción ($n_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen}\varepsilon_1'$), se obtiene:

$$d = e\,\frac{\operatorname{sen}\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1' - \cos\varepsilon_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1'}{\cos\varepsilon_1'} = e \operatorname{sen}\varepsilon_1\,\frac{n_2 \cos\varepsilon_1' - n_1 \cos\varepsilon_1}{n_2 \cos\varepsilon_1'} =$$

$$= e \operatorname{sen}\varepsilon_1\,\frac{n_2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varepsilon_1'} - n_1\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varepsilon_1}}{n_2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varepsilon_1'}} = e \operatorname{sen}\varepsilon_1\,\frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2\varepsilon_1} - \sqrt{n_1^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2\varepsilon_1}}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2\varepsilon_1}} =$$

$$\boxed{d = e \operatorname{sen}\varepsilon_1 \left[1 - \sqrt{\frac{n_1^2 - n_1^2 \operatorname{sen}\varepsilon_1}{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2\varepsilon_1}}\right]}$$



Problema XXXIV-6

Problema 6. Demostrar que al intercalar una lámina de caras planoparalelas entre los rayos de luz que van a formar una imagen, ésta sufre un desplazamiento: $y = e(1 - n_1/n_2)$, siendo e el espesor de la lámina, n_1 el índice del medio que está en contacto con las caras de la lámina y n_2 el índice del medio que forma la lámina.

Solución

Observemos un punto O_1 a través de una lámina de caras planas y paralelas, realizando la visión normalmente a sus caras; los medios en contacto con las caras son idénticos. La imagen del punto objeto O_1 en el dioptrio AB cumple la condición:

$$\frac{s_1}{n_1} = \frac{s_2}{n_2}$$

el punto O_2 hace de objeto con respecto al dioptrio CD, verificándose:

$$\frac{s_2'}{n_2} = \frac{s_3}{n_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{s_2 + e}{n_2} = \frac{s_3}{n_1}$$

sustituyendo en esta última el valor de s_2/n_2, obtenemos:

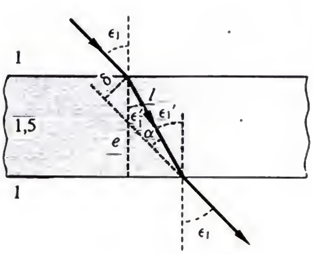
$$\frac{s_1}{n_1} + \frac{e}{n_2} = \frac{s_3}{n_1} \quad\Rightarrow\quad s_3 = s_1 + e\,\frac{n_1}{n_2}$$

La imagen se ha desplazado la distancia $O_1O_3(y)$, cuyo valor es:

$$y = s_1 + e - s_3 = s_1 + e - s_1 - e\,\frac{n_1}{n_2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y = e\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

Si el medio que está en contacto con las caras de la lámina es aire, se hace $n_1 = 1$ en las anteriores fórmulas, y se obtiene:

$$y = e\,\frac{n-1}{n}$$



Problema XXXIV-7

Problema 7. A una lámina de caras planas y paralelas de índice de refracción igual a 1,5 llega un rayo con un ángulo de incidencia de 45°. El espesor de la lámina es de 10 cm. Calcular el desplazamiento lateral del rayo incidente.

Solución

$$n_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n_2 \operatorname{sen}\varepsilon_1' \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen} 45 = 1{,}5 \operatorname{sen}\varepsilon_1' \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\varepsilon_1' = \frac{\sqrt{2}}{2 \times 1{,}5} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

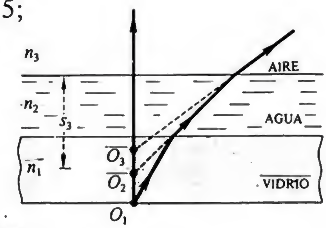
$$\cos\varepsilon_1' = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\varepsilon_1'} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\delta = l \operatorname{sen}\alpha = \frac{e}{\cos\varepsilon_1'} \operatorname{sen}(\varepsilon_1 - \varepsilon_1') = \frac{e}{\cos\varepsilon_1'}\,(\operatorname{sen}\varepsilon_1 \cos\varepsilon_1' - \cos\varepsilon_1 \operatorname{sen}\varepsilon_1')$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{\delta = \frac{10 \times 3}{\sqrt{7}} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{3} \right] = 3{,}3 \text{ cm}}$$

Problema 8. Un vaso de vidrio es de fondo grueso (2 cm) y está lleno de agua, siendo la altura de ésta 5 cm. Determinar la posición de la imagen de una mancha de tinta que se ha hecho en la cara inferior del fondo del vaso ($n_{\text{vidrio}} = 1{,}5$; $n_{\text{agua}} = 1{,}33$).



Problema XXXIV-8

Solución

$$\frac{s_1}{n_1} = \frac{s_2}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{1{,}5} = \frac{s_2}{1{,}33} \quad \Rightarrow \quad s_2 = 1{,}77 \text{ cm}$$

La imagen en el dioptrio «vidrio-agua» está situada a 1,77 + 5 = 6,77 cm de la superficie del agua; luego:

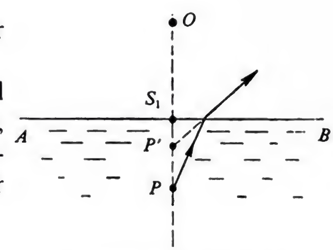
$$\frac{6{,}77}{1{,}33} = \frac{s_3}{1} \quad \Rightarrow \quad s_3 = 5{,}1 \text{ cm}$$

La imagen es virtual y a 5,1 cm por debajo de la superficie del agua.

Problema 9. Un estanque contiene agua cuya superficie es AB. En una misma vertical OP se hallan: en O, a 1,20 m por encima de AB, el ojo de un observador; en P, a 0,80 m por debajo de AB, el ojo de un pez.

1. ¿El observador y el pez se ven separados por la misma distancia OP? Calcular estas distancias aparentes.

2. El fondo del estanque está formado por un espejo plano horizontal CD. El espesor de la capa de agua por encima del espejo es de 1,20 m. El observador, permaneciendo en la misma posición O, se mira en el espejo CD. ¿A qué distancia ve su imagen? ¿En qué sentido y cuánto se desplaza ella cuando se hace vaciar toda el agua del estanque?

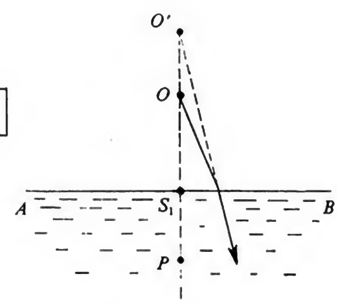


Problema XXXIV-9-1.ª

Solución

1) El observador ve al pez a la distancia aparente (fig. 1.ª):

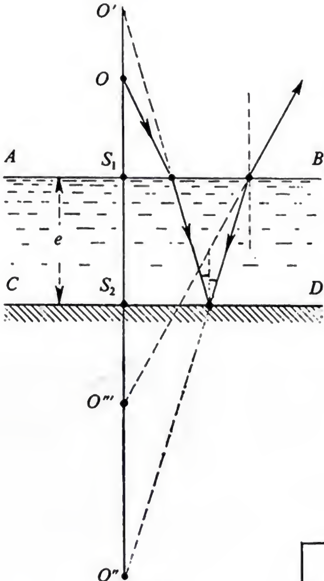
$$\left.\begin{aligned} &OP' = OS_1 + S_1P' \\ &\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{4/3}{0{,}8} = \frac{1}{S_1P'} \quad \Rightarrow \quad S_1P' = 0{,}6 \text{ m} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{OP' = 1{,}2 + 0{,}6 = 1{,}8 \text{ m}}$$



Problema XXXIV-9-2.ª

El pez ve al observador a la distancia aparente (fig. 2.ª):

$$\left.\begin{aligned} &PO' = PS_1 + S_1O' \\ &\frac{1}{1{,}2} = \frac{4/3}{S_1O'} \quad \Rightarrow \quad S_1O' = 1{,}6 \text{ m} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{PO' = 0{,}8 + 1{,}6 = 2{,}4 \text{ m}}$$



Problema XXXIV-9-3.ª

2) El observador se ve según la figura 3.ª en O'''. Calculamos su posición obteniendo primero O'' (que hará de objeto), imagen de O a través de dioptrio y espejo, y a continuación calculamos la posición de O''', que es la imagen de O'' a través del dioptrio.

$$\frac{n}{OS_1} = \frac{n'}{O'S_1} \quad \Rightarrow \quad O'S_1 = \frac{n'}{n}\, OS_1 = \frac{4}{3}\, 1{,}2 = 1{,}6 \text{ m}$$

$$O'S_2 = O'S_1 + e = 1{,}6 + 1{,}2 = 2{,}8 \text{ m} = O''S_2$$

$$O''S_1 = O''S_2 + e = 2{,}8 + 1{,}2 = 4 \text{ m}$$

$$\frac{4/3}{4} = \frac{1}{S_1O'''} \quad \Rightarrow \quad S_1O''' = 3 \text{ m}$$

luego:

$$\boxed{OO''' = OS_1 + S_1O''' = 1{,}2 + 3 = 4{,}2 \text{ m}}$$

$\boxed{\textit{se aleja.}}$

B) PRISMA OPTICO

FORMULARIO

ANGULO DE REFRINGENCIA:

$$\alpha = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$$

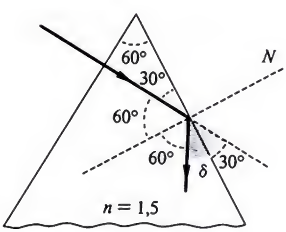
ANGULO DE DESVIACIÓN:

$$\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha$$

esta desviación es mínima cuando:

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2' \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \Rightarrow \quad \delta_m = 2\varepsilon_1 - \alpha$$

Problema 10. Un prisma óptico de ángulo de refringencia 60° y cuyo índice de refracción es 1,5 recibe un rayo de luz perpendicularmente a una de sus caras. Determinar el ángulo de desviación.



Problema XXXIV-10

Solución

Calculemos el valor del ángulo límite para ver si puede haber refracción en la segunda cara del prisma:

$$\operatorname{sen} l = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66 \quad \Rightarrow \quad l = 41°48'$$

Como el ángulo de incidencia en la segunda cara es mayor que el ángulo límite, no habrá refracción, sino *reflexión* total y la marcha de los rayos será la de la figura:

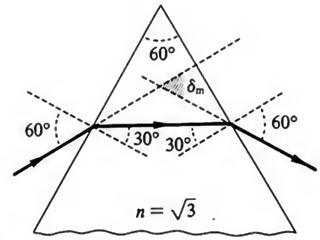
$$\delta = 30° + 30° = 60°$$

Problema 11. ¿Cuál es el ángulo de desviación mínima de un prisma equilátero cuyo índice de refracción es $\sqrt{3}$? Represéntese en un diafragma la trayectoria de un rayo que atraviesa dicho prisma en las condiciones de desviación mínima.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n\operatorname{sen}\varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_1 = 30° \\ n = \sqrt{3} \end{array}\right| \Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varepsilon_1 = 60°$$

$$\boxed{\delta_m = 2\varepsilon_1 - \alpha = 120 - 60 = 60°}$$



Problema XXXIV-11

Problema 12. Determinar el índice de refracción de un prisma cuyo ángulo de refringencia es 30°, sabiendo que el ángulo de mínima desviación es 16°.

Solución

Sabiendo que el ángulo de mínima desviación es el que corresponde a un rayo tal que en el interior del prisma se desplaza perpendicularmente al plano bisector del prisma y que su valor es:

$$\delta_m = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha$$

y teniendo en cuenta que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\delta_m + \alpha}{2}$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{\alpha}{2}$$

aplicando la ley de la refracción, nos queda:

$$\operatorname{sen}\frac{\delta_m + \alpha}{2} = n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{n = \frac{\operatorname{sen}\frac{16° + 30°}{2}}{\operatorname{sen}\frac{30°}{2}} = \frac{\operatorname{sen}23°}{\operatorname{sen}15°} = 1{,}5}$$

Problema 13. Tenemos un prisma de vidrio (índice de refracción $n = \sqrt{2}$) cuyo ángulo es de 60°; en una de sus caras incide un rayo formando un ángulo de 45°, siendo la dirección del mismo hacia el vértice. Determinar:

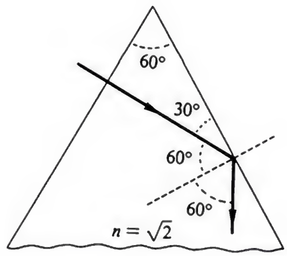
1. Angulo de refracción (en el interior del prisma).
2. Valor del ángulo de emergencia.
3. Angulo de mínima desviación.
4. Dibujar la marcha de la luz en el caso de que el rayo incida normalmente a una cara.

Solución

1)

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\varepsilon_1 = n\operatorname{sen}\varepsilon'_1 \\ \varepsilon_1 = 45° \\ n = \sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\varepsilon'_1 \Rightarrow \operatorname{sen}\varepsilon'_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon'_1 = 30°}$$

al ser 30° el ángulo de refracción en el interior del prisma y 60° el ángulo del prisma $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2$ y precisamente este rayo es el de mínima desviación, por ser perpendicular al plano bisector.



Problema XXXIV-13

2)

$$\left.\begin{array}{l} n \operatorname{sen} \varepsilon_2' = \operatorname{sen} \varepsilon_2 \\ n = \sqrt{2} \\ \varepsilon_2' = 30^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} \varepsilon_2 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_2 = 45^\circ}$$

3)

$$\boxed{\delta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \alpha = 30^\circ}$$

4) Calculemos el valor del ángulo límite para ver si puede existir reflexión total:

$$\operatorname{sen} l = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow l = 45^\circ$$

La luz, en este caso, verifica el fenómeno de reflexión total.

C) DIOPTRIO ESFERICO

FORMULARIO

FÓRMULA (INVARIANTE DE ABBE):

$$n\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right] = n'\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right]$$

FOCOS:

$$f' = r\frac{n'}{n' - n} \qquad f = -r\frac{n}{n' - n}$$

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'} \qquad \frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \qquad ff' = zz'$$

AUMENTO LATERAL:

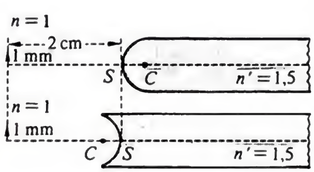
$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}\frac{f'}{f} = \frac{s'}{s}\frac{n}{n'}$$

AUMENTO ANGULAR:

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{s}{s'} = -\frac{1}{\beta}\frac{f}{f'} = \frac{1}{\beta}\frac{n}{n'}$$

INVARIANTE DE HELMOLTZ:

$$ny\sigma = n'y'\sigma'$$



Problema XXXIV-14

Problema 14. Determinar las distancias focales de los dioptrios esféricos de la figura, de radio 5 cm, y averiguar la posición y tamaño de la imagen del objeto que se indica. ¿Cuántas dp tienen ambos sistemas? El medio exterior a la varilla es aire; la varilla es de vidrio ($n = 1{,}5$).

Solución

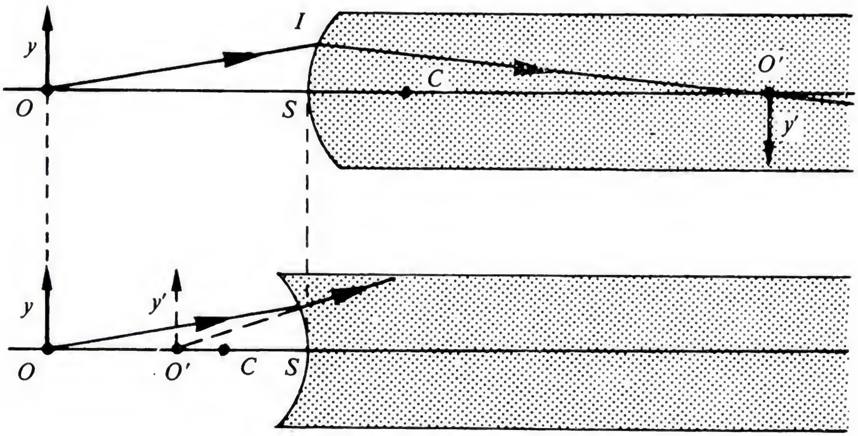
1)

$$f' = r\,\frac{n'}{n'-n} \qquad f = -r\,\frac{n}{n'-n} \qquad \left|\; \begin{aligned} r &= 5 \text{ cm} \\ n &= 1 \\ n' &= 1{,}5 \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{f' = 5\,\frac{1{,}5}{1{,}5-1} = 15 \text{ cm}} \qquad \boxed{f = -5\,\frac{1}{1{,}5-1} = -10 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}15} = 6{,}67 \text{ dp}}$$

$$\frac{n}{r} - \frac{n}{s} = \frac{n'}{r} - \frac{n'}{s'} \;\Rightarrow\; \frac{1}{5} - \frac{1}{-20} = \frac{1{,}5}{5} - \frac{1{,}5}{s'} \;\Rightarrow\; \boxed{s' = 30 \text{ cm}}$$



Problema XXXIV-14-1.ª

$$\beta = \frac{s'}{s}\,\frac{n}{n'} = \frac{30}{-20}\,\frac{1}{1{,}5} = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{y' = -1 \text{ mm}}$$

2)

$$\left. \begin{aligned} r &= -5 \text{ cm} \\ n &= 1 \\ n' &= 1{,}5 \end{aligned} \;\right| \qquad \boxed{f' = -5\,\frac{1{,}5}{1{,}5-1} = -15 \text{ cm}} \qquad \boxed{f = 5\,\frac{1}{1{,}5-1} = 10 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0{,}15} = -6{,}66 \text{ dp}}$$

$$\frac{1}{-5} - \frac{1}{-20} = \frac{1{,}5}{-5} - \frac{1{,}5}{s'} \;\Rightarrow\; \boxed{s' = -10 \text{ cm}}$$

$$\beta = \frac{s'}{s}\,\frac{n}{n'} = \frac{-10}{-20}\,\frac{1}{1{,}5} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \boxed{y' = \frac{1}{3} \text{ mm}}$$

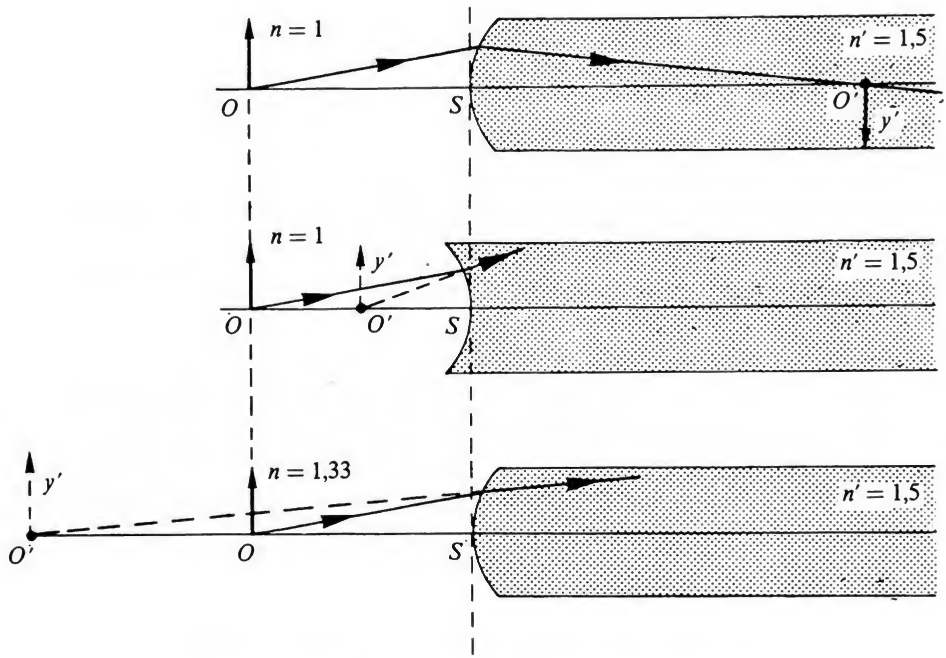
Problema 15. Una larga y recta varilla de vidrio, de índice de refracción $n = 1{,}5$, termina por un extremo en una cara esférica convexa de radio 8 cm. **1.** Calcular la posición y el tamaño de la imagen que esa cara produce de una

flechita luminosa de 4 mm colocada de pie sobre el eje, en el aire, a 20 cm del vértice.

2. Lo mismo, en el caso de que la cara fuese cóncava y de la misma curvatura.

3. Lo mismo que en el caso 1), suponiendo que la varilla y la flecha están sumergidas en agua ($n = 1{,}33$).

Solución



Problema XXXIV-15

$$n\left[\frac{1}{r} = \frac{1}{s}\right] = n'\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right]$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}\,\frac{n}{n'}$$

1)

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \\ n' = 1{,}5 \\ r = 8 \text{ cm} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{-20} = \dfrac{1{,}5}{8} - \dfrac{1{,}5}{s'} \Rightarrow \boxed{s' = 120 \text{ cm}} \\[2ex] \dfrac{y'}{4} = \dfrac{120}{-20}\,\dfrac{1}{1{,}5} \Rightarrow \boxed{y' = -\ 16 \text{ mm}} \end{array}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} n = 1 \\ n' = 1{,}5 \\ r = -\ 8 \text{ cm} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{-8} - \dfrac{1}{-20} = \dfrac{1{,}5}{-8} - \dfrac{1{,}5}{s'} \Rightarrow \boxed{s' = -\ 13{,}33 \text{ cm}} \\[2ex] \dfrac{y'}{4} = \dfrac{-13{,}33}{-20}\,\dfrac{1}{1{,}5} \Rightarrow \boxed{y' = 1{,}77 \text{ mm}} \end{array}$$

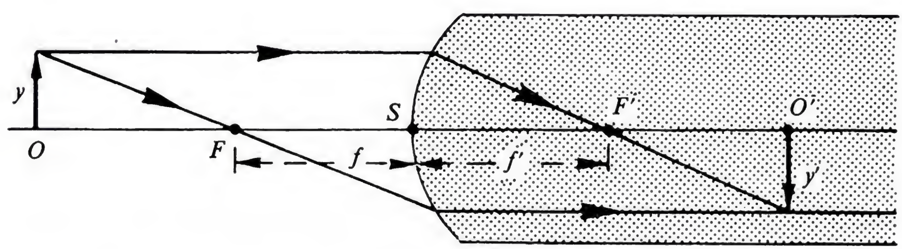
3)

$$\left.\begin{array}{l} n = 1{,}33 \\ n' = 1{,}5 \\ r = -8 \text{ cm} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1{,}33}{8} - \dfrac{1{,}33}{-20} = \dfrac{1{,}5}{8} - \dfrac{1{,}5}{s'} \quad \Rightarrow \boxed{s' = -33 \text{ cm}} \\ \dfrac{y'}{4} = \dfrac{-33}{-20}\,\dfrac{1{,}33}{1{,}50} \quad \Rightarrow \boxed{y' = 5{,}85 \text{ mm}} \end{array}$$

Problema 16. Un tubo de vidrio lleno de agua (índice de refracción: 4/3) está cerrado por un extremo con una superficie esférica de vidrio delgadísimo de 20 cm de radio, que separa el agua del aire, y de manera que su convexidad mira hacia el aire; se desea saber:

1. La distancia focal imagen de dicho dioptrio esférico.
2. Su distancia focal objeto.
3. La distancia en donde se formará la imagen de un objeto situado en el aire perpendicular al eje principal y a 1 m del vértice del dioptrio.
4. La naturaleza de la imagen.
5. Sabiendo que el objeto es de 10 cm de altura, calcular el tamaño de la imagen.
6. Dibujar un esquema de la marcha de los rayos.

Solución



Problema XXXIV-16

1)

$$f' = r\,\frac{n'}{n'-n} \quad \left|\begin{array}{l} r = 20 \text{ cm} \\ n = 1 \\ n' = \dfrac{4}{3} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{f' = 20\,\dfrac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{4}{3}-1} = 80 \text{ cm}}$$

2)

$$f = -r\,\frac{n}{n'-n} = -20\,\frac{1}{\dfrac{4}{3}-1} \text{ cm} \quad \Rightarrow \boxed{f = -60 \text{ cm}}$$

3) y 4)

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-60}{-100} + \frac{80}{s'} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{s' = 200 \text{ cm}}$$

La imagen es real.

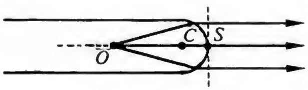
5)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s}\,\frac{n}{n'} = \frac{200}{-100}\,\frac{1}{4/3} = -1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = 10(-1{,}5) = -15 \text{ cm}}$$

Imagen invertida respecto al objeto.

Problema 17. Una varilla cilíndrica de vidrio, de índice de refracción 1,5 y de radio 2 cm, termina por uno de sus extremos en una semiesfera de igual radio. En el eje del cilindro y a 6 cm del polo de la esfera hay dentro del vidrio una pequeña burbuja de aire de 0,2 mm de diámetro. Determinar:

1. Posición de la imagen que se forma de la burbuja.
2. Tamaño aparente de la misma.
3. Dibújese un esquema explicando cómo se forma dicha imagen.



Problema XXXIV-17

Solución

$$\left.\begin{array}{l} n = 1{,}5 \\ n' = 1 \\ r = -2 \text{ cm} \\ s = -6 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1{,}5}{-2} - \frac{1{,}5}{-6} = \frac{1}{-2} - \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{s' = \infty}$$

La burbuja está en el foco objeto del dioptrio:

$$\beta' = \frac{s'}{s}\,\frac{n}{n'} = \frac{\infty}{-6}\,\frac{1{,}5}{1} = -\infty$$

la varilla vista por un extremo parecerá hueca.

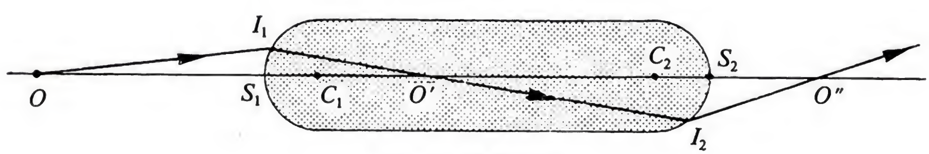
Problema 18. Una varilla de vidrio de 1 cm de diámetro termina en dos semiesferas convexas miradas desde el exterior. En el eje de la varilla y a 10 cm del polo de uno de los dioptrios hay un pequeño objeto de 1 mm de altura. Determinar la posición de la imagen final, mirando a través de la varilla y en la dirección de su eje y el tamaño de la imagen. La distancia entre polo y polo es 11,66 cm ($n = 1{,}5$).

Solución

$$n\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right] = n'\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{-10} = \frac{1{,}5}{0{,}5} - \frac{1{,}5}{s'_1} \Rightarrow s'_1 = 1{,}66 \text{ cm}$$

Tal imagen se forma a $11{,}66 - 1{,}66 = 10$ cm delante del polo del segundo dioptrio:

$$\frac{1{,}5}{-0{,}5} - \frac{1{,}5}{-10} = \frac{1}{-0{,}5} - \frac{1}{s'_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s'_2 = 1{,}18 \text{ cm}}$$



Problema XXXIV-18

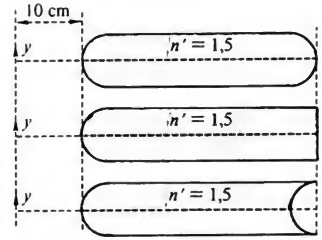
La imagen es real y a 1,18 cm del polo del segundo dioptrio:

$$\left.\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{s'_1}{s_1}\frac{n_1}{n'_1} = \frac{1{,}66}{-10}\,\frac{1}{1{,}5}\\ \beta_2 &= \frac{s'_2}{s_2}\frac{n_2}{n'_2} = \frac{1{,}18}{-10}\,\frac{1{,}5}{1}\end{aligned}\right|\ \Rightarrow\ \beta = \beta_1\beta_2 = \frac{1{,}66 \times 1{,}18}{10 \times 10} = 0{,}02$$

$$\boxed{y' = 0{,}02y = 0{,}02 \text{ mm}}$$

Imagen real y derecha.

Problema 19. Los cuerpos cilíndricos de la figura, terminados por caras esféricas o planas, son de vidrio ($n = 1{,}5$). El medio exterior es aire y el radio de los dioptrios esféricos es 5 cm. Determinar la posición de la imagen que se obtiene del objeto indicado en la figura, en cada uno de los casos.



Problema XXXIV-19

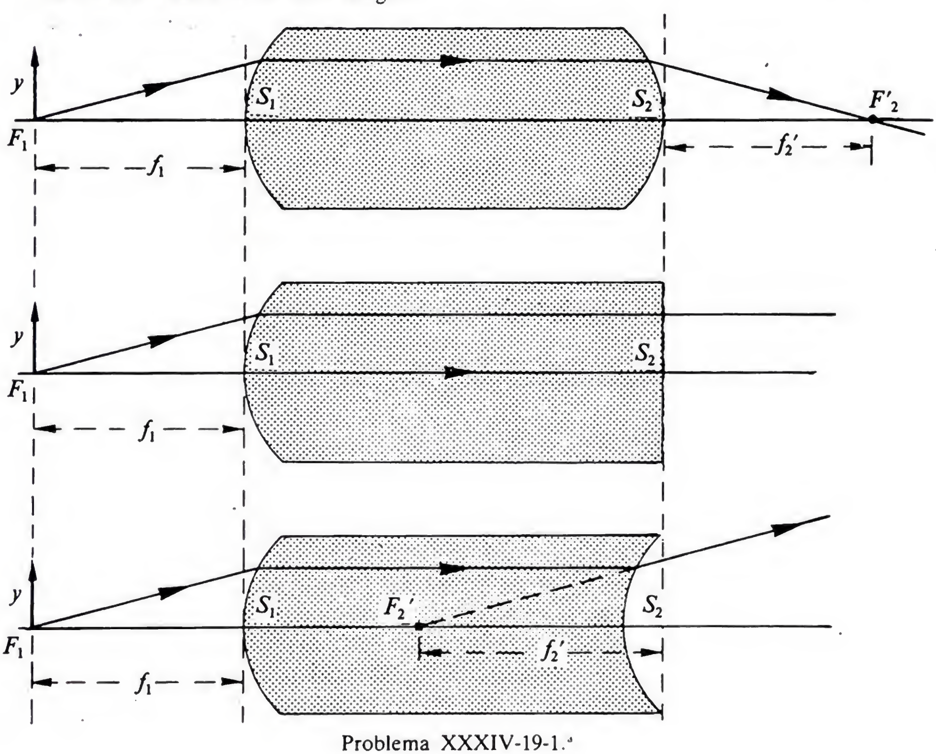
Solución

$$\boxed{n\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right] = n'\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right]}$$

En todos los casos se verifica:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{-10} = \frac{1{,}5}{5} - \frac{1{,}5}{s'} \ \Rightarrow\ \frac{1{,}5}{s'} = 0 \ \Rightarrow\ s' = \infty$$

El objeto está colocado en el foco objeto del primer dioptrio. La imagen en el segundo dioptrio estará situada en su foco imagen.



Problema XXXIV-19-1.

1)

$$f_2 = r_2 \frac{n'_2}{n'_2 - n_2} \quad \left| \begin{array}{l} r_2 = -5 \text{ cm} \\ n'_2 = 1 \\ n_2 = 1{,}5 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{f_2 = -5 \frac{1}{1 - 1{,}5} = 10 \text{ cm}}$$

La imagen definitiva estará situada a 10 cm a la derecha del polo del segundo dioptrio (imagen real).

2)

$$r_2 = \infty \quad \Rightarrow \boxed{f_2 = \infty}$$

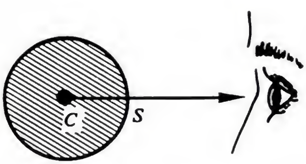
La imagen se sitúa en el infinito.

3)

$$f_2 = r_2 \frac{n'_2}{n'_2 - n_2} \quad \left| \begin{array}{l} r_2 = 5 \text{ cm} \\ n'_2 = 1 \\ n_2 = 1{,}5 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{f_2 = -5 \frac{1}{1 - 1{,}5} = -10 \text{ cm}}$$

La imagen se forma a 10 cm a la izquierda del polo del segundo dioptrio (imagen virtual).

Problema 20. En el centro de una esfera de vidrio ($n = 1{,}5$) hay una pequeña burbuja de aire. Determinar la posición de la imagen de la burbuja y el aumento del sistema.



Problema XXXIV-20

Solución

$$n \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s} \right] = n' \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'} \right]$$

expresando las magnitudes con su valor y signo, obtenemos:

$$\frac{1{,}5}{-r} - \frac{1{,}5}{-r} = \frac{1}{-r} - \frac{1}{s'} = 0 \quad \Rightarrow \quad s' = -r$$

$$\boxed{\text{La burbuja se ve en el centro de la esfera.}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{s'}{s} \frac{n}{n'} = \frac{-r}{-r} \frac{1{,}5}{1} = 1{,}5}$$

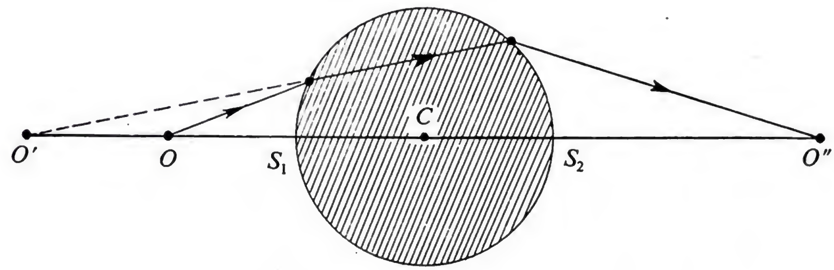
Problema 21. Ante una esfera de vidrio ($r = 10$ cm, $n = 1{,}5$) se coloca un pequeño objeto de 1 mm de altura, perpendicularmente al eje, a 20 cm del centro de la esfera. Considerando la zona paraxial, determinar:

1. Posición de la imagen.
2. Altura de la imagen.
3. La imagen ¿es derecha o invertida?, ¿es real o virtual?
4. Tras el dioptrio de salida de los rayos de luz, antes de formarse la imagen y perpendicularmente al eje, se intercala una lámina plano-paralela de vidrio ($n = 1{,}5$) de 15 cm de espesor. ¿Cuánto se desplaza la imagen? ¿Se acerca o aleja de la esfera?

Solución

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1}{10}-\frac{1}{-10}=\frac{1,5}{10}-\frac{1,5}{s'} \Rightarrow s'=-30 \text{ cm}$$

$$\frac{1,5}{-10}-\frac{1,5}{-50}=\frac{1}{-10}-\frac{1}{s''} \Rightarrow \boxed{s''=50 \text{ cm} \quad \text{(real)}}$$



Problema XXXIV-21

2) y 3)

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\frac{n}{n'} \quad \left| \begin{array}{l} y'=1\,\dfrac{-30}{-10}\,\dfrac{1}{1,5}=2 \text{ mm} \\ \boxed{y''=2\,\dfrac{50}{-50}\,\dfrac{1,5}{1}=-3 \text{ mm} \quad \text{(invertida)}} \end{array}\right.$$

4)

$$\boxed{d=e\left[1-\frac{n}{n'}\right]=15\left[1-\frac{1}{1,5}\right] \text{ cm}=5 \text{ cm}}$$

$\boxed{\text{Luego se aleja 5 cm.}}$

Problema 22. Un objeto de 1 mm de altura se mira a través de una esfera de vidrio de 10 cm de radio. Determinar la posición y tamaño de la imagen. (La observación se realiza en una dirección que pasa por el centro de la esfera.) La distancia del objeto al centro de la esfera es 40 cm ($n = 1,5$).

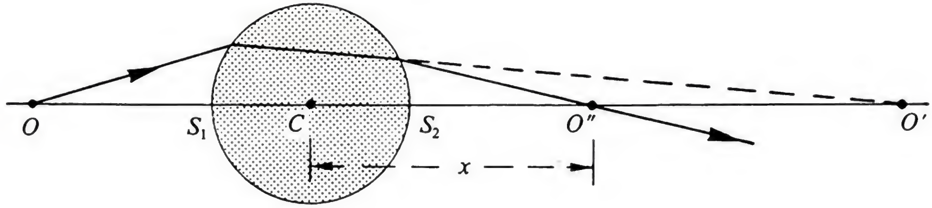
Solución

El objeto está a 30 cm ante el polo del primer dioptrio:

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1}{10}-\frac{1}{-30}=\frac{1,5}{10}-\frac{1,5}{s'} \Rightarrow s'=90 \text{ cm}$$

La imagen se forma a 90 − 20 = 70 cm detrás del polo del segundo dioptrio. Tal imagen hace de objeto virtual con respecto a dicho dioptrio.:

$$\frac{1,5}{-10}-\frac{1,5}{70}=\frac{1}{-10}-\frac{1}{s_2'} \Rightarrow s_2'=14 \text{ cm}$$



Problema XXXIV-22

Luego la distancia al centro de la esfera será:

$$\boxed{x = 14 + 10 = 24 \text{ cm}}$$

$$\beta_1 = \frac{s_1'}{s_1}\frac{n_1}{n_1'} = \frac{90}{-30}\frac{1}{1{,}5} \qquad \beta = \beta_1\beta_2 = -\frac{90}{30}\frac{14}{70} = -0{,}6 = \frac{y'}{y} \Rightarrow$$

$$\beta_2 = \frac{s_2'}{s_2}\frac{n_2}{n_2'} = \frac{14}{70}\frac{1{,}5}{1} \qquad \boxed{y' = -0{,}6y = -0{,}6 \text{ mm}}$$

D) ESPEJOS ESFERICOS

FORMULARIO

FÓRMULA:

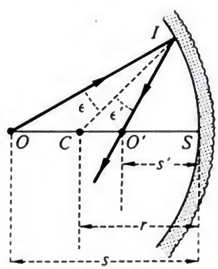
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} = \frac{1}{f'} \qquad f = f'$$

AUMENTO LATERAL:

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

Problema 23. Obtener la fórmula de los espejos esféricos para rayos paraxiales, aplicando las leyes de la reflexión y consideraciones geométricas.

Solución



Problema XXXIV-23-1.ª

En el triángulo OIO' (fig. 1.ª) la bisectriz del ángulo OIO' divide al lado opuesto en partes directamente proporcionales a los otros dos lados:

$$\frac{IO}{CO} = \frac{IO'}{CO'}$$

Si la ordenada del punto objeto es despreciable en comparación con s, s' y r, y los ángulos que forman los rayos con el eje son lo suficientemente pequeños para confundir tales ángulos con sus senos y tangentes (rayos paraxiales), se pueden igualar OI a OS y $O'I$ a $O'S$, transformándose la proporción anterior en:

$$\frac{SO}{CO} = \frac{SO'}{CO'}$$

Las anteriores distancias con sus signos son, en el espejo cóncavo:
$SO = -s$ (distancia del punto principal al punto objeto).
$SO' = -s'$ (distancia del punto principal al punto imagen).
$CO = -s - (-r)$. (El radio es negativo en el espejo cóncavo.)
$CO' = -r - (-s')$.

Sustituyendo en la proporción, se obtiene:

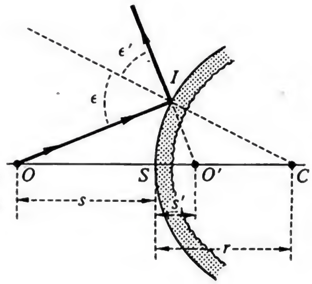
$$\frac{-s}{-s+r} = \frac{-s'}{-r+s'} \Rightarrow sr - ss' = ss' - s'r$$

$$sr + s'r = 2ss'$$

y dividiendo por $ss'r$:

$$\boxed{\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}}$$

Si consideramos el espejo convexo, aplicaremos la propiedad: «la bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide, exteriormente, al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados», obteniendo, por las mismas consideraciones, las idénticas proporciones.
En este caso:



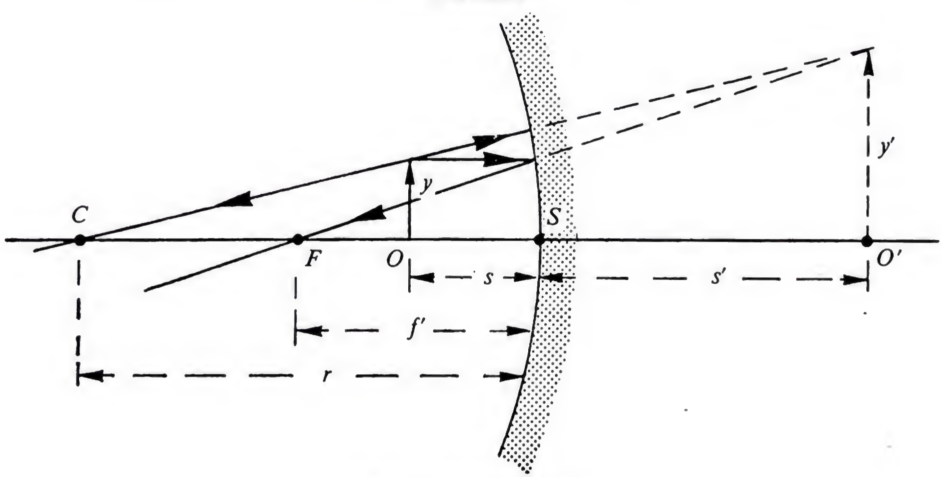
Problema XXXIV-23-2.ª

$$SO = -s$$
$$SO' = s'$$
$$CO = -s + r$$
$$CO' = r - s'$$

por sustitución, y operando de la misma forma, obtenemos idéntica fórmula.

Problema 24. Delante de un espejo cóncavo de 50 cm de distancia focal y a 25 cm de su centro de figura se encuentra un objeto perpendicular al eje y cuya altura es de 1 cm. Calcular la posición y el tamaño de la imagen. (Se suponen rayos correspondientes a la zona paraxial.)

Solución



Problema XXXIV-24

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{-25} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{-50} \Rightarrow \boxed{s' = 50 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual (detrás del espejo) y a 50 cm del centro de la figura.

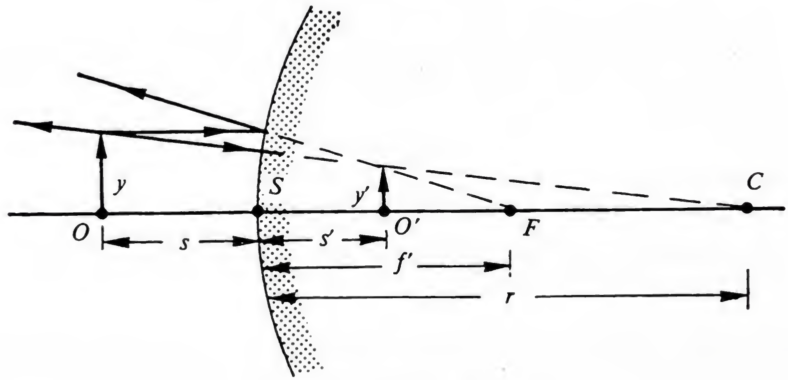
$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1} = -\frac{50}{-25} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = 2 \text{ cm}}$$

(imagen derecha).

Problema 25. Resolver el problema anterior, siendo el espejo convexo.

Solución

$$\frac{1}{-25} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s' = 16{,}66 \text{ cm}}$$



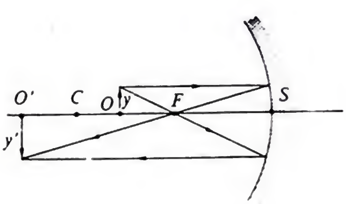
Problema XXXIV-25

La imagen es virtual (detrás del espejo) y a 16,66 cm del centro de la figura:

$$\frac{y'}{1} = -\frac{16{,}66}{-25} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = 0{,}66 \text{ cm}}$$

Imagen derecha.

Problema 26. A 150 cm del centro de la figura de un espejo cóncavo se forma una imagen real, invertida y de doble altura que el objeto. Calcular la posición del objeto y el radio del espejo. (Realizamos el problema en la zona paraxial.)



Problema XXXIV-26

Solución

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

$$\beta = -2$$

$$s' = -150 \text{ cm}$$

$$-2 = -\frac{-150}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s = -75 \text{ cm}}$$

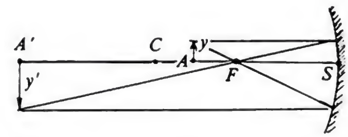
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{2ss'}{s+s'} = \frac{2(-75)(-150)}{-70-150} = -100 \text{ cm}}$$

Problema 27. Un espejo cóncavo forma una imagen real, invertida y de tamaño triple de un objeto vertical situada sobre el eje óptico a 10 cm del espejo.
1. Dibujar un esquema con la marcha geométrica de los rayos que definen la imagen del objeto.
2. Determinar el radio de curvatura del espejo.
3. Determinae la distancia a que se encuentra el objeto del espejo.

Solución

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -3 \Rightarrow -\frac{-10}{s} = -3 \Rightarrow \boxed{s = -\frac{10}{3}\ \text{cm}}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{-\frac{10}{3}} + \frac{1}{-10} = \frac{2}{r} \Rightarrow \boxed{r = -5\ \text{cm}}$$



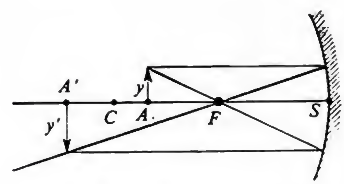
Problema XXXIV-27

Problema 28. Determinar el radio de curvatura de un espejo que forme una imagen real, invertida y de tamaño doble de los objetos situados a 20 cm del espejo. Dibujar un esquema con la marcha geométrica de los rayos para definir la imagen de un objeto vertical situado en el lugar indicado.

Solución

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow -2 = -\frac{s'}{-20} \Rightarrow s' = -40\ \text{cm}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{-20} + \frac{1}{-40} = \frac{2}{r} \Rightarrow \boxed{r = -26{,}66\ \text{cm}}$$



Problema XXXIV-28

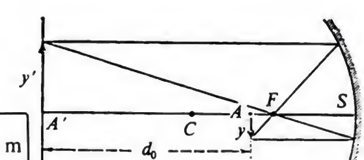
Problema 29. Por medio de un espejo cóncavo se quiere proyectar un objeto de 1 cm sobre una pantalla plana, de modo que la imagen sea derecha y de 3 cm. La pantalla ha de estar colocada a 2 m del objeto. Calcular:
1. El radio del espejo.
2. Su distancia focal.
3. Su potencia.
4. Distancias del objeto e imagen al espejo.

Solución

Para que una imagen sea proyectable tiene que ser real, y como en espejos esféricos cóncavos las imágenes reales son invertidas respecto al objeto, colocaremos el objeto invertido para que la imagen sea derecha. Todo esto queda explicado en la figura.

1)

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \dfrac{y'}{y} = -\dfrac{s'}{s} \\[2ex] \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{r} \end{array}\right| \Rightarrow \beta = \frac{3}{-1} = -\frac{2 + (-s)}{-s} \left| \begin{array}{l} s = -1\ \text{m} \\[2ex] s' = -3\ \text{m} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{r = -\frac{3}{2}\ \text{m}}$$



Problema XXXIV-29

2)

$$\boxed{f' = \frac{r}{2} = -0{,}75\ \text{m}}$$

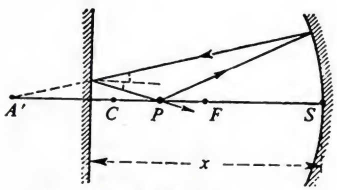
3)

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0{,}75} = -\frac{4}{3}\ \text{dp}}$$

4)

$$\boxed{s = -1\ \text{m}} \qquad \boxed{s' = -3\ \text{m}}$$

Problema 30. A una distancia de 60 cm de un espejo cóncavo de 80 cm de radio y sobre su eje óptico existe una fuente luminosa puntual P. ¿A qué distancia del espejo cóncavo deberá situarse un espejo plano para que los rayos, después de reflejarse sucesivamente sobre el espejo cóncavo y el espejo plano, converjan en P nuevamente?



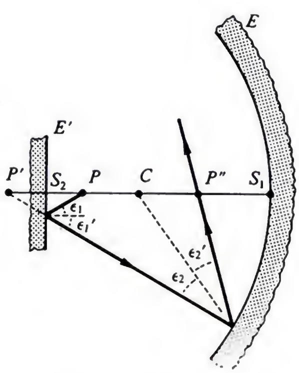
Problema XXXIV-30

Solución

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{-60} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-80} \Rightarrow s' = -120\ \text{cm}$$

$$\boxed{x = \frac{-120 - 60}{2} = -90\ \text{cm}}$$

Problema 31. Un espejo esférico cóncavo —E— de 1 m de radio está enfrente de un espejo plano —E'— colocado perpendicularmente al eje del espejo. La distancia entre los dos espejos es 1,80 m. A 20 cm del espejo plano y en el eje hay un punto luminoso —P—, de forma que un rayo que parte de P se refleja primero en el plano y luego en el esférico. Determinar la posición de la imagen y el aumento del conjunto. Dibujar la marcha de un rayo de luz que parte de P. (Trabajamos en la zona paraxial.)



Problema XXXIV-31

Solución

La distancia de P' al espejo esférico es:

$$s' = -1{,}8 - 0{,}20 = -2\ \text{m}$$

$$\frac{1}{s''} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s''} = \frac{2}{r} - \frac{1}{s'}$$

sustituyendo:

$$\frac{1}{s''} = \frac{2}{-1} - \frac{1}{-2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{s'' = -\frac{2}{3}\ \text{m} = -66{,}66\ \text{cm}}$$

$$\boxed{\beta = -\frac{s''}{s'} = -\frac{-66{,}66}{-200} = -0{,}33}$$

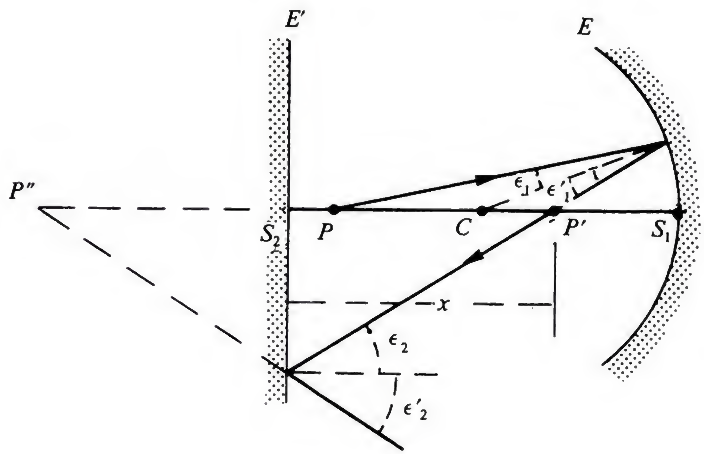
Problema 32. Resolver el mismo problema anterior, suponiendo la primera reflexión en el espejo esférico y la segunda en el plano.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{r} \\[2ex] \dfrac{1}{-160} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{-100} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{2}{-100} + \frac{1}{160} \Rightarrow s' = -72{,}72 \text{ cm}$$

o sea:

$$\boxed{x = 180 - 72{,}72 = 107{,}28 \text{ cm a la izquierda de } S_2}$$



Problema XXXIV-32

En este espejo plano se forma una imagen virtual (P'') detrás de E' y a una distancia de E' igual a 107,28 cm. Como los espejos planos no producen aumento, el aumento del conjunto es el correspondiente al espejo esférico:

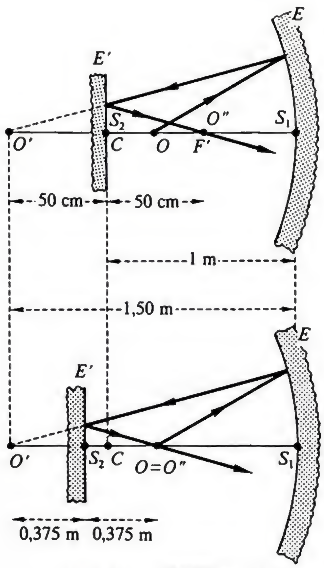
$$\boxed{\beta = -\frac{s'}{s} = -\frac{-72{,}72}{-160} = -0{,}45}$$

Problema 33. Tenemos un espejo cóncavo E, de 1 m de radio de curvatura. Se pide:

1. Situación y naturaleza de la imagen que el anterior espejo dé de un objeto, situado sobre el eje principal a 75 cm del vértice del espejo.

2. Interceptando los rayos procedentes del espejo cóncavo mediante un espejo plano E', queremos que la imagen se forme en el plano focal del espejo E: ¿dónde hemos de colocar el espejo E'?

3. Y para que la imagen se forme en el mismo plano en que está el objeto ¿dónde colocaremos el espejo plano E'?



Problema XXXIV-33

4. En este último caso determinar la situación de las sucesivas imágenes dadas por los espejos E y E'.

Solución

1)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-0{,}75} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s' = -1{,}5 \text{ m}}$$

La imagen es real y a 1,5 m delante del espejo.

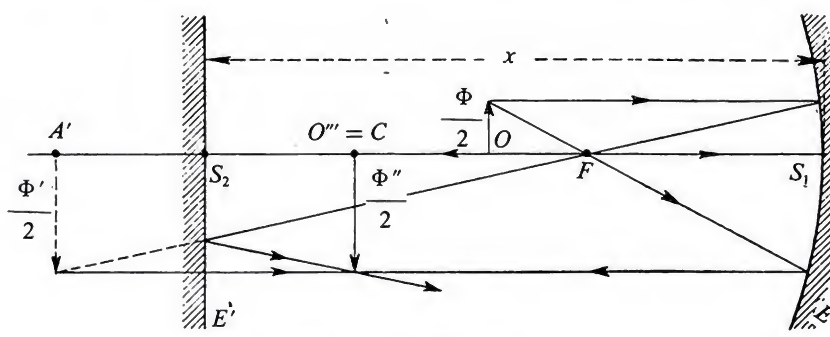
2) Para que la imagen se forme en F' es necesario colocar el espejo plano en el punto medio de $\overline{O'F'}$, es decir, en el centro C.

3) y 4) Para que la imagen se forme en O es necesario colocar el espejo en el punto medio de OO', o sea, $0{,}75/2 = 0{,}375$ m entre O y O', o sea, a 1,125 m delante de S.

Problema 34. Se da un espejo cóncavo de 2 m de radio. A una distancia de 1,40 m del vértice S_1 se coloca un pequeño círculo luminoso de 1 cm de radio, cuyo centro coincide con el principal. Se pide a qué distancia de S_1 se deberá colocar un espejo plano perpendicular al eje para que el centro de la imagen se confunda con el centro de curvatura del espejo. ¿Cuál será el diámetro de círculo de esta imagen?

Solución

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-1{,}40} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-2} \quad \Rightarrow \quad s' = -3{,}5 \text{ m}$$



Problema XXXIV-34

$$\boxed{x = \frac{-3{,}5 - 2}{2} = -2{,}75 \text{ m}}$$

$$\beta' = \frac{\Phi'}{\Phi} = -\frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi' = -\Phi\frac{s'}{s} = -2\,\frac{-3{,}5}{-1{,}4} = -5 \text{ cm}}$$

Problema 35. A 35 cm de un espejo esférico cóncavo de 60 cm de radio se encuentra un objeto; determinar a qué distancia hay que colocar un espejo plano normal al eje del sistema para que la imagen, después de reflejarse los rayos en este espejo quede situada en el centro de curvatura del espejo cóncavo. Hágase la construcción gráfica. ¿Cuánto valdrá el aumento lateral?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{r} \\[2ex] \dfrac{1}{-35} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{-60} \end{array}\right| \Rightarrow s' = -210 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-210-60}{2} = -135 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} = -\frac{-210}{-35} = -6}$$

(ver figura del problema anterior).

Problema 36. Dos espejos esféricos cóncavos —E y E'—, de radio 1 m, están situados a 2 m de distancia, coincidiendo sus ejes ópticos. Determinar:
1. El punto del eje cuya imagen es el mismo punto, después de reflejarse la luz en E y E' sucesivamente.
2. El punto del eje cuya imagen es F' (foco de E'), después de reflejarse la luz en E y E' sucesivamente.
3. La imagen de F' (foco de E'), después de reflejarse la luz en E y E' y el aumento del sistema.
Dibujar la marcha de la luz en todos los casos. (Trabajamos en la zona paraxial.)

Solución

1) Al coincidir los centros de curvatura de los dos espejos en el punto C todo rayo que parte de tal centro (rayo 1) pasa después de las sucesivas reflexiones por C, que es, por tanto, punto objeto e imagen.

2) Todo rayo que parte del foco F del primer espejo (rayo 2) se refleja paralelamente al eje principal y, después de reflejarse en E', pasa por su foco F', que es así la imagen de F.

3) La distancia de $F'S$ es 1,5 m. La imagen de F' en E se formará a una distancia $O'_1S = s'_1$, dada por:

$$\frac{1}{-1{,}5} + \frac{1}{s'_1} = \frac{2}{-1} \Rightarrow s'_1 = -\frac{1{,}5}{2} = -0{,}75 \text{ m}$$

El punto O'_1 distará de E':

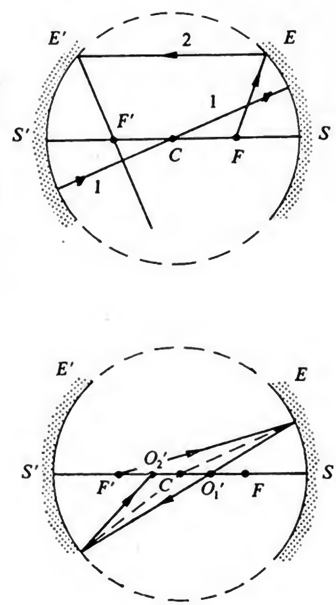
$$O'_1S' = 2 - 0{,}75 = 1{,}25 \text{ m}$$

y formará en este último espejo una imagen a una distancia $O'_2S' = s'_2$ dada por:

$$\frac{1}{1{,}25} + \frac{1}{s'_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow \boxed{s'_2 = \frac{1{,}25}{1{,}50} = 0{,}83 \text{ m}}$$

El aumento en la primera reflexión es:

$$\beta_1 = -\frac{s'_1}{s_1} = -\frac{-0{,}75}{-1{,}5}$$



Problema XXXIV-36

y en la segunda:

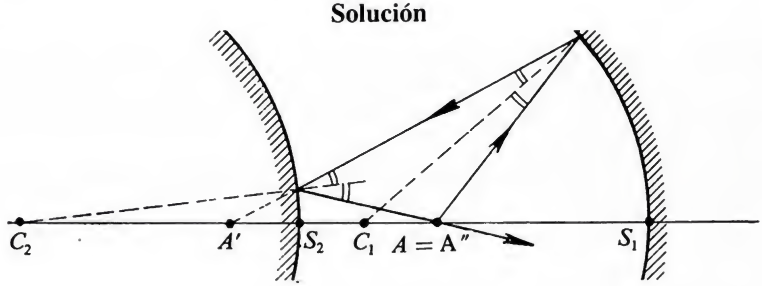
$$\beta_2 = -\frac{s'_2}{s_2} = -\frac{0,83}{1,25}.$$

El aumento del conjunto, producto de los aumentos, es:

$$\boxed{\beta = \frac{0,75}{1,5}\,\frac{0,83}{1,25} = 0,33}$$

Problema 37. Dos espejos esféricos, uno cóncavo y el otro convexo, tienen el mismo eje principal y radios de igual longitud $R = 2$ m; están colocados a 2,50 m uno del otro. A 1,50 m del espejo cóncavo se halla una pequeña recta luminosa perpendicular al eje. Los rayos luminosos llegan unos sobre el espejo convexo después de su reflexión sobre el espejo cóncavo; otros, sobre el espejo cóncavo después de su reflexión sobre el espejo convexo. Se pide dónde se formarán las imágenes que proceden de cada una de estas dos reflexiones. Construir estas imágenes.

Solución

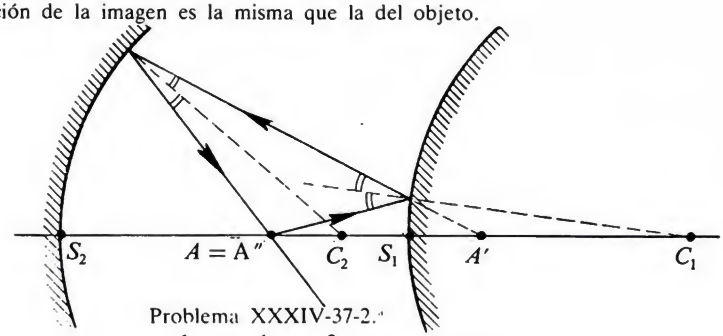


Problema XXXIV-37-1.ª

$$\frac{1}{-1,5} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-2} \Rightarrow s' = -3 \text{ m}$$

$$\frac{1}{-0,5} + \frac{1}{s''} = \frac{2}{-2} \Rightarrow \boxed{s'' = 1 \text{ m}}$$

La posición de la imagen es la misma que la del objeto.



Problema XXXIV-37-2.ª

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{2} \Rightarrow s' = 0,5 \text{ m}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{s''} = \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{s'' = 1,5 \text{ m}}$$

La posición de la imagen es la misma que la del objeto. Este resultado se podía haber previsto como consecuencia del principio de reversibilidad de rayos.

Problema 38. Sea un sistema centrado formado por dos espejos esféricos, uno convexo y otro cóncavo, ambos de 4 m de radio, separados 5 m uno de otro. A la distancia de 2 m del espejo convexo hay un pequeño objeto luminoso AB situado sobre el eje principal. Se pide:

1. Calcular el lugar en que se formará la imagen de AB por los rayos que, partiendo del objeto, llegan al espejo convexo después de reflejarse en el cóncavo.

2. El lugar de la imagen que se formará por los rayos que lleguen al espejo cóncavo después de haberse reflejado en el convexo.

3. Naturaleza de las imágenes.

4. Dibujar en cada caso la marcha de los rayos.

Solución

Tomaremos siempre las distancias como positivas a la derecha de S_1 y S_2. Aplicaremos la fórmula:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r}$$

1) Distancia de A al espejo cóncavo:

$$s = -3 \text{ m}$$

$$\frac{1}{-3} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{-4} \quad \Rightarrow \quad s' = -6 \text{ m}$$

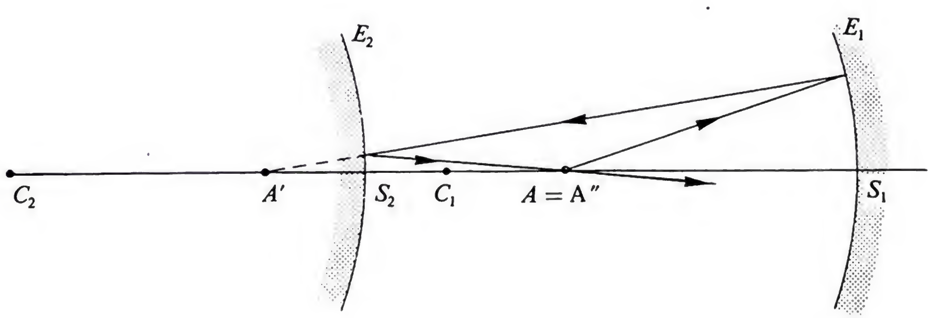
A' está a -1 m de S_2 (detrás del espejo convexo); tal imagen hace de objeto virtual con respecto a S_2:

$$\frac{1}{-1} + \frac{1}{s''} = \frac{2}{-4} \quad \Rightarrow \boxed{s'' = 2 \text{ m}}$$

La imagen es real y se forma a 2 m de S_2, coincidiendo con A.

2) En virtud del principio de reversibilidad de rayos, la imagen se encontrará en el mismo lugar que en el caso anterior y el rayo luminoso seguirá el mismo camino que en la figura, pero al revés.

3) La imagen es real y a 2 m del espejo convexo.



Problema XXXIV-38

Problema 39. Un espejo esférico que actúa de retrovisor de un coche parado proporciona una imagen virtual de un vehículo que se aproxima con velocidad constante. El tamaño de dicha imagen es 1/10 del tamaño real del vehículo cuando éste se encuentra a 8 m del espejo.

1. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?

2. ¿A qué distancia del espejo se forma la correspondiente imagen virtual?

3. Un segundo después la imagen observada en el espejo se ha duplicado. ¿A qué distancia del espejo se encuentra ahora el vehículo?

4. ¿Cuál era su velocidad?

Solución

1) y 2)

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{10} = -\dfrac{s'}{s} \\ s = -800 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{s' = 80 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{-800} + \frac{1}{80} = \frac{2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \frac{1\,600}{9} = 177{,}77 \text{ cm}}$$

3)

$$\beta_2 = \frac{y'_1}{y} = 2\beta_1 = \frac{1}{5} = -\frac{s'}{s}$$

$$\left.\begin{array}{l} s' = -\dfrac{s}{5} \\ \dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s'} = \dfrac{2}{177{,}77} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{s = -355 \text{ cm} = -3{,}55 \text{ m}}$$

4)

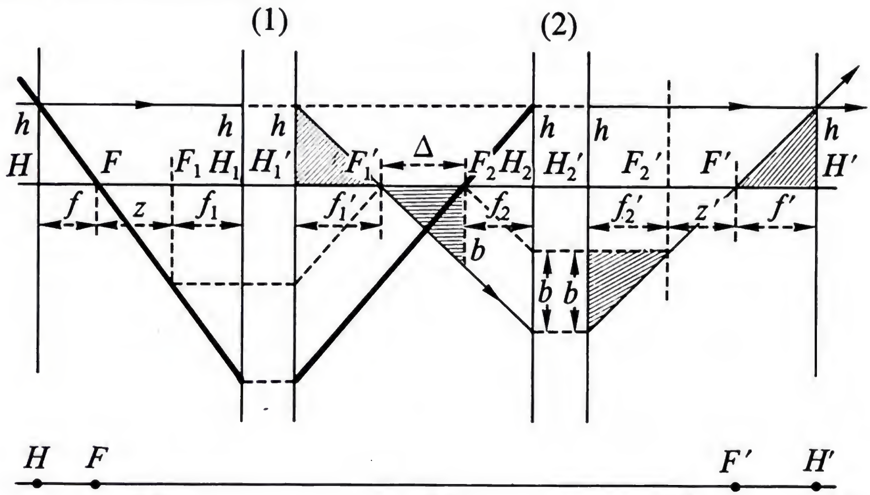
$$\boxed{v = \frac{l}{t} = \frac{8 - 3{,}55}{1} = 4{,}45 \text{ m/s}}$$

Capítulo XXXV

SISTEMAS CENTRADOS. SISTEMAS COMPUESTOS. LENTES

FORMULARIO

SISTEMAS COMPUESTOS:



$$z = F_1F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} \qquad z' = F_2'F' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} \qquad f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} \qquad f = \frac{f_1 f_2}{\Delta}$$

LENTES: CONVERGENCIA:

Gruesas:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n-1)\left[\frac{e(n-1)}{n r_1 r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right]$$

Delgadas:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \qquad f = -f'$$

Fórmula de puntos conjugados:

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

AUMENTO: $\beta = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{a'}{a}$

CONVERGENCIA DE UN DOBLETE | *Pegado:* $\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2$
Despegado: $\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 - d\varphi'_1\varphi'_2$

Problema 1. Calcular el número de dioptrías de una lente cuya distancia focal imagen es:

1. 10 cm
2. 20 cm
3. 25 cm
4. 50 cm
5. 2 m
6. 4 m
7. 5 m
8. 10 m

Solución

1)
$$\varphi' = \frac{1}{0{,}10} = \frac{100}{10} = 10 \text{ dp}$$

2)
$$\varphi' = \frac{1}{0{,}20} = \frac{100}{20} = 5 \text{ dp}$$

3)
$$\varphi' = \frac{1}{0{,}25} = \frac{100}{25} = 4 \text{ dp}$$

4)
$$\varphi' = \frac{1}{0{,}50} = \frac{100}{50} = 2 \text{ dp}$$

5)
$$\varphi' = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ dp}$$

6)
$$\varphi' = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ dp}$$

7)
$$\varphi' = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ dp}$$

8)
$$\varphi' = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ dp}$$

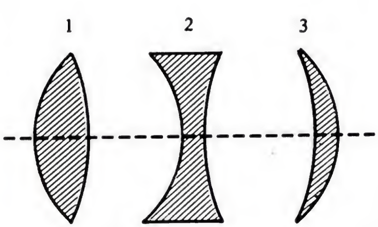
Problema 2. **1.** ¿Qué tipos de lentes delgadas pueden construirse combinando dos superficies cuyos radios de curvatura son, en valor absoluto, 10 cm y 20 cm?
2. ¿Cuáles son convergentes y cuáles divergentes?
3. Calcular la distancia focal de cada una si el vidrio utilizado tiene un índice de refracción $n = 3/2$.

Solución

1) La biconvexa, la bicóncava y el menisco divergente.

2)
$$\varphi'_1 = \frac{1}{f_1} = \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left[\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{-0{,}2}\right] = 7{,}5 \text{ dp (convergente)}$$
$$\varphi'_2 = \frac{1}{f_2} = \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left[\frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{0{,}2}\right] = -\ 7{,}5 \text{ dp (divergente)}$$
$$\varphi'_3 = \frac{1}{f_3} = \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left[\frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{-0{,}2}\right] = -\ 2{,}5 \text{ dp (civergente)}$$

3)
$$f_1 = 13{,}33 \text{ cm} \qquad f_2 = -\ 13{,}33 \text{ cm} \qquad f_3 = 40 \text{ cm}$$



Problema XXXV-2

Problema 3. Enfrente de un lente convergente de 25 cm de distancia focal y a 30 cm del centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje óptico, es de 1 cm. Determinar la posición y el tamaño de la imagen. Consideramos rayos correspondientes a la zona paraxial o de Gauss.

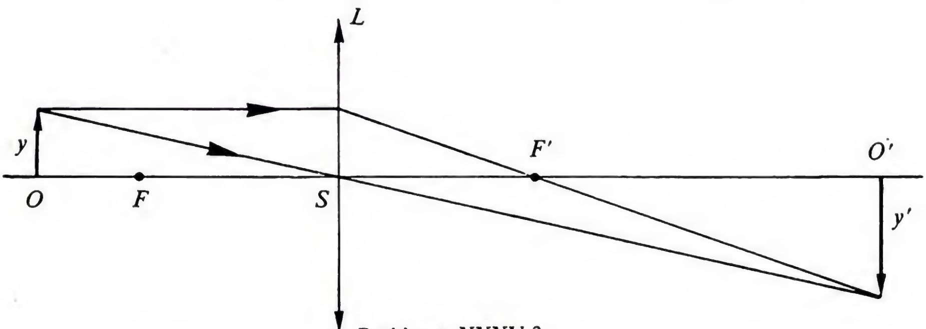
Solución

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{a'}=\frac{1}{a}+\frac{1}{f'}=\frac{f'+a}{af'} \Rightarrow a'=\frac{af'}{f'+a}$$

Sustituyendo a y f' por sus valores:

$$\boxed{a'=\frac{-30\times 25}{25-30}=150\text{ cm}}$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a} \Rightarrow \frac{y'}{1}=\frac{150}{-30} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{150}{30}=-5\text{ cm}}$$

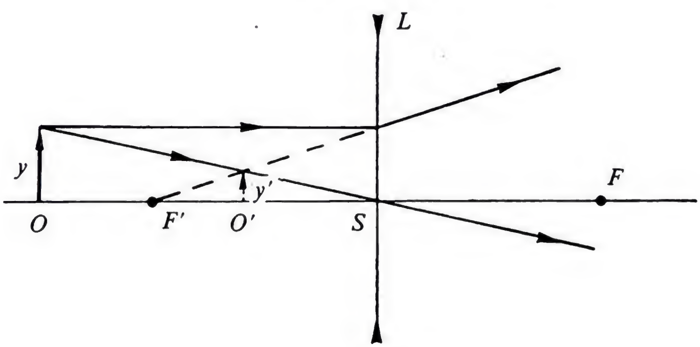


Problema XXXV-3

La imagen es real, invertida, de 5 cm de altura y situada a 150 cm del centro óptico de la lente.

Problema 4. Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.

Solución



Problema XXXV-4

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow a'=\frac{af'}{f'+a}$$

Sustituyendo valores:

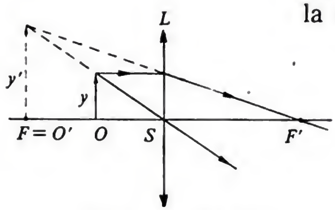
$$\boxed{a' = \frac{(-30)\,(-25)}{-\,25\,-\,30} = 13{,}64 \text{ cm}}$$

Aplicando la fórmula del aumento lateral:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1} = \frac{-13{,}64}{-30} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y' = \frac{13{,}64}{30} = 0{,}45 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual, derecha, 0,45 cm de altura y situada a 13,64 cm del centro óptico.

Problema 5. Enfrente de una lente convergente de 50 cm de distancia focal y a 25 cm de su centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje, es de 1 cm. Calcular la posición y tamaño de la imagen (suponemos rayos en la zona paraxial).



Problema XXXV-5

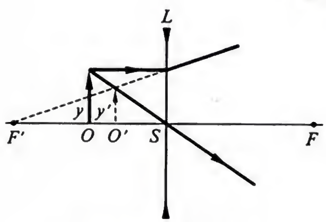
Solución

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a' = \frac{af}{f + a} = \frac{-25 \times 50}{50 - 25} = -\,50 \text{ cm}}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y'} = \frac{a'}{a} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1} = \frac{-50}{-25} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y' = \frac{50}{25} = 2 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual y derecha.

Problema 6. Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.



Problema XXXV-6

Solución

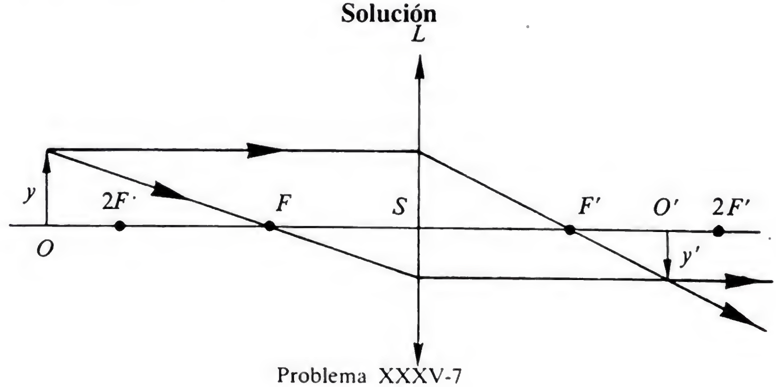
$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad\Rightarrow\quad \boxed{a' = \frac{af}{f + a} = \frac{(-25)\,(-50)}{-\,50\,-\,25} = -\,16{,}66 \text{ cm}}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad\Rightarrow\quad \frac{y'}{1} = \frac{-16{,}66}{-25} \quad\Rightarrow\quad \boxed{y' = \frac{16{,}66}{25} = 0{,}66 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual y derecha.

Problema 7. Delante de una lente convergente de 5 dp y a 50 cm del centro óptico se encuentra un objeto cuya altura, perpendicular al eje, es de 2 cm. Determinar la posición y el tamaño de la imagen. Considerar la imagen correspondiente a la zona paraxial.

Solución



Problema XXXV-7

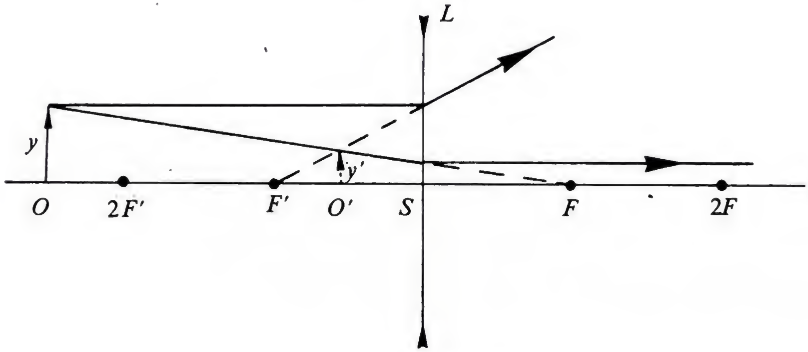
$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\varphi'=\frac{1}{f'} \Rightarrow f'=\frac{1}{5}\text{ m}=20\text{ cm}$$

$$\boxed{a'=\frac{a}{\varphi' a+1}=\frac{-0{,}5}{-5\times 0{,}5+1}=0{,}33\text{ m}}$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a} \Rightarrow \frac{y'}{2}=\frac{33}{-50} \Rightarrow \boxed{y'=-\frac{66}{50}=-1{,}3\text{ cm}}$$

Problema 8. Resolver el problema anterior considerando la lente divergente.

Solución



Problema XXXV-8

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\varphi'=\frac{1}{f'} \Rightarrow f'=-\frac{1}{5}\text{ m}=-20\text{ cm}$$

$$\boxed{a'=\frac{a}{\varphi' a+1}=\frac{-0{,}5}{(-5)(-0{,}5)+1}=-0{,}14\text{ m}}$$

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a} \Rightarrow \frac{y'}{2}=\frac{-14}{-50} \Rightarrow \boxed{y'=\frac{28}{50}=0{,}56\text{ cm}}$$

Problema 9. Calcular las potencias de las siguientes lentes delgadas, cuyo radio de curvatura es siempre de 40 mm y que están fabricadas de un vidrio de $n = 1{,}5$.

1. Una lente biconvexa.
2. Una lente bicóncava.
3. Una lente plano-convexa.
4. Una lente plano-cóncava.
5. Calcular la situación y el tamaño de la imagen producida por la primera lente de un objeto real situado en el eje principal y a 20 cm delante de la lente.

Solución

$$\varphi'=(n-1)\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]$$

1)

$$\boxed{\varphi' = 0{,}5\left[\frac{1}{0{,}04} - \frac{1}{-0{,}04}\right] = 25 \text{ dp}}$$

2)

$$\boxed{\varphi' = 0{,}5\left[\frac{1}{-0{,}04} - \frac{1}{0{,}04}\right] = -\ 25 \text{ dp}}$$

3)

$$\boxed{\varphi' = 0{,}5\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0{,}04}\right] = 12{,}5 \text{ dp}}$$

4)

$$\boxed{\varphi' = 0{,}5\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}04}\right] = -\ 12{,}5 \text{ dp}}$$

5)

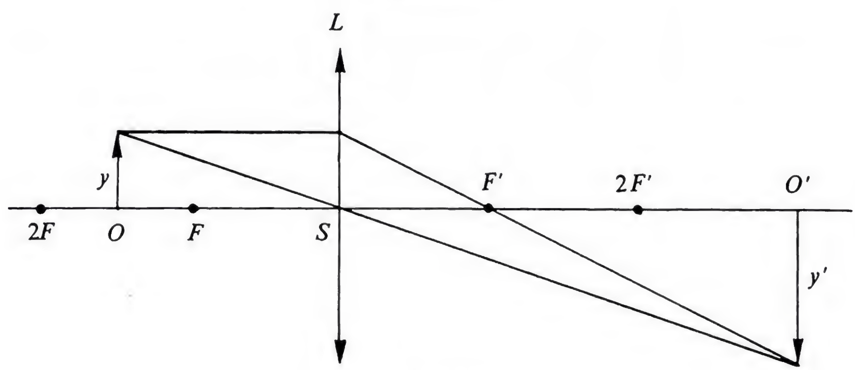
$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}2} + \frac{1}{a'} = 25 \Rightarrow \boxed{a' = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{5}{-20} = -\ 0{,}25}$$

(Imagen real, invertida y de 1/4 del tamaño del objeto.)

Problema 10. A 50 cm del centro óptico de una lente convergente se forma una imagen real y de doble altura que el objeto. Calcular la posición del objeto y la convergencia de la lente. (Consideramos la zona paraxial.)

Solución



Problema XXXV-10

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \Rightarrow -\ 2 = \frac{50}{a} \Rightarrow \boxed{a = -\ \frac{50}{2} = -\ 25 \text{ cm}}$$

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}50} = 6 \text{ dp}}$$

Problema 11. En una delgada lente plano-convexa buscamos una posición en que el tamaño de un objeto sea igual al de su imagen real. La distancia del objeto al centro óptico de la lente es entonces 50 cm. El radio de la cara curva, determinado con un esferómetro, es de 12,50 cm. Calcular la convergencia de la lente y el índice de refracción del vidrio que la forma. (Consideramos la zona paraxial.)

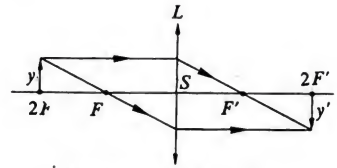
Solución

Para que una lente convergente (plano-convexa) forme una imagen real y del mismo tamaño de un objeto éste debe estar situado al doble de la distancia focal de la lente. La distancia focal es, así, 25 cm y la convergencia:

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ dp}}$$

La convergencia viene dada por:

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow 4 = (n-1)\frac{1}{0{,}125} = (n-1)8 \Rightarrow \boxed{n = 1{,}5}$$



Problema XXXV-11

Problema 12. Se desea proyectar sobre una pantalla la imagen de un objeto de 2 cm de alto, y para ello contamos con una lente convergente biconvexa de 5 dp o con un espejo cóncavo de 0,5 m de radio. La pantalla está situada a 2 m de distancia del sistema.

1. Utilizando la lente, determinar a qué distancia de la misma debe colocarse el objeto para que la imagen se forme exactamente sobre la pantalla.

2. Utilizando el espejo, indicar dónde se ha de colocar el objeto para cumplir el mismo fin que el caso anterior.

3. ¿Qué tamaño tendría la imagen en ambos casos? ¿En cuál sería mayor?

Solución

1)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \frac{1}{20} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{200}$$

$$\varphi' = 5 \text{ dp} \Rightarrow f' = 20 \text{ cm} \qquad \boxed{a = -\frac{200}{9} = -22{,}22 \text{ cm}}$$

2)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{-200} = \frac{2}{-50} \Rightarrow \boxed{s = -\frac{200}{7} = -28{,}57 \text{ cm}}$$

3)

$$\boxed{y' = y\frac{a'}{a} = 2\frac{200}{-22{,}22} = -18 \text{ cm}}$$

$$\boxed{y' = -y\frac{s'}{s} = -2\frac{200}{-28{,}57} = -14 \text{ cm}}$$

Problema 13. Con dos vidrios de reloj del mismo radio de curvatura R y de espesor despreciable se forma, pegándolos, una especie de lente biconvexa, hueca. Si se llena con un líquido de índice de refracción 5/4, la imagen de un objeto situado a 40 cm de la lente está en el infinito. Si se llena con un líquido de índice de refracción n desconocido, la imagen del mismo objeto resulta estar a 40 cm de la lente. ¿Cuáles son los valores de n y R?

Solución

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{-R}\right]$$

$$f' = 40 \text{ cm}$$

$$n = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{40} = \left[\frac{5}{4} - 1\right]\frac{2}{R} \Rightarrow \boxed{R = 20 \text{ cm}}$$

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \frac{1}{f'} = -\frac{1}{-40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{20} \Rightarrow f' = 20 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{20} = (n-1)\frac{2}{20} \Rightarrow \boxed{n = \frac{3}{2}}$$

Problema 14. El radio de curvatura de una lente plano-convexa es de 30 cm. Delante de ella se coloca un objeto de 5 mm perpendicular al eje principal y detrás, una pantalla a 4 m de distancia. Calcular:

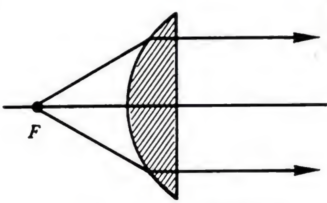
1. Distancia focal de la lente.

2. Distancia a que habrá de colocar el objeto para que la imagen se recoja en la pantalla.

3. Tamaño de la imagen.

4. Lente, objeto y pantalla se sumergen en agua. Calcular la posición en que habrá que colocar en este caso el objeto para que su imagen se recoja en la pantalla.

DATOS: Indices de refracción: vidrio, 3/2; agua, 4/3.



Problema XXXV-14

Solución

1) El foco objeto de la lente coincide con el del dioptrio esférico:

$$f = -r\frac{n}{n'-n} = -30\frac{1}{\frac{3}{2}-1} = -60 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{f' = -f = 60 \text{ cm}}$$

2)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{a} + \frac{1}{400} = \frac{1}{60} \Rightarrow \boxed{a = -70{,}6 \text{ cm}}$$

3)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \Rightarrow \frac{y'}{5} = \frac{400}{-70{,}6} \Rightarrow \boxed{y' = -28 \text{ mm}}$$

4)

$$f_{H_2O} = -r\frac{n}{n'-n} = -30\frac{4/3}{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}} = -240 \text{ cm} \Rightarrow f' = -f_{H_2O} = 240 \text{ cm}$$

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{a} + \frac{1}{400} = \frac{1}{240} \Rightarrow \boxed{a = -600 \text{ cm}}$$

Problema 15. Entre un objeto de 2 cm de tamaño y una pantalla que dista de él 60 cm se coloca una lente biconvexa de radios iguales e índice de refracción $n = 1{,}5$. Se obtienen imágenes nítidas en la pantalla para dos posiciones de la lente separadas entre sí 40 cm. Calcular:
1. La distancia focal de la lente y su potencia.
2. El radio de las caras de la lente.
3. El tamaño de las imágenes en las dos posiciones de la lente.

Solución

1)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'}$$

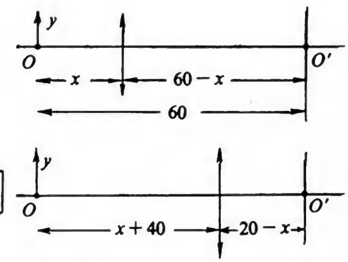
$$-\frac{1}{-x} + \frac{1}{60 - x} = \frac{1}{f'}$$

$$-\frac{1}{-(x + 40)} + \frac{1}{20 - x} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{60 - x} = \frac{1}{40 + x} + \frac{1}{20 - x}$$

$$x = 10 \text{ cm}$$

$$\boxed{f' = \frac{50}{6} \text{ cm} = 0{,}0833 \text{ m}} \Rightarrow \boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = 12 \text{ dp}}$$



Problema XXXV-15

2)

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n - 1)\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] = (1{,}5 - 1)\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right] \Rightarrow \boxed{f' = r = 0{,}0833 \text{ m}}$$

3)

$$\boxed{y'_1 = y\,\frac{a'}{a} = 2\,\frac{50}{-10} = -10 \text{ cm}}$$

$$\boxed{y'_2 = y\,\frac{a'}{a} = 2\,\frac{10}{-50} = -0{,}4 \text{ cm}}$$

Problema 16. **1.** Hallar una fórmula que exprese la distancia D entre un objeto y su imagen, formada por una lente convergente en función de la distancia focal y de la distancia del objeto a la lente.
2. ¿A qué distancia de la lente debe encontrarse el objeto para que D sea mínima?
3. ¿Cuánto vale esta distancia mínima?
4. ¿Cuál es el aumento de la lente en este caso?

Solución

1)

$$-a + a' = D$$

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{D + a} \Rightarrow \boxed{D = -\frac{a^2}{a + f'}}$$

2) y 3)

$$\frac{dD}{da} = - \frac{(a + f')2a - a^2}{(a + f')^2} = - \frac{a^2 + 2af'}{(a + f')^2} = 0$$

$$a^2 + 2af' = 0 \left| \begin{array}{l} a = 0 \\ \boxed{a = -2f'} \text{ (en la doble distancia focal)} \end{array} \right.$$

$$\boxed{D = 4f'}$$

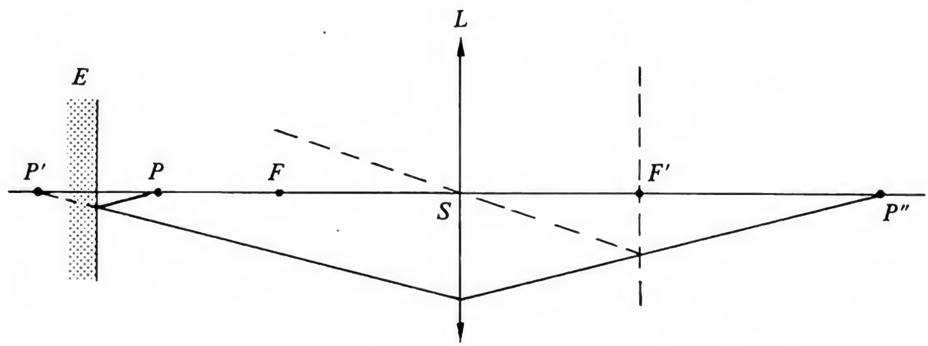
4)

$$\boxed{\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = -1}$$

Problema 17. Una lente convergente —*L*— de 1 dp está enfrente de un espejo plano —*E*— colocado perpendicularmente al eje. La distancia entre el espejo y la lente es de 1,80 m. A 20 cm del espejo y en el eje hay un punto luminoso —*P*— que se refleja en el espejo plano y luego su imagen hace de objeto con especto a la lente. Determinar la posición de la imagen y el aumento del conjunto. Dibujar la marcha de un rayo de luz que parte de *P*. (Consideramos la zona paraxial.)

Solución

$$\varphi' = \frac{1}{f} = 1 \text{ dp} \Rightarrow f' = 1 \text{ m}$$



Problema XXXV-17

La imagen en el espejo plano se forma a 20 cm detrás de él, es decir, a 0,20 + 1,80 = 2 m del centro óptico de la lente.
La aplicación de la fórmula de los focos conjugados conduce a:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-2} + \frac{1}{a'} = 1 \Rightarrow \boxed{a' = 2 \text{ m}}$$

La imagen es real y a 2 m del centro óptico de la lente.
El aumento del sistema es el de la lente, ya que el espejo plano tiene un aumento lateral igual a la unidad.

$$\boxed{\beta = \frac{a'}{a} = \frac{2}{-2} = -1}$$

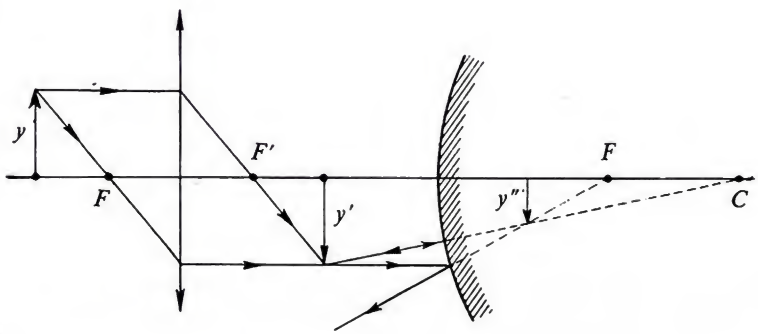
La imagen es invertida y de la misma altura que el objeto.

Problema 18. A 40 cm de distancia del centro óptico de una lente de 5 dp se halla un objeto luminoso. Detrás de esta lente y a 1 m de distancia, formando con ella un sistema centrado, existe un espejo convexo de 60 cm de radio.
1. Construir gráficamente la imagen del objeto formado por el sistema.
2. Deducir la posición, la naturaleza de la imagen y el aumento del sistema.

Solución

$$\varphi' = 5 \text{ dp} \qquad f' = 20 \text{ cm}$$

1)



Problema XXXV-18

2)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \frac{1}{20} = -\frac{1}{-40} + \frac{1}{a'} \Rightarrow a' = 40 \text{ cm}$$

La distancia objeto para el espejo será -60 cm.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{-60} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{60} \Rightarrow \boxed{s' = 20 \text{ cm}} \text{ (virtual)}$$

$$\beta_1 = \frac{a'}{a} = \frac{40}{-40} = -1$$

$$\beta_1 = -\frac{s'}{s} = -\frac{20}{-60} = \frac{1}{3}$$

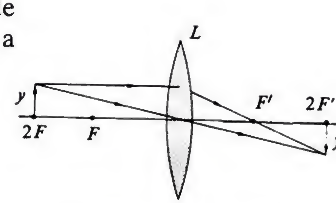
$$\boxed{\beta' = \beta'_1\beta'_2 = -\frac{1}{3}}$$

Problema 19. Sea una lente biconvexa esférica de radios de curvatura iguales a 50 cm y de índice de refracción $n = 1{,}5$. Se pide:
1. Calcular su potencia.
2. Determinar la posición y el tamaño de la imagen de un objeto de 5 mm situado sobre el eje principal a 1 m de distancia de la lente.
3. Suponiendo que plateamos la cara posterior de la lente, calcular la posición de la imagen final que producirá del objeto colocado tal como se describe en la pregunta anterior. (En todo el problema consideramos nulo el espesor.)

Solución

1)

$$\boxed{\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = 0{,}5\left[\frac{1}{0{,}5} - \frac{1}{-0{,}5}\right] = 2 \text{ dp}}$$

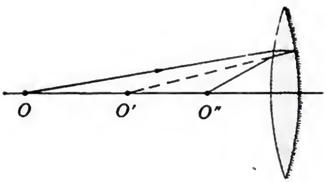


Problema XXXV-19-1.

2)

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-1}+\frac{1}{a'}=2 \Rightarrow \boxed{a'=1\text{ m}}$$

$$\beta=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow \boxed{y'=-5\text{ mm}}$$



Problema XXXV-19-2.ª

3) Imagen del objeto en el dioptrio frontal:

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1}{50}-\frac{1}{-100}=\frac{1,5}{50}-\frac{1,5}{s'} \Rightarrow s'=\infty$$

El objeto está en el foco objeto del dioptrio. Los rayos, en el interior de la lente, se propagan paralelos al eje principal y se reflejan en la dirección del foco del espejo (25 cm ante la lente). Este hace de objeto virtual, con respecto al dioptrio esférico (los rayos retornan hacia él):

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s''}\right] \Rightarrow \frac{1,5}{50}-\frac{1,5}{-25}=\frac{1}{50}-\frac{1}{s''} \Rightarrow \boxed{s''=-14,3\text{ cm}}$$

La imagen es real y a 14,3 cm delante de la lente.

Problema 20. Una lente plano convexa tiene su cara plana plateada. La lente tiene un índice de refracción de 1,4 y el radiò de la cara convexa es de 30 cm. Supuesta la lente delgada, determinar:

1. La posición de la imagen de un objeto situado en el eje principal a 30 cm de la lente.

2. Tamaño y naturaleza de la imagen si el objeto tiene un tamaño de 1 mm.

Solución

1) Imagen en el dioptrio esférico:

$$n_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right]=n'_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'_1}\right] \Rightarrow \frac{1}{30}-\frac{1}{-30}=\frac{1,4}{30}-\frac{1,4}{s'_1} \Rightarrow \boxed{s'=-70\text{ cm}}$$

Esta imagen hace de objeto con respecto al espejo plano; la imagen se forma a 70 cm detrás de él. Esta imagen, a su vez, hace de objeto con respecto al dioptrio esférico:

$$n_2\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right]=n'_2\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_2}\right] \Rightarrow \frac{1,4}{30}-\frac{1,4}{70}=\frac{1}{30}-\frac{1}{s'_2} \Rightarrow s'_2=150\text{ cm}$$

(Hemos tomado en los dos casos las distancias como negativas o positivas, según estén ante o tras la lente.)

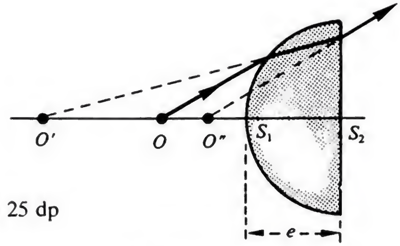
2) La imagen es virtual y situada 150 cm detrás de la lente y, por tanto, detrás del espejo:

$$\left.\begin{array}{l}\beta'_1=\dfrac{s'_1}{s_1}\dfrac{n_1}{n'_1}=\dfrac{-70}{-30}\dfrac{1}{1,4}\\[2ex] \beta'_2=\dfrac{s'_2}{s_2}\dfrac{n_2}{n'_2}=\dfrac{150}{70}\dfrac{1,4}{1}\end{array}\right| \Rightarrow \beta'=\beta'_1\beta'_2=\frac{70}{30}\frac{1}{1,4}\frac{150}{70}\frac{1,4}{1}=5$$

(El aumento del espejo plano es 1.)

$\boxed{\text{La imagen es derecha y de 5 mm de altura.}}$

Problema 21. Averiguar la potencia de una lente semiesférica de vidrio ($n = 1{,}5$) de radio 2 cm. Un objeto de 2 mm de altura está colocado ante ella a una distancia de 1 cm. Determinar la posición y tamaño de la imagen.



Problema XXXV-21

Solución

Supondremos que por la cara curva entran los rayos que provienen del objeto.

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{e(n-1)}{nr_1r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right] \quad \begin{vmatrix} n = 1{,}5 \\ e = 2 \text{ cm} \\ r_1 = 2 \text{ cm} \\ r_2 = \infty \end{vmatrix} \quad \varphi' = (1{,}5-1)\,\frac{1}{0{,}02} = 25 \text{ dp}$$

$$n_1\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1}\right] = n'_1\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s'_1}\right] \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} - \frac{1}{-1} = \frac{1{,}5}{2} - \frac{1{,}5}{s'_1} \;\Rightarrow\; s'_1 = -2 \text{ cm}$$

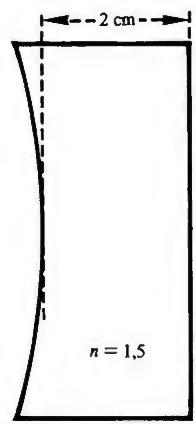
La imagen se forma a 2 cm delante del polo del dioptrio esférico y, por tanto, a 4 cm ante el dioptrio plano.

$$\frac{s_2}{n_2} = \frac{s'_2}{n'_2} \;\Rightarrow\; \frac{-4}{1{,}5} = \frac{s'_2}{1} \;\Rightarrow\; \boxed{s'_2 = -2{,}66 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual y a 2,66 cm delante de la cara plana de la lente.

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{s'_1}{s_1}\,\frac{n_1}{n'_1} = \frac{-2}{-1}\,\frac{1}{1{,}5} = 1{,}33 \\ \beta_2 &= \frac{s'_2}{s_2}\,\frac{n_2}{n'_2} = \frac{-2{,}66}{-4}\,\frac{1{,}5}{1} = 1 \end{aligned}\right| \;\Rightarrow\; \beta = \frac{y'}{y} = \beta_1\beta_2 = 1{,}33 \;\Rightarrow\; \boxed{y' = 1{,}33 \times 2 = 2{,}66 \text{ mm}}$$

Problema 22. El espesor de la lente de la figura es 2 cm y el radio de su cara curva 10 cm. Determinar su potencia y la posición de la imagen de un objeto situado 10 cm ante la lente y el aumento del sistema ($n = 1{,}5$).



Problema XXXV-22

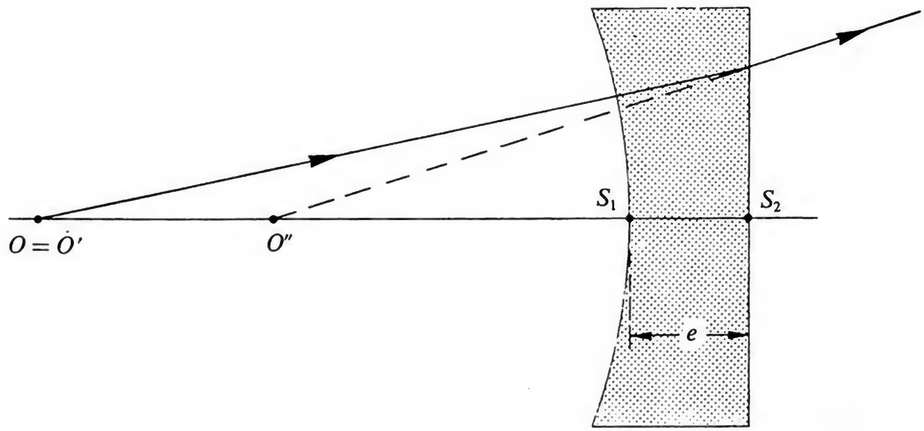
Solución

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{e(n-1)}{nr_1r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right] \quad \begin{vmatrix} e = 2 \text{ cm} \\ n = 1{,}5 \\ r_1 = -10 \text{ cm} \\ r_2 = \infty \end{vmatrix} \quad \boxed{\varphi' = -\frac{0{,}5}{0{,}1} = -5 \text{ dp}}$$

$$n_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s_1}\right) = n'_1\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{s'_1}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{-10} - \frac{1}{-10} = \frac{1{,}5}{-10} - \frac{1{,}5}{s'_1} \;\Rightarrow\; s'_1 = -10 \text{ cm}$$

(La imagen de un objeto situado en el centro de un dioptrio se forma en el centro del dioptrio.) La imagen está situada a 10 + 2 = 12 cm delante de la cara plana de la lente.

$$\frac{s_2}{n_2} = \frac{s'_2}{n'_2} \;\Rightarrow\; \frac{-12}{1{,}5} = \frac{s'_2}{1} \;\Rightarrow\; \boxed{s'_2 = -8 \text{ cm}}$$



Problema XXXV-22-1.ª

La imagen es virtual y a 8 cm delante de la cara plana.

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{s'_1}{s_1}\,\dfrac{n_1}{n'_1} = \dfrac{-10}{-10}\,\dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{1}{1{,}5} \\[2ex] \beta_2 = \dfrac{s'_2}{s_2}\,\dfrac{n_2}{n'_2} = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\beta = \beta_1\beta_2 = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3}}$$

Problema 23. Los radios de curvatura de una lente menisco-convergente son 10 y 20 cm. Su espesor es 1 cm. Determinar su convergencia y la posición de un objeto para que forme su imagen virtual a 1 m delante de la lente. Calcular el aumento del sistema (n = 1,5).

Solución

Supondremos (aunque es lo mismo para los resultados) que la luz penetra por la cara convexa (10 cm de radio).

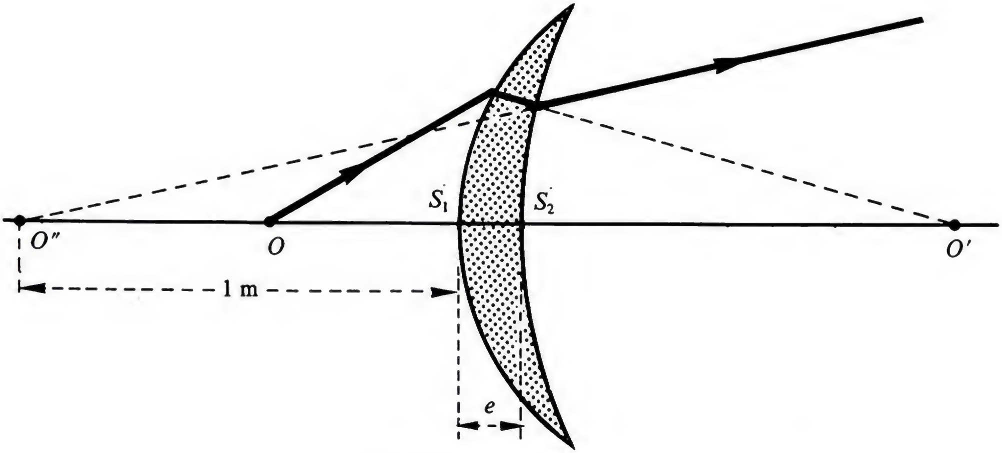
$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{e(n-1)}{nr_1r_2} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right] \left| \begin{array}{l} n = 1{,}5 \\ e = 1\ \text{cm} \\ r_1 = 10\ \text{cm} \\ r_2 = 20\ \text{cm} \end{array} \right| \boxed{\varphi' = 0{,}5\left[\frac{0{,}01\times 0{,}5}{1{,}5\times 0{,}1\times 0{,}2} - \frac{1}{0{,}2} + \frac{1}{0{,}1}\right] = 2{,}58\ \text{dp}}$$

La imagen definitiva está a:

$$s'_2 = -\ 101\ \text{cm}$$

de la cara de 20 cm de radio. El objeto que ha producido esta imagen estará:

$$n_2\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s_2}\right] = n'_2\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{s'_2}\right] \Rightarrow \frac{1{,}5}{20} - \frac{1{,}5}{s_2} = \frac{1}{20} - \frac{1}{-101} \Rightarrow s_2 = 99{,}3\ \text{cm}$$



Problema XXXV-23

La imagen producida por la primera cara está situada a $s'_1 = 99{,}3 + 1 = 100{,}3$ cm de su polo, luego:

$$n_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right]=n'_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'_1}\right] \Rightarrow \frac{1}{10}-\frac{1}{s_1}=\frac{1{,}5}{10}-\frac{1{,}5}{100{,}3} \Rightarrow \boxed{s_1=-\ 28{,}5\text{ cm}}$$

$$\beta_1=\frac{s'_1}{s_1}\,\frac{n_1}{n'_1}=\frac{100{,}3}{-28{,}5}\,\frac{1}{1{,}5}$$

$$\beta_2=\frac{s'_2}{s_2}\,\frac{n_2}{n'_2}=\frac{-101}{99{,}3}\,\frac{1{,}5}{1}$$

$$\boxed{\beta=\beta_1\beta_2=\frac{100{,}3}{-28{,}5}\,\frac{-101}{99{,}3}=3{,}6}$$

Problema 24. Resolver el mismo problema anterior, suponiendo la lente menisco divergente.

Solución

Supondremos (aunque es lo mismo para los resultados) que la luz penetra por la cara de 20 cm de radio.

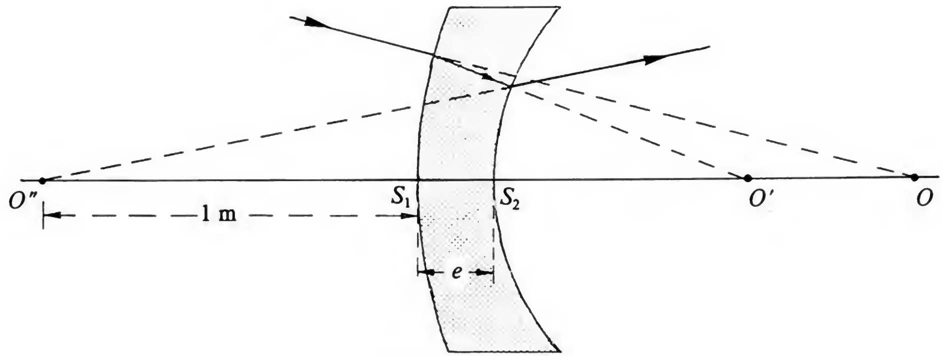
$$\varphi'=(n-1)\left[\frac{e(n-1)}{nr_1r_2}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right] \quad \begin{array}{l} n=1{,}5 \\ e=1\text{ cm} \\ r_1=20\text{ cm} \\ r_2=10\text{ cm}\end{array}$$

$$\boxed{\varphi'=0{,}5\left[\frac{0{,}01\times 0{,}5}{1{,}5\times 0{,}1\times 0{,}2}-\frac{1}{0{,}1}+\frac{1}{0{,}2}\right]=-\ 4{,}83\text{ dp}}$$

Razonando como en el problema anterior, obtenemos:

$$n_2\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s_2}\right]=n'_2\left[\frac{1}{r_2}-\frac{1}{s'_2}\right] \Rightarrow \frac{1{,}5}{10}-\frac{1{,}5}{s_2}=\frac{1}{10}-\frac{1}{-101} \Rightarrow s_2=37{,}4\text{ cm}$$

$$n_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s_1}\right]=n'_1\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{s'_1}\right] \Rightarrow \frac{1}{20}-\frac{1}{s_1}=\frac{1{,}5}{20}-\frac{1{,}5}{38{,}4} \Rightarrow \boxed{s_1=71\text{ cm}}$$



Problema XXXV-24

El objeto ha de ser virtual y a 71 cm de la cara de entrada.

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \dfrac{s_1'}{s_1}\,\dfrac{n_1}{n_1'} = \dfrac{38,4}{71}\,\dfrac{1}{1,5} \\[2ex] \beta_2 = \dfrac{s_2'}{s_2}\,\dfrac{n_2}{n_2'} = \dfrac{-101}{37,4}\,\dfrac{1,5}{1} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\beta = \beta_1\beta_2 = -\dfrac{38,4 \times 101}{71 \times 37,4} = -1,46}$$

Problema 25. Se tiene una lente delgada plano-convexa, de índice de refracción 1,5 y radio de la cara convexa igual a 10 cm. En contacto con la cara plana hay una lámina de vidrio de 1 cm de espesor e índice de refracción igual a 1,4. Determinar:

1. La potencia de la lente.

2. ¿Dónde se forma la imagen de un objeto situado en el lado de la lámina plana y a 5 cm de la misma?

3. ¿Dónde se forma la imagen de un objeto situado del lado de la cara convexa y a 10 cm de ella?

Solución

1)

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = 0,5\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0,1}\right] = 5 \text{ dp}$$

2) Imagen en el primer dioptrio plano:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \Rightarrow \frac{1}{-5} = \frac{1,4}{s'} \Rightarrow s' = -7 \text{ cm}$$

Este punto hace de objeto con respecto al segundo dioptrio plano, estando situado a 7 + 1 = 8 cm ante él:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \Rightarrow \frac{1,4}{-8} = \frac{1,5}{s'} \Rightarrow s' = -8,57 \text{ cm}$$

Tal imagen hace de objeto con respecto al dioptrio esférico:

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1{,}5}{-10}-\frac{1{,}5}{-8{,}57}=\frac{1}{-10}-\frac{1}{s'} \Rightarrow \boxed{s'=-8\text{ cm}}$$

La imagen es virtual y se forma a 8 cm ante el polo de la cara curva, es decir, a 7 cm de la cara frontal de la lámina.

3) Imagen en el dioptrio esférico:

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \Rightarrow \frac{1}{10}-\frac{1}{-10}=\frac{1{,}5}{10}-\frac{1{,}5}{s'} \Rightarrow s'=-30\text{ cm}$$

Esta imagen hace de objeto con respecto al dioptrio plano que separa los medios de índice de refracción 1,5 y 1,4.

$$\frac{n}{s}=\frac{n'}{s'} \Rightarrow \frac{1{,}5}{-30}=\frac{1{,}4}{s'} \Rightarrow s'=-28\text{ cm}$$

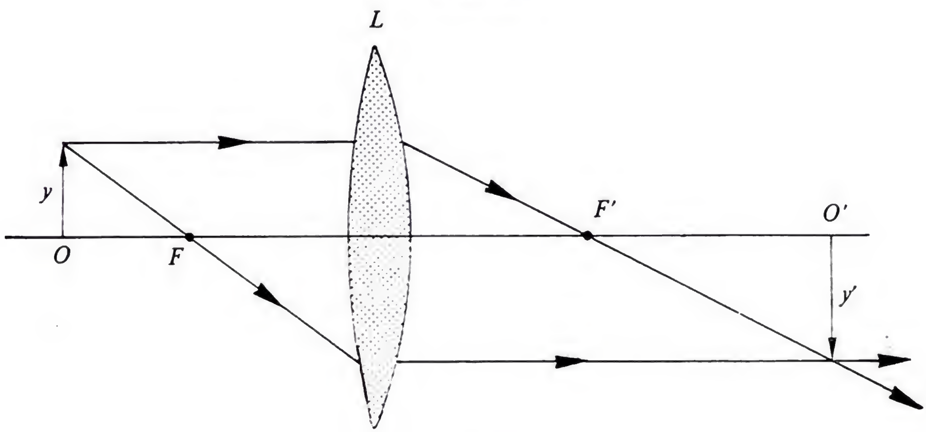
La imagen queda situada a 28 + 1 = 29 cm ante el dioptrio plano de salida.

$$\frac{n}{s}=\frac{n'}{s'} \Rightarrow \frac{1{,}4}{-29}=\frac{1}{s'} \Rightarrow \boxed{s'=-20{,}7\text{ cm}}$$

La imagen es virtual y a 20,7 cm ante la cara plana en contacto con el aire y a 20,7 − 1 = 19,7 cm ante el polo del dioptrio esférico.
(En todo el problema se ha considerado nulo el espesor de la lente.)

Problema 26. Se tiene una lenta biconvexa de vidrio (n = 1,5) de potencia de 2,5 dp; el radio de una de las caras es de 60 cm. Determinar:
1. El radio de la otra cara.
2. Delante de ella, a 50 cm, se coloca un objeto de 3 cm de altura; determinar la posición de la imagen.
3. Calcular el tamaño de la imagen anterior y el aumento.
4. Yuxtapuesta con la anterior se coloca una lente divergente del mismo vidrio, de potencia 4 dp; ¿cuál será la potencia del sistema?

Solución



Problema XXXV-26

1)

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow 2{,}5 = 0{,}5\left[\frac{1}{0{,}6} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow \boxed{r_2 = -\,0{,}3\text{ m} = -\,30\text{ cm}}$$

2)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}5} + \frac{1}{a'} = 2{,}5 \Rightarrow \boxed{a' = 2\text{ m}}\text{ Imagen real}$$

3)

$$\boxed{\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{2}{-0{,}5} = -\,4} \Rightarrow \boxed{y' = -\,4 \times 3 = -\,12\text{ cm}}\text{ Invertida}$$

4)

$$\boxed{\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 = 2{,}5 - 4 = -\,1{,}5\text{ dp}}$$

Problema 27. Un doblete plano convexo está formado por el acoplamiento de dos lentes: una biconvexa, de índice de refracción 1,6, y otra plano-cóncava, de índice de refracción 1,5. Los radios de las superficies curvas valen 10 cm. Determinar:

1. Potencia de cada lente.

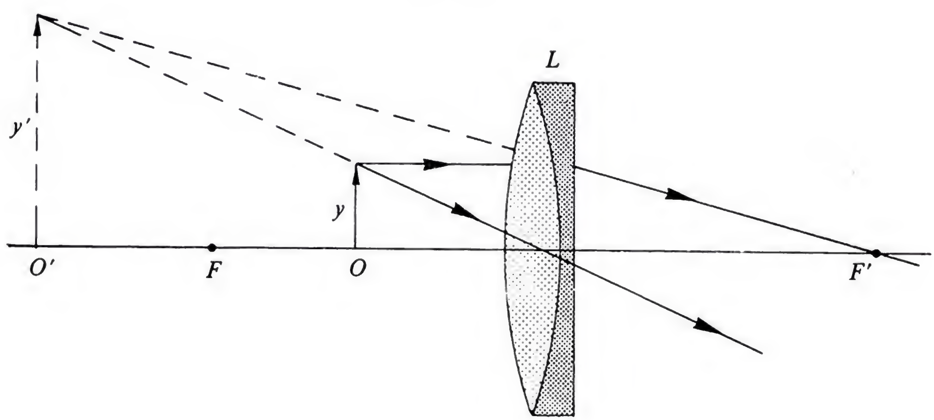
2. Potencia del doblete.

3. Naturaleza y posición de la imagen que produce el sistema de un objeto situado a 10 cm de la lente y situado en el eje principal.

4. Si el objeto tiene de tamaño 2 mm, ¿cuál será el tamaño de la imagen?

Solución

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$



Problema XXXV-27

1) y 2)

$$\varphi'_1 = 0{,}6\left[\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{-0{,}1}\right] = 12 \text{ dp}$$

$$\varphi'_2 = 0{,}5\left[\frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{\infty}\right] = -5 \text{ dp}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi'_1 + \varphi'_2 = 7 \text{ dp}}$$

3)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}1} + \frac{1}{a'} = 7 \Rightarrow \boxed{a' = -\frac{1}{3}\text{ m}}$$

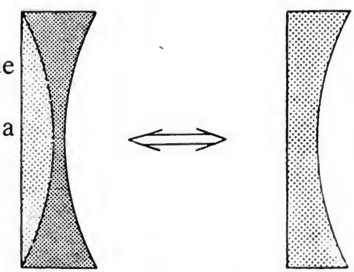
Imagen virtual.

4)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{-1/3}{-0{,}1} = \frac{10}{3} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{10}{3}2 = 6{,}7 \text{ mm}}$$

Imagen derecha y de 6,7 mm de altura.

Problema 28. Un doblete está formado por la unión de dos lentes, una plano-convexa y otra bicóncava; el índice de refracción de la primera es de 1,3 y el de la segunda 1,4. El radio de las superficies curvas es de 10 cm. Determinar:
1. La potencia del sistema.
2. El radio de la lente plano-cóncava equivalente, si se hace con un vidrio de índice de refracción 1,5.
3. ¿Dónde se formará la imagen de un punto situado sobre el eje del sistema, a 15 cm del mismo?



Problema XXXV-28-1.ª

Solución

1)

$$\varphi'_1 = (n_1 - 1)\left[\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r'_2}\right] = 0{,}3\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-0{,}1}\right] = 3 \text{ dp}$$

$$\varphi'_2 = (n_2 - 1)\left[\frac{1}{r''_1} - \frac{1}{r''_2}\right] = 0{,}4\left[\frac{1}{-0{,}1} - \frac{1}{0{,}1}\right] = -8 \text{ dp}$$

$$\boxed{\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 = 3 - 8 = -5 \text{ dp}}$$

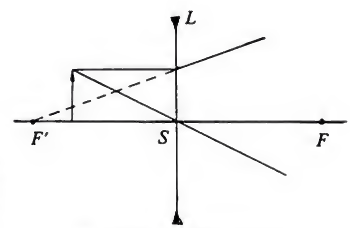
2)

$$-5 = 0{,}5\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right] \Rightarrow \boxed{r = 0{,}1 \text{ m} = 10 \text{ cm}}$$

3)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}15} + \frac{1}{a'} = -5 \Rightarrow \boxed{a' = -0{,}086 \text{ m} = -8{,}6 \text{ cm}}$$

Imagen virtual.



Problema XXXV-28-2.ª

Problema 29. Se tiene una lente plano-convexa de índice de refracción $n_1 = 1{,}3$ y radio $r_1 = 15$ cm; por su cara plana se une a la cara plana de otra plano-cóncava de índice de refracción $n_2 = 1{,}4$ y radio $r_2 = 10$ cm. Determinar:

1. La potencia en dioptrías de cada una y del sistema formado por ambas.
2. La posición, tamaño y naturaleza de la imagen de un objeto de 2 mm situado en el eje principal del sistema y a 40 cm del mismo. Las lentes se consideran como delgadas.

Solución

1)

$$\varphi'_1 = (n_1 - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1}\right] = 0{,}3\left[\frac{1}{0{,}15} - \frac{1}{\infty}\right] = 2 \text{ dp}$$

$$\varphi'_2 = (n_2 - 1)\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_2}\right] = 0{,}4\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{0{,}1}\right] = -4 \text{ dp}$$

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 = 2 - 4 = -2 \text{ dp}$$

2)

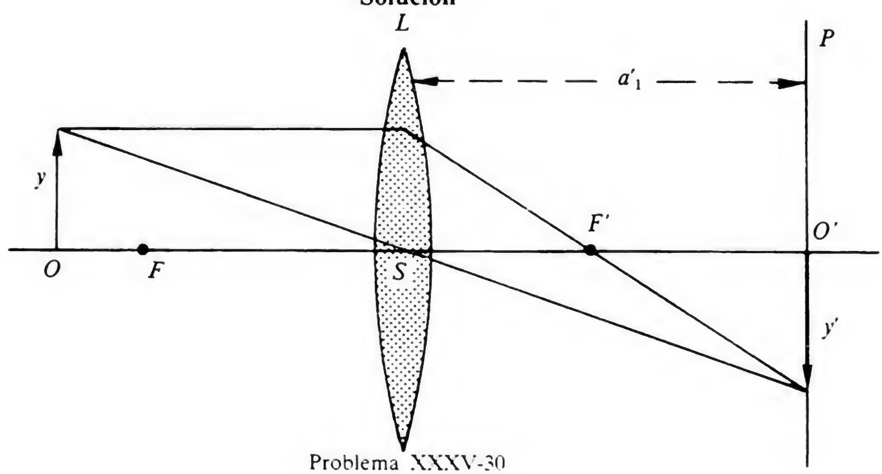
$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \varphi' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}4} + \frac{1}{a'} = -2 \Rightarrow \boxed{a' = -0{,}22 \text{ m} = -22 \text{ cm}}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \Rightarrow \frac{y'}{2} = \frac{-22}{-40} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{2 \times 22}{40} = 1{,}1 \text{ mm}}$$

Imagen virtual, derecha, a 22 cm ante el sistema y de 1,1 mm de altura.

Problema 30. Una lente convergente de radios iguales y distancia focal 50 cm proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto de 5 cm de longitud.
1. Calcular la distancia de la pantalla a la lente para que la imagen sea de longitud igual a 4 dm.
2. Si el índice de refracción de la lente es igual a 1,5, ¿qué valor tienen los radios de la lente y cuál es el poder convergente de la misma?
3. Acoplando a la lente primera otra para que la imagen sea doble que el objeto, ¿qué clase de lente debe emplearse y cuál será la convergencia del sistema?

Solución



Problema XXXV-30

1) La imagen tiene que ser real para que sea proyectable.

$$-\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{f'_1} \quad \Bigg| \quad -\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a'_1}=\frac{1}{50} \quad \Bigg| \quad a_1=-56{,}25 \text{ cm}$$

$$\beta'_1=\frac{y'_1}{y_1}=\frac{a'_1}{a_1} \quad \Bigg| \quad \frac{-40}{5}=\frac{a'_1}{a_1} \quad \Bigg| \quad \boxed{a'_1=450 \text{ cm}}$$

2)

$$\varphi'_1=\frac{1}{f'}=(n-1)\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow \frac{1}{0{,}5}=0{,}5\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{-r}\right] \Rightarrow \boxed{r=0{,}5 \text{ m}=50 \text{ cm}}$$

3) Supondremos que la imagen es real y que la posición del objeto es la misma que en el caso anterior:

$$\beta'=\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}=-2 \quad \Bigg| \quad a'=-2a=-2(-0{,}5625)=1{,}125 \text{ m}$$

$$a=a_1=-0{,}5625 \text{ m}$$

$$\varphi'=\varphi'_1+\varphi'_2=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'} \Rightarrow \varphi'=-\frac{1}{-0{,}5625}+\frac{1}{1{,}125} \Rightarrow \varphi'=2{,}67 \text{ dp}$$

y como $\varphi'_1=2$ dp, la lente acoplada tendrá:

$$\boxed{\varphi'_2=\varphi'-\varphi'_1=0{,}67 \text{ dp}}$$

Problema 31. Se tiene un sistema óptico formado por una lente convergente de 5 dp y una lente divergente de potencia desconocida, ambas yuxtapuestas con el mismo eje principal. Un objeto de 5 cm de altura situado 40 cm de distancia a la izquierda del sistema forma una imagen real situada 80 cm a la derecha del mismo.

1. ¿Cuál es la distancia focal y la potencia de la lente divergente del sistema?

2. ¿Cuál es el tamaño de la imagen dada por el sistema?

3. ¿Cómo se modifica la situación y el tamaño de esta imagen si se yuxtapone al sistema una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de 3 cm de espesor e índice de refracción 1,5? La lámina está al mismo lado del sistema que el objeto.

Solución

1)

$$\varphi'=\frac{1}{f'}=-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'} \quad \Bigg| \quad -\frac{1}{-0{,}4}+\frac{1}{0{,}8}=3{,}75 \text{ dp (sistema)}$$

$$\boxed{\varphi'_2=3{,}75-5=-1{,}25 \text{ dp}}$$

$$\boxed{f'_2=\frac{1}{\varphi'_2}=\frac{1}{-1{,}25} \text{ m}=-80 \text{ cm}}$$

2)

$$\boxed{y'=y\,\frac{a'}{a}=5\,\frac{80}{-40}=-10 \text{ cm}}$$

3) Al colocar la lámina plano-paralela entre el objeto y la lente la imagen a través de la lámina (que hace de objeto para la lente) se desplazará hacia la derecha una distancia y:

$$y = e\left[1 - \frac{n'}{n}\right] = 3\left[1 - \frac{1}{1{,}5}\right] = 1 \text{ cm}$$

luego la distancia objeto para la lente es -39 cm.

$$3{,}75 = -\frac{1}{-0{,}39} + \frac{1}{a'} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a' = -0{,}84 \text{ m}}$$

$$\boxed{y' = y\,\frac{a'}{a} = 5\,\frac{0{,}84}{-0{,}39} = -10{,}8 \text{ cm}}$$

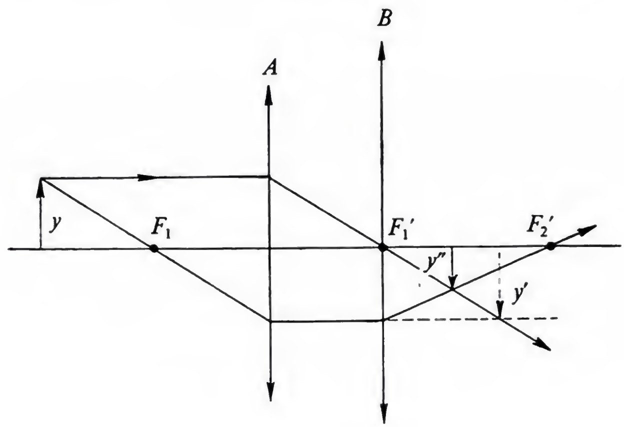
Problema 32. Dos lentes convergentes A y B de 9 y 15 cm, respectivamente, de distancia focal forman un sistema centrado de tal modo que la lente B está situada en el plano focal de la A. Un objeto de 2 cm de altura se sitúa a una distancia de 36 cm delante de la lente A.

1. Construir gráficamente la imagen del objeto formado por el sistema.

2. Determinar la naturaleza, tamaño y distancia de la imagen a la lente B.

Solución

1)



Problema XXXV-32

2)

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \frac{1}{9} = -\frac{1}{-36} + \frac{1}{a'} \quad \Rightarrow \quad a' = 12 \text{ cm}$$

La distancia objeto para la segunda lente es 3 cm (objeto virtual).

$$\frac{1}{15} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{a''} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a'' = \frac{15}{6} \text{ cm}} \text{ (real)}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \qquad y' = 2\,\frac{12}{-36} = -\frac{2}{3} \text{ cm}$$

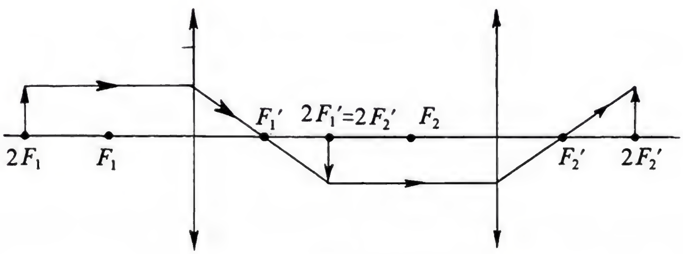
$$\boxed{y'' = -\frac{2}{3}\,\frac{15}{6 \times 3} = -\frac{5}{9} \text{ cm}}$$

Problema 33. Tenemos un sistema óptico formado por dos lentes convergentes de 20 dp cada una, separadas entre sí 20 cm. Un objeto vertical de 5 cm está situado 10 cm a la izquierda de la primera lente sobre el eje óptico.
1. Representar gráficamente la marcha geométrica de los rayos a través de todo el sistema hasta formar la imagen definitiva de dicho objeto.
2. Determinar la naturaleza, el tamaño y la posición de la imagen definitiva, así como las características de la imagen formada por la primera lente.
3. Calcular el aumento de todo el sistema óptico.

Solución

$$\varphi' = 20 \text{ dp} \qquad f' = \frac{1}{20} \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

1)



Problema XXXV-33

2)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad \left| \quad \begin{aligned} &\frac{1}{5} = -\frac{1}{-10} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \boxed{a' = 10 \text{ cm}} \\ &\frac{1}{5} = -\frac{1}{-10} + \frac{1}{a''} \Rightarrow \boxed{a'' = 10 \text{ cm}} \text{ (real)} \end{aligned} \right.$$

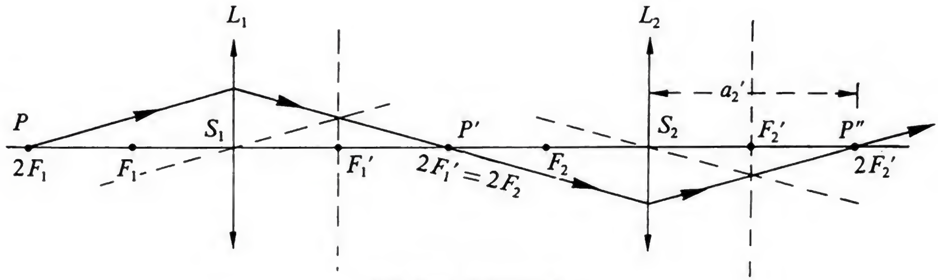
3)

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = 1 \quad \boxed{\text{Imagen de igual tamaño que el objeto.}}$$

Problema 34. Dos lentes convergentes de 2 dp están una enfrente de otra, con sus ejes coincidiendo. La distancia entre sus centros ópticos es de 2 m. Delante de una de las lentes (fuera del espacio comprendido entre ellas, y a 1 m de distancia de su centro óptico, se coloca, en el eje, un punto luminoso. Determinar la posición de la imagen formada por el sistema. (Consideramos la zona paraxial.)

Solución

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow f_1 = f_2 = \frac{1}{2} \text{ m} = 50 \text{ cm}$$



Problema XXXV-34

La imagen en la primera de las lentes se formará a una distancia dada por:

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \varphi'_1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{-1} + \frac{1}{a'_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad a'_1 = 1 \text{ m}$$

Esta imagen hace de objeto con respecto a la segunda lente; la distancia de tal punto al centro óptico es:

$$a_2 = -(2 - 1) = -1 \text{ m}$$

$$-\frac{1}{-1} + \frac{1}{a'_2} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{a'_2 = 1 \text{ m}}$$

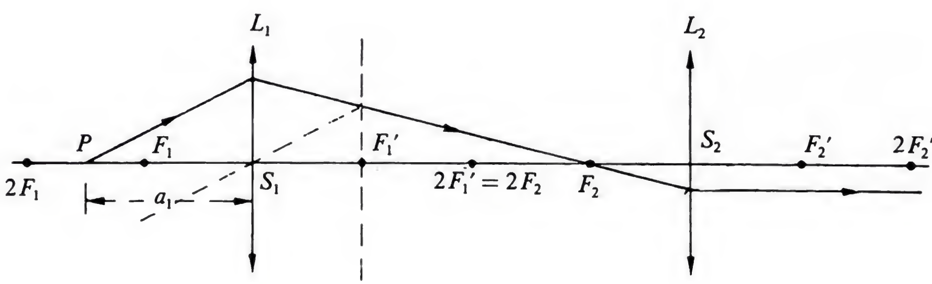
La imagen es real, derecha (la primera imagen es invertida con respecto al objeto y la segunda es invertida con respecto a la primera) y situada a 1 m del centro óptico de la segunda lente. El aumento, producto de los aumentos, será:

$$\beta' = \beta'_1\beta'_2 = \frac{a'_1}{a_1}\frac{a'_2}{a_2} = \frac{1}{-1}\frac{1}{-1} = 1$$

La imagen es de la misma altura que el objeto.

Problema 35. Buscar la posición de un punto del eje en el sistema óptico del problema anterior para que los rayos emergentes de la segunda lente sean paralelos al eje principal. (Consideramos la zona paraxial.)

Solución



Problema XXXV-35

La imagen del punto objeto en la primera lente debe ser el foco objeto de la segunda, estando, por tanto, a una distancia del centro óptico de la primera de las lentes:

$$a'_1 = 2 - f_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1{,}5 \text{ m}$$

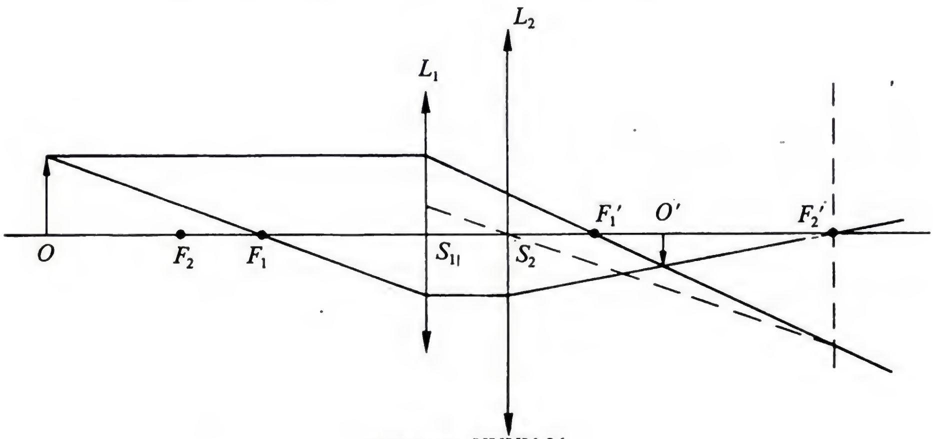
$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{1{,}5} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = -0{,}75 \text{ m} = -75 \text{ cm}}$$

El punto objeto está a 75 cm ante el centro óptico de la primera lente.

Problema 36. Determinar la posición y tamaño de la imagen de un objeto de 1,2 cm de altura situado ante un sistema constituido por dos lentes delgadas de eje común y cuyas focales son 4 y 8 cm y la distancia entre ellas 2 cm. El objeto está situado 20 cm ante la primera lente.

Solución

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{f'_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a'_1} = \frac{1}{-20} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad a'_1 = 5 \text{ cm}$$



Problema XXXV-36

Esta imagen está situada a $5 - 2 = 3$ cm detrás de la segunda lente.

$$\frac{1}{a'_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a'_2 = \frac{24}{11} = 2{,}2 \text{ cm}}$$

detrás de la segunda lente.

$$\beta = \beta_1\beta_2 = \frac{y'_1}{y_1}\frac{y'_2}{y_2} = \frac{y'_2}{y_1} = \frac{a'_1}{a_1}\frac{a'_2}{a_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'_2}{1{,}2} = \frac{5}{-20}\frac{2{,}2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'_2 = -0{,}2 \text{ cm}}$$

Problema 37. Dos lentes convergentes A y B de 10 y 20 dp, respectivamente, y con el eje principal común, están separadas entre sí 24 cm. Delante de la lente A y a 20 cm de distancia se sitúa un objeto de 2 cm de altura.

1. Construir el diagrama de formación de la imagen para esta combinación de lentes.

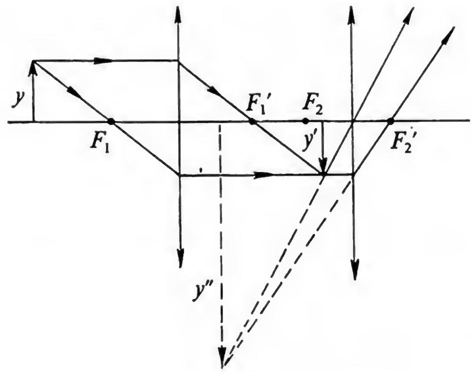
2. Determinar la posición, naturaleza y tamaño de la imagen que da la primera lente, así como las mismas características ofrecidas por la combinación de *A* y *B*.

Solución

1)

$\varphi'_1 = 10$ dp $f_1 = 10$ cm

$\varphi'_2 = 20$ dp $f_2 = 5$ cm



Problema XXXV-37

2)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

$$\frac{1}{10} = -\frac{1}{-20} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \boxed{a' = 20 \text{ cm}}$$

La distancia objeto para la segunda lente será:

$$20 - 24 = -4 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{5} = -\frac{1}{-4} + \frac{1}{a''} \Rightarrow \boxed{a'' = -20 \text{ cm}} \text{ (virtual)}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$$

$$\boxed{y' = 2\,\frac{20}{-20} = -2 \text{ cm}}$$

(Imagen real que da la primera lente.)

$$\boxed{y'' = -2\,\frac{-20}{4} = 10 \text{ cm}}$$

(Imagen virtual que corresponde al sistema.)

Problema 38. Se tiene una lente delgada, convergente, de 10 cm de distancia focal. En el foco de esta lente hay otra, también delgada, divergente y de 15 cm de distancia focal. Determinar:

1. La potencia del sistema.

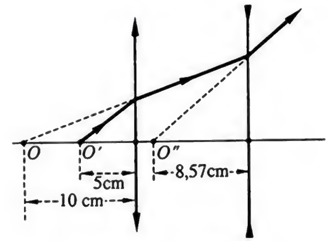
2. Posición de la imagen de un objeto en el eje principal del sistema a 5 cm de la lente convergente y 15 de la divergente.

3. Dibujar un esquema indicando la marcha de la luz en la formación de la imagen.

Solución

1)

$$\boxed{\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' - d\varphi_1'\varphi_2' = \frac{1}{0{,}10} + \frac{1}{-0{,}15} - 0{,}10\,\frac{1}{0{,}10}\,\frac{1}{-0{,}15} = 10 \text{ dp}}$$



Problema XXXV-38

2) Imagen en la lente convergente:

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow -\frac{1}{-5} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{10} \Rightarrow a_1' = -10 \text{ cm}$$

Esta imagen queda situada a 10 + 10 = 20 cm ante la lente divergente.

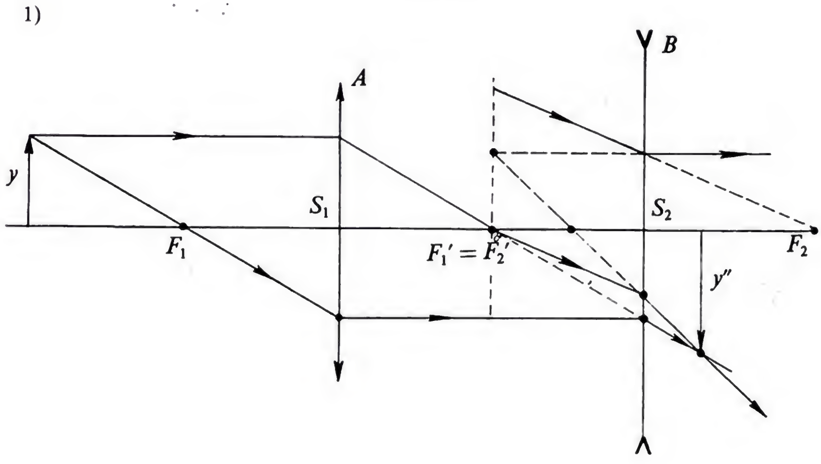
$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow -\frac{1}{-20} + \frac{1}{a_2'} = \frac{1}{-15} \Rightarrow \boxed{a_2' = -8{,}57 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual y situada a 8,57 cm ante el centro de la lente divergente.

Problema 39. Una lente convergente A y otra divergente B, de 10 y -20 dp, respectivamente, y con el eje principal común están separadas entre sí 15 cm. Delante de la lente A y a 25 cm de distancia se sitúa un objeto de 3 cm de altura.
1. Construir el diagrama de formación de la imagen para esta combinación de lentes.
2. Determinar la posición, naturaleza y tamaño de la imagen que da la primera lente, así como las mismas características ofrecidas por la combinación de A y B.

Solución

1)



Problema XXXV-39

2)

$$f_1 = 10 \text{ cm}$$
$$f_2 = -5 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \frac{1}{10} = -\frac{1}{-25} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \boxed{a' = \frac{50}{3} \text{ cm}}$$

La distancia a la segunda lente será:

$$\frac{50}{3} - 15 = \frac{5}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{1}{-5} = -\frac{1}{5/3} + \frac{1}{a''} \Rightarrow \boxed{a'' = \frac{5}{2} \text{ cm} \quad \text{(real)}}$$

Luego:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \qquad \boxed{y' = -\frac{50}{3 \times 25}3 = -2 \text{ cm}}$$

$$\boxed{y'' = (-2)\frac{5/2}{5/3} = -3 \text{ cm}}$$

Problema 40. Un sistema óptico está formado por dos lentes de las siguientes características: a) Lente biconvexa de radios $r_1 = 10$ cm y $r_2 = 20$ cm; índice de refracción $n_1 = 1{,}3$. b) Lente plano-cóncava de radio $r_3 = 25$ cm; índice de refracción $n_2 = 1{,}4$. La separación entre ambas es de 5 cm. Determinar:

1. La potencia de cada lente en dp.
2. La potencia del sistema.
3. Posición y naturaleza de la imagen de un objeto situado en el eje principal del sistema, en el lado de la lente convergente y a 30 cm de ella.

Solución

1)

$$\boxed{\varphi_1' = (n_1 - 1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = 0{,}3\left[\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{-0{,}2}\right] = 4{,}5 \text{ dp}}$$

$$\boxed{\varphi_2' = (n_2 - 1)\left[\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right] = 0{,}4\left[\frac{1}{-0{,}25} - \frac{1}{\infty}\right] = -1{,}6 \text{ dp}}$$

2)

$$\boxed{\varphi' = \varphi_1' + \varphi_2' - d\varphi_1'\varphi_2' = 4{,}5 - 1{,}6 + 0{,}05 \times 4{,}5 \times 1{,}6 = 3{,}26 \text{ dp}}$$

3)

$$-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \varphi_1' \Rightarrow -\frac{1}{-0{,}3} + \frac{1}{a_1'} = 4{,}5 \Rightarrow a_1' = 0{,}85 \text{ m} = 85 \text{ cm}$$

La imagen se debería formar a 85 − 5 = 80 cm tras la lente divergente. Tal imagen hace de objeto virtual respecto a ella:

$$-\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2'} = \varphi_2' \Rightarrow -\frac{1}{0{,}8} + \frac{1}{a_2'} = -1{,}6 \Rightarrow \boxed{a_2' = -2{,}8 \text{ m} = -280 \text{ cm}}$$

La imagen es virtual y situada a 280 cm ante la lente divergente.

Problema 41. Un objeto recto de 2 mm de altura está situado a 90 cm a la izquierda de una lente delgada divergente de 30 cm de distancia focal. A continuación de la lente divergente se dispone una lente delgada convergente de 5 dp de convergencia.

1. Determínese cuál debe ser la distancia entre las dos lentes para que la imagen definitiva del objeto anterior sea real y esté situada a 30 cm a la derecha de la lente convergente.

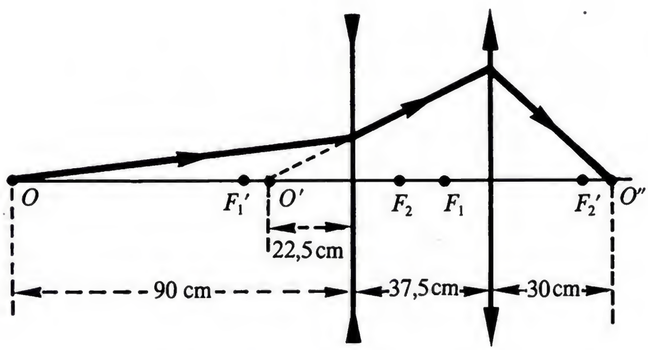
2. Dibújese la marcha aproximada de los rayos.

3. Determinar la potencia de una lente única que produzca el mismo efecto.

Solución

1)

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-90}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{-30} \Rightarrow a'=-22{,}5 \text{ cm}$$



Problema XXXV-41

Tal imagen está situada a 22,5 + x cm delante de la lente convergente de 5 dp, es decir, de 1/5 m = 20 cm de distancia focal.

$$-\frac{1}{-(22{,}5+x)}+\frac{1}{30}=\frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{x=37{,}5 \text{ cm}}$$

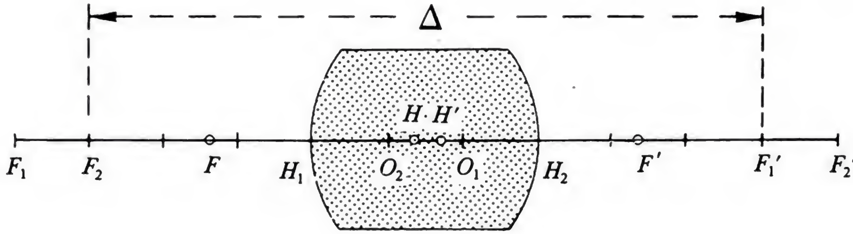
2) Para que en una lente única la imagen de un objeto situado a 90 cm ante ella se forme a 67,5 cm detrás sus dioptrías deberán ser:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\varphi' \Rightarrow \boxed{\varphi'=-\frac{1}{-0{,}9}+\frac{1}{0{,}675}\simeq 2{,}6 \text{ dp}}$$

Problema 42. Un cuerpo de vidrio de 3 cm de largo e índice de refracción 1,5 tiene dos caras, centradas en el mismo eje y talladas en forma de superficies esféricas de radios $r_1 = 2$ cm y $r_2 = -2$ cm. Determinar los puntos cardinales del sistema y su convergencia. Un objeto de 1 cm de altura está colocado normalmente al eje y a una distancia de 10 cm ante el polo del dioptrio de entrada. ¿Cuál es la posición y tamaño de la imagen?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = r_1 \dfrac{n_1'}{n_1' - n_1} \\[2ex] f_1 = -\, r_1 \dfrac{n_1}{n_1' - n_1} \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 = 2 \text{ cm} \\ n_1' = 1{,}5 \\ n_1 = 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} f_1' = 2 \dfrac{1{,}5}{1{,}5 - 1} = 6 \text{ cm} \\[2ex] f_1 = -\, 2 \dfrac{1}{1{,}5 - 1} = -\, 4 \text{ cm} \end{array}\right.$$



Problema XXXV-42-1.ª

$$\left.\begin{array}{l} f_2' = r_2 \dfrac{n_2'}{n_2' - n_2} \\[2ex] f_2 = -\, r_2 \dfrac{n_2}{n_2' - n_2} \end{array}\right| \begin{array}{l} r_2 = -\, 2 \text{ cm} \\ n_1' = 1 \\ n_2 = 1{,}5 \end{array} \left| \begin{array}{l} f_2' = -\, 2 \dfrac{1}{1 - 1{,}5} = 4 \text{ cm} \\[2ex] f_2 = 2 \dfrac{1{,}5}{1 - 1{,}5} = -\, 6 \text{ cm} \end{array}\right.$$

$$\Delta = F_1'F_2 = -\, 9 \text{ cm}$$

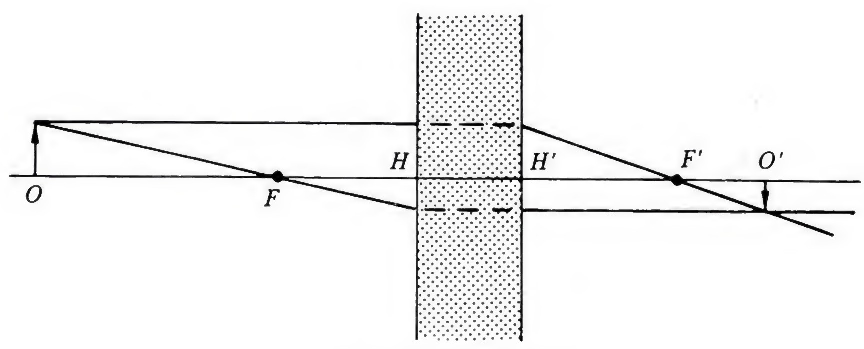
$$z' = F_2'F' = -\frac{f_2'f_2'}{\Delta} = -\frac{-\,6 \times 4}{-9} = -\frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$z = F_1F = \frac{f_1f_1}{\Delta} = \frac{-\,4 \times 6}{-9} = \frac{8}{3} \text{ cm}$$

$$f' = -\frac{f_1'f_2'}{\Delta} = -\frac{6 \times 4}{-9} = \frac{8}{3} \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\varphi' = \frac{300}{8} = 37{,}5 \text{ dp}}$$

$$f = \frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{(-4)\,(-6)}{-9} = -\frac{8}{3} \text{ cm}$$

Tomando a partir de F' y de F estas distancias focales cambiadas de signo, obtenemos H' y H.



Problema XXXV-42-2.ª

Si el objeto se encuentra a 10 cm del polo del primer dioptrio, entonces distará de H:

$$a = OH = -\left(10 + \frac{4}{3}\right) = -\frac{34}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a' = \frac{af'}{a-f} = \frac{-34 \times 8}{3 \times 3\left(-\frac{34}{3} + \frac{8}{3}\right)} = \frac{272}{78} \simeq 3{,}5 \text{ cm}}$$

contados a partir de H'.

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}\frac{f}{f} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1} = \frac{272 \times 3}{78(-34)} \quad \Rightarrow \boxed{y' = -0{,}3 \text{ cm}}$$

Problema 43. Una varilla de vidrio de 10 cm de longitud actúa como lente gruesa, teniendo el extremo izquierdo tallado y pulido en forma de casquete esférico convexo de 50 cm de radio y el extremo derecho está igualmente tallado y pulido simétrico al anterior.

1. Determínense las posiciones de los focos y planos principales de dicha lente.

2. Un objeto en forma de flecha de 1 mm de altura está situado a la distancia de 100 cm a la izquierda de la lente. Calcúlese la posición de la imagen del objeto formada por la lente utilizando sólo los rayos paraxiales.

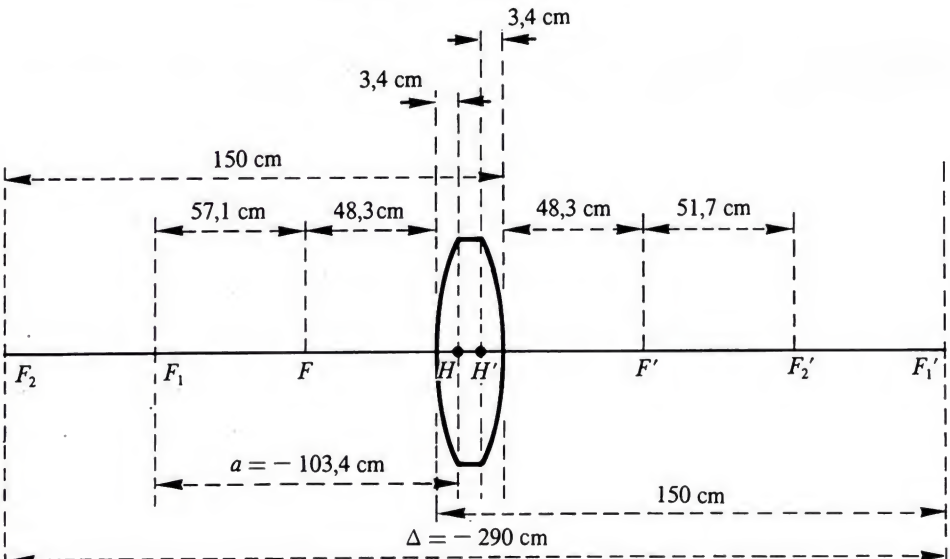
3. ¿Cuál es el tamaño de la imagen? ¿Es derecha o invertida? ¿Real o virtual? Indice de refracción del vidrio: 1,5.

Solución

1)

$$f_1 = -r_1 \frac{n_1}{n'_1 - n_1} = -50 \frac{1}{1{,}5 - 1} = -100 \text{ cm}$$

$$f'_1 = r_1 \frac{n'_1}{n'_1 - n_1} = 50 \frac{1{,}5}{1{,}5 - 1} = 150 \text{ cm}$$



Problema XXXV-43

$$f_2 = -\, r_2 \frac{n_2}{n'_2 - n_2} = -\,(-50)\frac{1{,}5}{1 - 1{,}5} = -\,150 \text{ cm}$$

$$f_2 = r_2 \quad \frac{n'_2}{n'_2 - n_2} = -\,50 \frac{1}{1 - 1{,}5} = 100 \text{ cm}$$

$$\Delta = F'_1F_2 = -\,290 \text{ cm}$$

$$z = F_1F = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} = \frac{-\,100 \times 150}{-290} = 51{,}7 \text{ cm}$$

$$z' = F'_2F' = -\,\frac{f_2 f'_2}{\Delta} = -\,\frac{-\,150 \times 100}{-290} = -\,51{,}7 \text{ cm}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{-\,100 \times (-150)}{-290} = -\,51{,}7 \text{ cm}$$

$$f' = -\,\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = -\,\frac{150 \times 100}{-290} = 51{,}7 \text{ cm}$$

En la figura han quedado localizados los focos y los planos principales del sistema.

2)

$$-\,\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad -\,\frac{1}{-103{,}4} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{51{,}7} \quad \Rightarrow \boxed{a' = 103{,}4 \text{ cm}}$$

La imagen se forma a 103,4 cm de H', es decir, a 100 cm del polo del segundo dioptrio. (Como el objeto está situado en el foco objeto del primer dioptrio, los rayos procedentes de él se propagan paralelos al eje en el interior de la lente y concurren en el foco imagen del segundo dioptrio.)

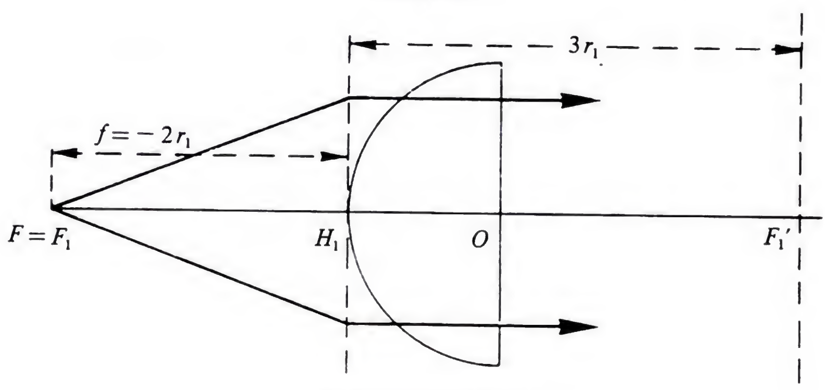
3)

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{1} = \frac{103{,}4}{-103{,}4} \quad \Rightarrow \boxed{y' = -\,1 \text{ mm}}$$

La imagen es real, invertida y del mismo tamaño que el objeto.

Problema 44. Determinar los puntos cardinales de una lente plano-convexa de 3,2 cm de radio, 3,2 cm de espesor e índice de refracción 1,5.

Solución



Problema XXXV-44-1.

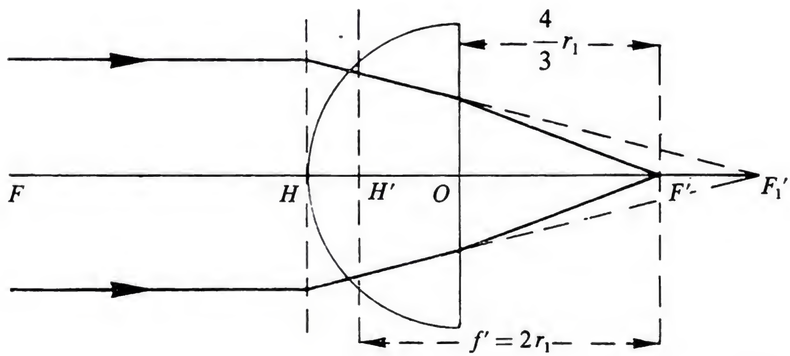
Supuesto el dioptrio esférico como cara de entrada de la luz, sus distancias focales son:

$$f_1' = r_1 \frac{n'}{n' - n} = r_1 \frac{1,5}{0,5} = 3r_1$$

$$f_1 = - r_1 \frac{n}{n' - n} = - r_1 \frac{1}{0,5} = - 2r_1$$

quedando así localizados F_1 y F_1' a partir de H_1.
Los rayos que parten de F_1 se propagan paralelamente al eje en el interior del vidrio, llegando normales a la cara plana y emergiendo paralelos al eje. F_1 es, por tanto, el foco objeto del sistema (F); H_1 es, asimismo, el plano principal objeto, ya que la prolongación de los rayos paralelos al eje que emergen del sistema cortan a los incidentes correspondientes en el plano normal al eje que pasa por H_1. Por tanto:

$$\boxed{f = - 2r_1}$$



Problema XXXV-44-2.ª

Para hallar F' habremos de encontrar el punto donde los rayos paralelos al eje en el espacio objeto se reúnen después de atravesar el sistema; tal punto es la imagen de F_1' en el dioptrio plano.

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1,5}{2r_1} = \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{2r_1}{1,5} = \frac{4}{3} r_1$$

Así queda localizado F'. La distancia focal imagen es:

$$\boxed{f' = - f = 2r_1}$$

A partir de F' tomamos una distancia igual a $-2r_1$, y quedará determinado H'.

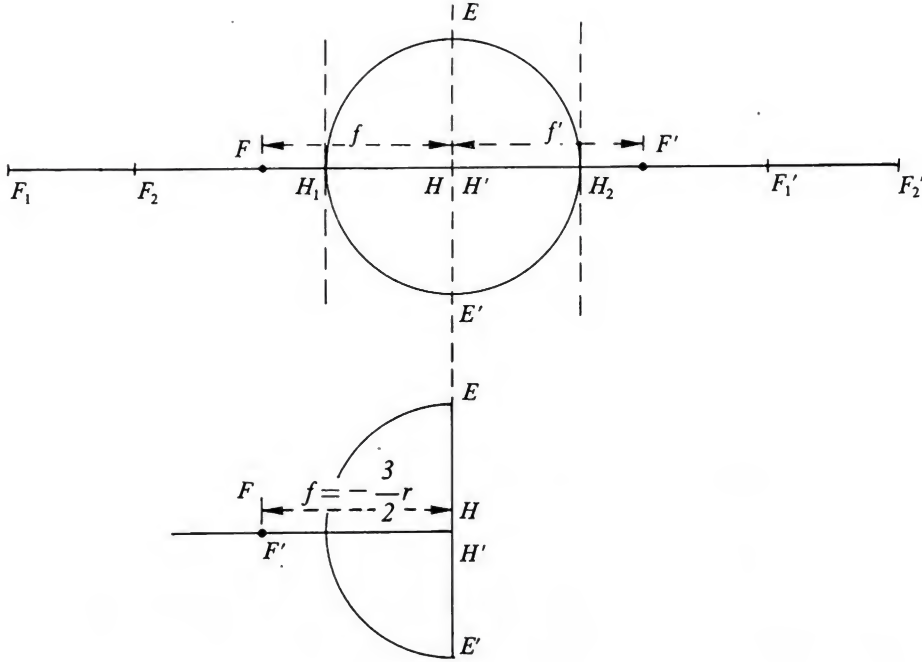
Problema 45. La lente del problema anterior tiene una de sus caras plateada. Determinar su convergencia o potencia:

1. En el caso de estar plateada la cara plana.

2. En el caso de estar plateada la cara esférica.

Solución

1) Resolvamos el problema duplicando el espesor de la lente y doblando después la figura por la perpendicular al eje del sistema que coincide con el espejo plano.



Problema XXXV-45-1.ª

$$f_1 = -r\frac{n}{n'-n} = -r\frac{1}{1,5-1} = -2r \qquad f_2 = -(-r)\frac{1,5}{1-1,5} = -3r$$

$$f_1' = r\frac{n'}{n'-n} = r\frac{1,5}{1,5-1} = 3r \qquad f_2' = (-r)\frac{1}{1-1,5} = 2r$$

$$\Delta = F_1'F_2 = -4r$$

$$z = F_1F = \frac{f_1f_1'}{\Delta} = \frac{-2r3r}{-4r} = \frac{3}{2}r$$

$$z' = F_2'F' = -\frac{f_2f_2'}{\Delta} = -\frac{-3r2r}{-4r} = -\frac{3}{2}r$$

$$f = \frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{-2r(-3r)}{-4r} = -\frac{3}{2}r$$

$$f' = -\frac{f_1'f_2'}{\Delta} = \frac{3r2r}{-4r} = \frac{3}{2}r$$

De esta manera se localizan los focos y puntos principales de la esfera; estos últimos coinciden entre sí y con el centro de la esfera. Doblando la figura por el eje obtenemos los puntos cardinales del sistema en estudio (coinciden H y H'; también F y F'). La focal es, como se desprende de la figura y del estudio anterior:

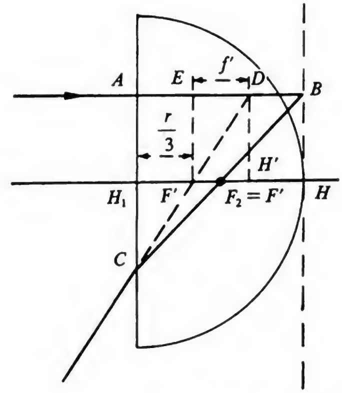
$$f' = -\frac{3}{2}r$$

y la convergencia:

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{2}{3r} = -\frac{2}{3 \times 0,032} = -20,8 \text{ dp}}$$

2) Un rayo paralelo al eje atraviesa sin desviación al dioptrio plano y se refleja pasando por el foco F_2 del espejo esférico. (Tener en cuenta en la figura que se trata de rayos paraxiales, aunque para la claridad del esquema se hayan dibujado bastante separados del eje.) La imagen de F_2 en el dioptrio plano nos determinará el foco imagen del sistema (F'):

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \quad \left| \begin{array}{l} n = 1{,}5 \\ n' = 1 \\ s = \dfrac{r}{2} \end{array} \right| \quad s' = \frac{r}{2 \times 1{,}5} = \frac{r}{3}$$



Problema XXXV-45-2.ª

Al ser $AB = r$ el doble de $H_1F_2 = r/2$ se verifica que:

$$AC = 2H_1C$$

Considerando los triángulos ADC y $H_1F'C$, al ser $AC = 2H_1C$:

$$AD = 2H_1F' = \frac{2r}{3}$$

pero:

$$AD = AE + ED \;\Rightarrow\; \frac{2r}{3} = \frac{r}{3} + ED \;\Rightarrow\; ED = \frac{r}{3}$$

quedando, así, localizado el punto H' (coincidente con H). La focal (objeto e imagen) es:

$$f' = H'F' = -\frac{r}{3}$$

La potencia del sistema es:

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{3}{r} = -\frac{3}{-0{,}032} = -94 \text{ dp}}$$

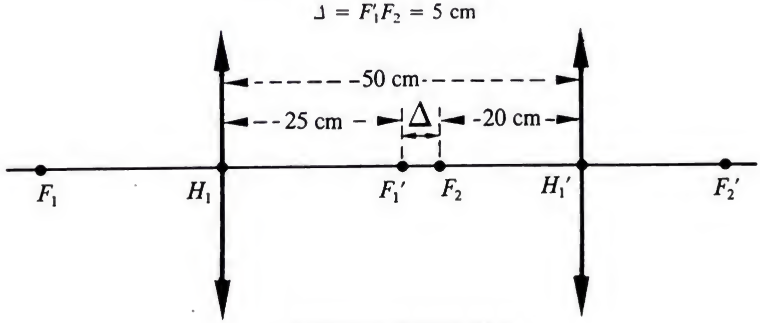
Problema 46. Dos lentes delgadas de 4 y 5 dp con el eje común están a distancia de 50 cm. Determinar los puntos cardinales del sistema compuesto y la posición y tamaño de la imagen formada por un objeto situado 20 cm delante de la primera lente, normalmente al eje y de 2 cm de altura. Calcular la convergencia del sistema.

Solución

$$f_1' = \frac{1}{4}\text{ m} = 25 \text{ cm} \qquad f_1 = -25 \text{ cm}$$

$$f_2' = \frac{1}{5}\text{ m} = 20 \text{ cm} \qquad f_2 = -20 \text{ cm}$$

$$\Delta = F_1'F_2 = 5 \text{ cm}$$



Problema XXXV-46-1.ª

$$z' = F_2'F' = -\frac{f_2 f_2'}{\Delta} = -\frac{-20 \times 20}{5} = 80 \text{ cm}$$

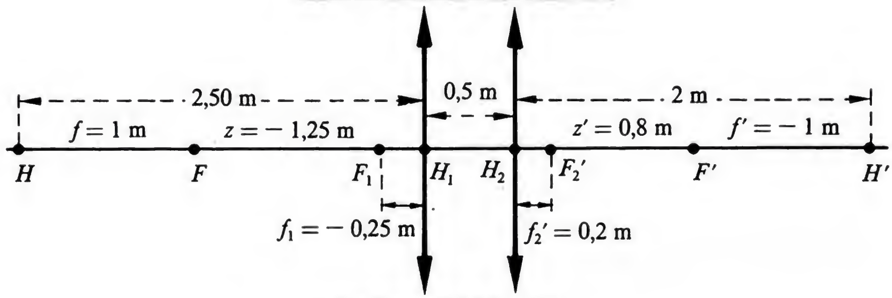
$$z = F_1F = \frac{f_1 f_1'}{\Delta} = \frac{-25 \times 25}{5} = -125 \text{ cm}$$

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = -\frac{25 \times 20}{5} = -100 \text{ cm}$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{(-25)(-20)}{5} = 100 \text{ cm}$$

Los planos principales se determinan como en el problema anterior.
La convergencia del sistema es:

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{-1} = -1 \text{ dp}}$$



Problema XXXV-46-2.ª

Si el objeto está a 20 cm ante la primera lente, se encuentran a 230 cm de H ($a = 2{,}3$ m).

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$$

al ser:

$$f = -f' \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} = \varphi' \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{a}{a\varphi' + 1} = \frac{2{,}3}{-2{,}3 + 1} = -1{,}77 \text{ m}}$$

La imagen se encuentra a $-1{,}77$ m de H' y, por tanto, a 23 cm tras la segunda lente (ya que la distancia H_2H' son 2 m).

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$$

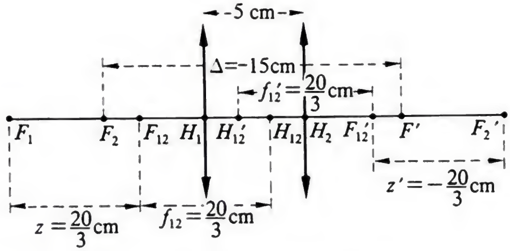
puesto que:

$$f = -f' \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{2} = \frac{-1{,}77}{2{,}3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' = -\frac{3{,}54}{2{,}3} = -1{,}5 \text{ cm}}$$

Problema 47. Determinar la posición de los puntos cardinales y la potencia del sistema constituido por tres lentes delgadas de focales 10 cm separadas una de otra 5 cm y cuyo eje es común.

Solución

Hallemos los puntos cardinales del sistema formado por la primera y segunda lente (ver figura):



Problema XXXV-47-1.ª

$$\Delta = F'_1F_2 = -\ 15 \text{ cm}$$

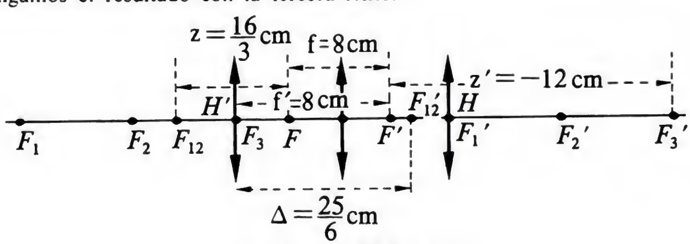
$$z = F_1F_{12} = \frac{f_1f'_1}{\Delta} = \frac{-\ 10 \times 10}{-15} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$z' = F'_2F'_{12} = -\ \frac{f_2f'_2}{\Delta} = -\ \frac{-\ 10 \times 10}{-15} = -\ \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$f_{12} = \frac{f_1f_2}{\Delta} = \frac{-10(-10)}{-15} = -\ \frac{20}{3} \text{ cm}$$

$$f'_{12} = -\ \frac{f'_1f'_2}{\Delta} = -\ \frac{10 \times 10}{-15} = \frac{20}{3} \text{ cm}$$

Compongamos el resultado con la tercera lente:



Problema XXXV-47-2.ª

$$\Delta = F'_{12}F_3 = -\ \frac{25}{3} \text{ cm}$$

$$z = F_{12}F = \frac{f_{12}f'_{12}}{\Delta} = \frac{-\ \frac{20}{3}\ \frac{20}{3}}{-\ \frac{25}{3}} = \frac{16}{3} \text{ cm}$$

$$z' = F'_3F' = -\ \frac{f_3f'_3}{\Delta} = -\ \frac{-\ 10 \times 10}{-\ \frac{25}{3}} = -\ 12 \text{ cm}$$

$$f = \frac{f_{12}f_3}{\Delta} = \frac{-\ \frac{20}{3}\ (-10)}{-\ \frac{25}{3}} = -\ 8 \text{ cm}$$

$$f' = -\ \frac{f'_{12}f'_3}{\Delta} = -\ \frac{\frac{20}{3}\ 10}{\frac{-25}{3}} = 8 \text{ cm}$$

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}08} = 12{,}5 \text{ dp}}$$

Capítulo XXXVI

EL OJO HUMANO. INSTRUMENTOS OPTICOS

FORMULARIO

AUMENTO VISUAL:

$$A = \frac{\operatorname{tag}\alpha}{\operatorname{tag}\alpha'}$$

AUMENTO DE UN PROYECTOR:

$$\beta' = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{f'} = -a'\varphi'$$

AUMENTO VISUAL DE UNA LUPA:

$$A = \left(\frac{-d}{f'} + 1\right)\frac{l}{d} = \frac{-l}{f'} + \frac{l}{d}$$

AUMENTO VISUAL DEL MICROSCOPIO:

$$A = -\frac{y'}{y}\,\frac{l}{f_2'} = \Delta l \varphi_1' \varphi_2'$$

AUMENTO VISUAL DEL ANTEOJO ASTRONÓMICO:

$$A = -\frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}$$

Problema 1. Listing identifica el ojo humano con un dioptrio esférico de 5 mm de radio que separa dos medios de índices de refracción 1 y 4/3. Calcular las distancias focales, objeto e imagen. ¿A qué distancia del polo del dioptrio debe estar la retina?

Solución

Aplicando las fórmulas del dioptrio esférico, la distancia del foco imagen será:

$$\boxed{f' = \frac{nr}{n-1} = \frac{4/3 \times 0{,}5}{4/3 - 1} = 2 \text{ cm}}$$

La retina del ojo normal debe estar a 2 cm del polo del dioptrio, pues a esta distancia está el plano focal imagen, lugar de reunión de los rayos procedentes de un punto en el infinito. La distancia del foco objeto al polo del dioptrio será:

$$\boxed{f = -\frac{r}{n-1} = -\frac{0,5}{4/3 - 1} = -1,5 \text{ cm}}$$

Problema 2. Un ojo normal puede acomodar desde el infinito hasta 25 cm de él. Calcular el poder de acomodación, es decir, la convergencia de una lente que, colocada ante el ojo, permitiera ver el punto próximo sin necesidad de acomodación.

Solución

La lente colocada ante el ojo deberá formar la imagen del punto próximo en el infinito. El punto próximo ha de ser, por tanto, el foco objeto de tal lente y su convergencia:

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ dp}}$$

Problema 3. ¿Qué gafas deben prescribirse para un ojo miope cuyo punto próximo está a 10 cm del ojo?

Solución

La imagen de un objeto a 25 cm del ojo (distancia mínima de la visión de un ojo normal) debe formarse, a través de la lente, a 10 cm del ojo.

$$\varphi' = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad \Rightarrow \boxed{\varphi' = -\frac{1}{-0,25} + \frac{1}{-0,10} = -6 \text{ dp}}$$

Problema 4. ¿Qué gafas deben prescribirse para un ojo miope que no puede distinguir objetos más allá de 75 cm?

Solución

La imagen que nos dé la lente de las gafas de un objeto lejano tendrá que estar delante de ésta y a 80 cm (punto remoto), y, por tanto, será virtual: $a' = -75$ cm. Como el objeto está a gran distancia, a es muy grande y $1/a$ es despreciable; por tanto:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} = \varphi' \quad \Rightarrow \boxed{\varphi' = \frac{1}{a'} = -\frac{1}{0,75} = -1,3 \text{ dp}}$$

Problema 5. **1.** Calcular el poder de acomodación de un ojo miope cuyo punto remoto está a 1/2 m y el próximo a 15 cm del centro óptico.
2. Calcular las dioptrías de una lente divergente que se debe colocar ante este ojo para corregir su miopía, es decir, para que vea los objetos situados en el infinito sin necesidad de acomodación.

Solución

1) La lente colocada ante el ojo deberá formar la imagen del punto próximo en el remoto. Como ambos están situados al mismo lado del cristalino, la imagen del punto próximo será virtual. En la fórmula de los focos conjugados:

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{f'}=\varphi' \qquad a=-0{,}15\ \text{m} \qquad a'=-0{,}5\ \text{m}$$

$$\boxed{\varphi'=-\frac{1}{-0{,}15}+\frac{1}{-0{,}5}=4{,}67\ \text{dp}}$$

2)

$$\boxed{\varphi'=\frac{1}{-0{,}5}=-2\ \text{dp}}$$

Problema 6. Calcular la convergencia de una lente que se comportase como el cristalino de un ojo miope cuyo punto remoto está a 1 m del centro óptico del ojo y la distancia de éste a la retina es 22 mm (se supone la lente en el aire).

Solución

Los objetos situados a 1 m del centro deben formar una imagen a 22 mm de él (en la retina).

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\varphi' \Rightarrow \boxed{\varphi'=-\frac{1}{-1}+\frac{1}{0{,}022}=46{,}4\ \text{dp}}$$

Problema 7. Calcular la distancia entre la retina y el polo del dioptrio esférico en un «ojo reducido de Listing» con miopía y que necesitase para su corrección una lente divergente de 4 dp. El radio del dioptrio es 4 mm.

Solución

El punto remoto del ojo a que se refiere el problema coincide con el foco imagen de la lente divergente que corrige el defecto; está, por tanto, a una distancia del polo del dioptrio igual a 1/4 de m, es decir, 25 cm.

La imagen del punto remoto debe formarse (sin acomodación del ojo) en la retina. La aplicación de la fórmula del invariante de Abbe da:

$$n\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right]=n'\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right] \left| \begin{array}{l} s=-25\ \text{cm} \\ r=0{,}4\ \text{cm} \\ n'=4/3 \end{array} \right| \frac{1}{0{,}4}-\frac{1}{-25}=\frac{4/3}{0{,}4}-\frac{4/3}{s'} \Rightarrow \boxed{s'=1{,}7\ \text{cm}}$$

Problema 8. **1.** Un ojo hipermétrope tiene su punto remoto a 25 cm de su centro óptico y detrás de la retina. Calcular la potencia de la lente convergente que se debe colocar ante él para corregir su defecto.

2. ¿Qué gafas necesita un hipermétrope cuyo punto próximo está situado a 1 m de su ojo?

Solución

1)

$$\boxed{\varphi' = \frac{1}{0{,}25} = 4 \text{ dp}}$$

2) La imagen de un objeto a 25 cm del ojo debe formarse a 1 m de él.

$$\boxed{\varphi' = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = -\frac{1}{-0{,}25} + \frac{1}{-1} = 3 \text{ dp}}$$

Problema 9. El ojo humano como instrumento óptico se puede considerar simplificadamente como un dioptrio esférico convexo de 5,55 mm de radio e índice de refracción 4/3. Calcúlese:

1. Las distancias focales, objeto e imagen, de dicho dioptrio.

2. La separación con que se formarán en la retina las imágenes de dos estrellas que subtienden un ángulo de 1° en el campo visual, estando el ojo enfocado al infinito y en la dirección de dichas estrellas.

Solución

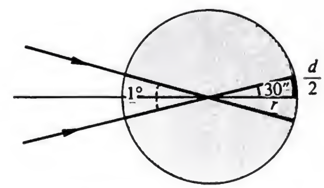
1)

$$f = -\frac{nr}{n' - n} \qquad \boxed{f = -\frac{5{,}55}{\frac{4}{3} - 1} = -16{,}65 \text{ mm}}$$

$$f' = \frac{n'r}{n' - n} \qquad \boxed{f' = \frac{\frac{4}{3}\,5{,}55}{\frac{4}{3} - 1} = 22{,}20 \text{ cm}}$$

2)

$$\operatorname{tag} 30' = \frac{d/2}{r} = \frac{d}{2r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 2 \times 5{,}55 \operatorname{tag} 30' = 96{,}87 \times 10^{-3} \text{ mm}}$$



Problema XXXVI-9

Problema 10. Un ojo miope cuyo punto remoto está a 1,10 m mira a través de una lupa de 10 dp. ¿A qué distancia de la lupa debe colocarse el objeto para ver la imagen sin acomodación?

Solución

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \qquad a' = -1{,}10 \text{ m} \qquad \varphi' = 10 \text{ dp} \qquad -\frac{1}{a} + \frac{1}{-1{,}10} = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a \simeq -9 \text{ cm}}$$

Problema 11. Una lente plano-convexa cuya convergencia es 50 dp constituye una lupa.

1. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 3/2, calcular el radio de curvatura de la cara convexa.

2. Calcular su aumento.
3. Un ojo miope no ve nada más que en el caso de que los objetos estén situados entre 100 cm y 10 cm de distancia de él. Sabiendo que el observador coloca el ojo en el foco imagen, ¿cuál será la amplitud de la zona en que habrá de colocar el objeto el miope para ver perfectamente?

Solución

1)

$$\varphi' = \frac{1}{f'} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \quad \left|\begin{array}{l} f' = \frac{1}{50}\ \text{m} = 2\ \text{cm} \\ r_1 \doteq \infty \\ n = 3/2 \end{array}\right| \quad \frac{1}{1} = \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right] \Rightarrow \boxed{r = -1\ \text{cm}}$$

2) El aumento visual, para un ojo normal ($l = -0{,}25$ m), acomodado al infinito, será:

$$\boxed{A = -l\varphi' = 0{,}25\varphi' = \frac{\varphi'}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5} \text{ (imagen derecha)}$$

3)

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad \left|\begin{array}{l} a' = -100\ \text{cm (punto remoto)} \\ \frac{1}{2} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{-100} \Rightarrow a \simeq -1{,}96\ \text{cm} \\ a' = -10\ \text{cm (punto próximo)} \\ \frac{1}{2} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{-10} \Rightarrow a \simeq -1{,}67\ \text{cm} \end{array}\right.$$

La amplitud de la zona en que habrá que colocar el objeto es entre $-1{,}67$ y $-1{,}96$ cm.

Problema 12. Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene 10 dp se retrata a una persona situada a 2,10 m de distancia. ¿A qué distancia del centro óptico del objetivo debe colocarse la placa? Si la persona tiene 1,70 m de estatura, ¿qué altura mínima debe tener la placa para formar una imagen de cuerpo entero?

Solución

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \Rightarrow a' = \frac{a}{\varphi' a + 1} = \frac{-2{,}10}{10(-2{,}10) + 1} \Rightarrow \boxed{a' = 0{,}105\ \text{m} = 10{,}5\ \text{cm}}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a'} \Rightarrow \frac{y'}{170} = \frac{10{,}5}{-210} \Rightarrow \boxed{y' = -8{,}5\ \text{cm}}$$

Problema 13. Tenemos una lente biconvexa tal que colocando un objeto luminoso a 25 cm de distancia nos da una imagen real y cuatro veces mayor que el objeto.
1. Calcular la convergencia de esa lente.

2. Calcular el radio de curvatura de su segunda cara, sabiendo que el de la primera es 30 cm y que el índice de refracción del vidrio es 3/2.
3. Esta lente se utiliza como objetivo de una cámara fotográfica y se fotografía a un automóvil que pasa, perpendicularmente al eje óptico de la lente, a 1 000 m del objetivo y con una velocidad de 75 km/h. Calcular cuál debe ser el tiempo máximo durante el que está abierto el obturador para que la imagen de un punto del automóvil no barra sobre la placa más de 0,1 mm.

Solución

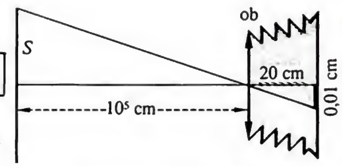
1)

$$\varphi' = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \qquad \frac{a'}{a} = -4 \Rightarrow a' = -4(-0{,}25) = 1 \text{ m}$$

$$\beta' = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \qquad \boxed{\varphi' = -\frac{1}{-0{,}25} + \frac{1}{1} = 5 \text{ dp}}$$

2)

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow 5 = \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left[\frac{1}{0{,}3} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow \boxed{r_2 = -15 \text{ cm}}$$



Problema XXXVI-13

3) El automóvil A se encuentra prácticamente en el infinito (cámara enfocada al infinito); la distancia de la lente a la placa fotográfica es, pues, la distancia focal:

$$\frac{S}{10^5} = \frac{0{,}01}{20} \Rightarrow S = 50 \text{ cm} = 0{,}5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{t = \frac{S}{V} = \frac{0{,}5 \times 3\,600}{75\,000} = 0{,}024 \text{ s}}$$

Problema 14. Con una cámara fotográfica cuyo objetivo tiene una distancia focal de 20 cm sacamos una foto de un coche que corre a la velocidad de 60 km/h, a 100 m, por delante de nosotros y en dirección perpendicular al eje del objetivo.
1. Calcular el tiempo máximo de exposición, sabiendo que la foto es nítida, si durante la exposición un punto imagen no se desplaza más de 0,1 mm.
2. Si la distancia máxima entre el objetivo y la placa es de 21 cm, ¿cuál será la mínima distancia a la que podemos sacar una foto correcta?
3. Si quisiéramos con esa cámara retratar un objeto situado a 40 cm del objetivo, ¿qué lente hemos de colocar yuxtapuesta al objetivo?

Solución

1)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{-100} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{0{,}2} \Rightarrow a' = 0{,}2 \text{ m}$$

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \qquad \begin{aligned} y' &= -0{,}1 \text{ mm} = -10^{-4} \text{ m} \\ y &= vt = \frac{60\,000}{3\,600}t = \frac{50}{3}t \end{aligned} \qquad \frac{-10^{-4}}{\frac{50}{3}t} = \frac{0{,}2}{-100} \Rightarrow \boxed{t = 3 \times 10^{-3} \text{ s}}$$

2)

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{a} + \frac{1}{21} = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{a = -420 \text{ cm} = -4{,}2 \text{ m}}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l} a = -40 \text{ cm} \\ a' = 21 \text{ cm} \end{array}\right| \varphi' = -\frac{1}{-0{,}4} + \frac{1}{0{,}21} = 7{,}26 \text{ dp}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 \\ \varphi'_1 = \dfrac{1}{0{,}20} = 5 \text{ dp} \end{array}\right| \boxed{\varphi'_2 = 2{,}26 \text{ dp}}$$

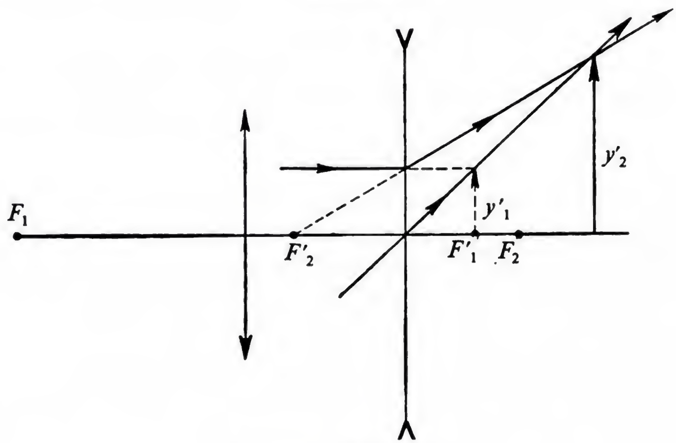
Problema 15. El teleobjetivo de una cámara fotográfica está formado por una lente convergente de 6 cm de distancia focal y otra divergente, separada de la anterior 4 cm, de distancia focal −2,5 cm. (La lente convergente es la más próxima al objeto.)

1. Dibujar la imagen de un objeto muy lejano.

2. Calcular la distancia de esta imagen a la lente convergente.

3. Comparar el tamaño de la imagen formada por esta combinación de lentes con el de la imagen que se hubiese obtenido de no existir la lente divergente.

Solución



Problema XXXVI-15

1) La imagen final tiene que ser real para que sea posible su fotografía.
La imagen que da la primera lente se encuentra prácticamente en su foco imagen F'_1, así ésta hará de objeto virtual para la lente divergente, único caso en que estas lentes dan imágenes reales.

2)

$$\frac{1}{-2{,}5} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{a'_2} \quad \Rightarrow \quad a'_2 = 10 \text{ cm}$$

Luego la distancia a la primera lente será $\boxed{14 \text{ cm.}}$

3)

$$\beta_1 = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{a'_1}{a_1}$$

al ser $a_1 \geqslant a'_1 \Rightarrow \beta_1$ es muy pequeño; luego $y'_1 \leqslant y_1$:

$$\beta_2 = \frac{y'_2}{y'_1} = \frac{a'_2}{a_2} = \frac{10}{2} = 5$$

Lo que nos dice que la lente divergente nos multiplica por cinco el tamaño que nos daba la lente convergente.

Problema 16. Se desea proyectar una fotografía en un salón de longitud 10 m. El dispositivo que para enfocar lleva el proyector permite acercar o alejar la fotografía al objetivo entre los límites 25 y 30 cm. Calcular la potencia máxima y mínima del objetivo y el aumento en cada caso.

Solución

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi'$$

1) Potencia máxima:

$$\left.\begin{aligned} a &= -0{,}25 \text{ m} \\ a' &= 10 \text{ m} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\varphi' = -\frac{1}{-0{,}25} + \frac{1}{10} = 4{,}1 \text{ dp}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} = \frac{10}{-0{,}25} = -40}$$

2) Potencia mínima:

$$\left.\begin{aligned} a &= -0{,}3 \text{ m} \\ a' &= 10 \text{ m} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\varphi' = -\frac{1}{-0{,}3} + \frac{1}{10} = 3{,}43 \text{ dp}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{a'}{a} = \frac{10}{-0{,}30} = -33{,}33}$$

Problema 17. Se trata de instalar el cine en un salón de actos. La pantalla ha de tener 5,5 m de anchura y la distancia desde la cabina del aparato proyector hasta la pantalla es de 25 m. Sabemos también que cada una de las fotografías de la cinta cinematográgica mide 22 mm de anchura y 16 de altura. Se pide:

1. ¿Qué altura deberá tener la pantalla para que toda quede exactamente cubierta por la imagen? ¿Cuánto valdrá el aumento lateral?

2. ¿Cuál debe ser la distancia entre la película y el objetivo para que la imagen quede perfectamente enfocada, y cuál ha de ser la distancia focal del objetivo, considerándolo como una simple lente delgada? (Debes dar el valor de la distancia focal aproximado; un error de 1/2 mm en más o menos no tiene importancia.)

3. Si este objetivo fuese una lente plano-convexa delgada, ¿cuánto valdría el radio de curvatura de la cara esférica? (Indice de refracción del vidrio: 1,5.)

4. Si colocamos un cartón junto al objetivo, tapando la mitad inferior del haz de rayos, ¿qué veremos en la pantalla: la mitad superior de la imagen, o bien la mitad inferior, o bien toda la imagen, aunque desigualmente iluminada? Razona la respuesta.

5. Si el objetivo no constase de una sola lente, como habíamos supuesto, sino de dos lentes delgadas iguales y yuxtapuestas, ¿de cuántas dioptrías tendría que ser cada una?

Solución

1)

$$\frac{5{,}5}{h} = \frac{22}{16} \Rightarrow \boxed{h = 4 \text{ m}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y} = \frac{-4}{0{,}016} = -250}$$

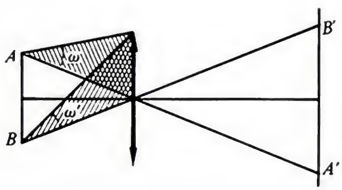
2)

$$\beta' = \frac{a'}{a} \Rightarrow -250 = \frac{25}{a} \Rightarrow \boxed{a = -0{,}1 \text{ m}}$$

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \varphi' = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{-0{,}1} + \frac{1}{25} = 10 \text{ dp} \Rightarrow \boxed{f' = 0{,}1 \text{ m}}$$

3)

$$\varphi' = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \Rightarrow 10 = 0{,}5\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right] \Rightarrow \boxed{r = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}}$$



Problema XXXVI-17

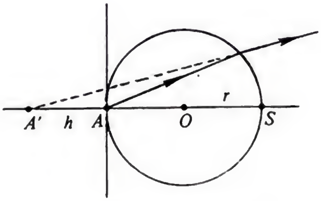
4) Rayos procedentes de los extremos del objeto, A y B, llegan al plano imagen ($A'B'$), por lo que se ve la imagen completa. El flujo que capta la semilente, procedente de A, es mayor que el de B, ya que el ángulo sólido ω es mayor que el ω' y la inclinación de los rayos que llegan a un punto de la lente procedentes de A es menor que la correspondiente a B. Por ello la imagen se verá desigualmente iluminada (mayor iluminación en A' que en B') (ver *Fotometría).*

5)

$$\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 = 2\varphi'_1 = 10 \Rightarrow \boxed{\varphi'_1 = 5 \text{ dp}}$$

Problema 18. Una gota de rocío, de forma esférica y centro O, apoya en un punto A sobre un plano horizontal. Se la observa con un microscopio cuyo eje óptico coincide con la dirección AO, enfocado en A a través de la gota. Se retira ésta y se enfoca ahora el microscopio sobre A. Deducir el radio de la gota. DATOS: Indice de refracción del agua: $n = 1{,}334$. Desplazamiento del microscopio necesario para el segundo enfoque: $h = 1{,}5$ mm.

Solución



Problema XXXVI-18

Primeramente el microscopio está enfocado a A', imagen de A a través de la gota.

$$n\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right] = n'\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{s'}\right] \quad \left| \begin{array}{l} n = \dfrac{4}{3} \\ n' = 1 \\ s = -2r \\ s' = -(2r+h) \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\frac{4/3}{r} - \frac{4/3}{-2r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{-(2r+h)} \Rightarrow \boxed{r = -h = -1{,}5 \text{ mm}}$$

Problema 19. Con dos lentes (50 y 20 dp) se construye un microscopio, montándolas en los extremos de un tubo de 15 cm de longitud. ¿A qué distancia de la primera lente debe colocarse el objeto cuando mira por el microscopio un ojo normal, sin acomodación?

Solución

El ocular tiene por distancia focal:

$$f' = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ m} = 5 \text{ cm}$$

El centro óptico del objetivo dista del foco del ocular:

$$a' = 15 - 5 = 10 \text{ cm}$$

En tal punto se debe formar la imagen dada por el objetivo.

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \varphi' \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{a'}{1 - \varphi' a'} = \frac{0{,}10}{1 - 50 \times 0{,}10} = -\,0{,}025 \text{ m} = -\,2{,}5 \text{ cm}}$$

Problema 20. El ocular y el objetivo de un microscopio están separados 22,6 cm y tienen focales de 2 cm y 6 mm, respectivamente. Considerando las lentes como delgadas, determinar la potencia del sistema compuesto y là posición de sus puntos cardinales. ¿Cuál es el aumento visual del microscopio?

Solución

$$\Delta = F'_1F_2 = 22{,}6 - (2 + 0{,}6) = 20 \text{ cm}$$

$$f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi' = -\frac{\Delta}{f_1 f_2} = -\frac{0{,}2}{0{,}02 \times 0{,}006} = -\,1\,667 \text{ dp}}$$

La posición de los puntos cardinales se determina como en los problemas del capítulo anterior.

$$\boxed{A = \varphi'_1 \varphi'_2 \Delta l = \frac{1}{0{,}02}\,\frac{1}{0{,}006}\,0{,}2 \times (-0{,}25) = -\,416{,}7}$$

Problema 21. Un microscopio se compone de un objetivo O_1 de convergencia $\varphi'_1 = +\,100$ dp y de un ocular O_2 de convergencia $\varphi'_2 = +\,50$ dp. Estos dos sistemas los consideramos como lentes delgadas centradas sobre el mismo eje y cuyos centros ópticos están separados por una distancia de 28 cm.

1. ¿cuáles son las distancias focales del objetivo y del ocular?

2. ¿A qué distancia del objetivo debemos colocar un objeto plano perpendicular al eje óptico para que la imagen de este objeto, dada por el microscopio, se forme en el infinito?

3. ¿Cuál es el aumento de este microscopio?

Solución

1)

$$\varphi'_1 = \frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1 = \frac{1}{100} \text{ m} = 1 \text{ cm}}$$

$$\varphi'_2 = \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_2 = \frac{1}{50} \text{ m} = 2 \text{ cm}}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{f'} = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a'} \\[2ex] a' = 28 - 2 = 26 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{1}{1} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{26} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{26}{25} \text{ cm}}$$

3) El aumento visual para un ojo normal será:

$$\boxed{A = \Delta l \varphi'_1 \varphi'_2 = 0{,}25(-0{,}25) \times 100 \times 50 = -312{,}5}$$

Problema 22. Dos lentes, una de 3 mm de distancia focal y otra de una convergencia de 25 dp, están montadas formando un microscopio:

1. ¿Cuál de esas dos lentes será el ocular?

2. Este microscopio lo utiliza una persona cuyo punto próximo está a 13 cm colocando el ojo en el foco del ocular y acomodando al máximo. En estas condiciones la longitud del aparato es 20 cm. a) Calcular a qué distancia del ocular se formará la imagen que da el objetivo. b) Calcular la distancia que separará del objetivo al objeto en observación.

3. Calcular el aumento del aparato en las anteriores condiciones de observación.

Solución

1) El ocular es el de menor convergencia, es decir, el de mayor distancia focal. Luego en este caso el ocular es la lente de 25 dp, que tiene:

$$f_{oc} = \frac{1}{25} \text{ m} = 4 \text{ cm}$$

2)

a)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{f'} = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a'} \\[2ex] a' = -13 \text{ cm} \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{-13} \Rightarrow a = -\dfrac{52}{17} \text{ cm} = -3 \text{ cm} \\[2ex] \boxed{d = 20 - \dfrac{52}{17} \simeq 17 \text{ cm}} \end{array}$$

b)

$$a' = 17 \text{ cm} \Rightarrow \frac{1}{0{,}3} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{17} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{51}{167} \simeq 0{,}305 \text{ cm}}$$

3) El aumento visual para este ojo miope será:

$$A = \Delta l \varphi'_1 \varphi'_2 \left|\begin{array}{l} \Delta = 20 - f_{ob} + f_{oc} = 20 - f_{ob} - f_{oc} = 15{,}7 \text{ cm} = 0{,}157 \text{ m} \\ l = -13 \text{ cm} = -0{,}13 \text{ m} \\ \varphi'_1 = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{0{,}003} = 333{,}33 \text{ dp} \\ \varphi'_2 = 25 \text{ dp} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{A = -170} \text{ (imagen invertida)}$$

Problema 23. Con dos lentes (10 y 1 dp) se desea construir un anteojo astronómico por el que mire un ojo normal sin acomodación. ¿Cuál debe ser la longitud del anteojo?

Solución

Las distancias focales de las lentes son:

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{1}{10} = 0{,}10 \text{ m} = 10 \text{ cm} \\[2ex] f_2 = \dfrac{1}{1} = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{l = f_1 + f_2 = 10 + 100 = 110 \text{ cm}}$$

Problema 24. Dos lentes delgadas convergentes de +2 y +4 dp tienen el eje común y la distancia entre ellas es 75 cm. Calcular:
1. La potencia o convergencia del sistema.
2. La posición de la imagen de la Luna observada a través del sistema y el aumento visual.
3. Posición de la imagen de un objeto situado 50 cm ante la lente de 2 dp.
4. Posición de la imagen de un objeto situado a 1 m ante la lente de 2 dp y el aumento transversal. ¿Es la imagen real o virtual? ¿Derecha o invertida con respecto al objeto?

Solución

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_1 = \dfrac{1}{f_1} \Rightarrow f_1 = \dfrac{1}{2} \text{ m} = 50 \text{ cm} \\[2ex] \varphi'_2 = \dfrac{1}{f_2} \Rightarrow f_2 = \dfrac{1}{4} \text{ m} = 25 \text{ cm} \end{array}\right| \; d = 75 \text{ cm} = f_1 + f_2 \quad \text{(el sistema es telescópico)}$$

1) Su convergencia será nula; en efecto:

$$\boxed{\varphi' = \varphi'_1 + \varphi'_2 - d\varphi'_1\varphi'_2 = 2 + 4 - 0{,}75 \times 2 \times 4 = 0}$$

2) La imagen se encontrará en el infinito y el aumento visual es:

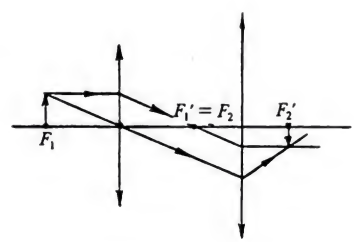
$$\boxed{A = -\frac{\varphi'_2}{\varphi'_1} = -2} \text{ (invertida)}$$

3) La imagen estará situada en el foco de la segunda latente (ver figura).

4)

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{50} = -\dfrac{1}{-100} + \dfrac{1}{a'} \Rightarrow a' = 100 \text{ cm} \\[2ex] \dfrac{1}{25} = -\dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{a''} \Rightarrow \boxed{a'' = 12{,}5 \text{ cm}} \text{ (imagen real)} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta = \beta_1\beta_2 \\[1ex] \beta = \dfrac{a'}{a} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \beta_1 = -1 \\[1ex] \beta_2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\beta = -\frac{1}{2}} \text{ (imagen invertida)}$$



Problema XXXVI-24

Problema 25. Un objetivo de 5 dp se asocia con un ocular de -120 dp para constituir un anteojo de Galileo. Un ojo normal, enfocado al infinito, observa a través de este anteojo un objeto situado a 1 500 m de distancia y que tiene 30 m de alto. Se pide:

1. Hallar la distancia entre las dos lentes.

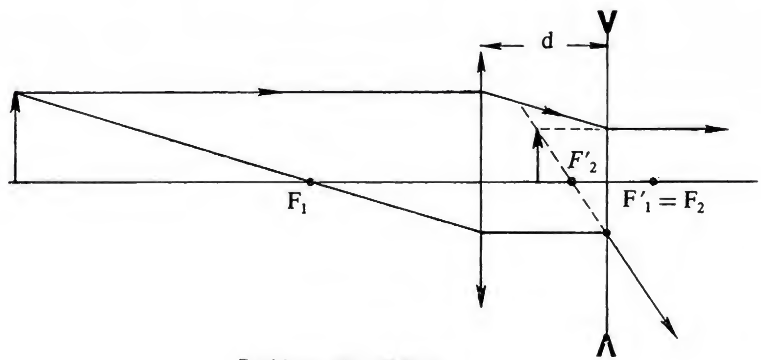
2. Calcular el ángulo, expresado en radianes, bajo el cual verá el observador al objeto.

3. Calcular cuál será la distancia entre las dos lentes si colocando detrás del anteojo y perpendicularmente a su eje, a una distancia de 1 m, una pantalla, se recoge sobre ella una imagen nítida y real del objeto.

Solución

$$\varphi'_{ob} = \frac{1}{f_{ob}} \Rightarrow f_{ob} = \frac{1}{5}\ \text{m} = 20\ \text{cm}$$

$$\varphi'_{oc} = \frac{1}{f_{oc}} \Rightarrow f_{oc} = -\frac{1}{120}\ \text{m} = -\frac{5}{6}\ \text{cm}$$



Problema XXXVI-25

1)

$$\boxed{d = f_{ob} + f_{oc} = 20 - \frac{5}{6} = 19{,}17\ \text{cm}}$$

2)

$$A = \frac{\operatorname{tag}\alpha}{\operatorname{tag}\alpha'} = -\frac{f_1}{f_2}$$

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{30}{1\,500} = \frac{1}{50}$$

$$\operatorname{tag}\alpha' = -\frac{f_2}{f_1}\operatorname{tag}\alpha = -\frac{-\frac{5}{6}}{20}\,\frac{1}{50} = \frac{1}{1\,200} \Rightarrow \boxed{\alpha' \simeq \frac{1}{1\,200}\ \text{rad}}$$

3) Para que esto pueda suceder el sistema deja de ser telescópico (no es anteojo). La imagen a través del objetivo se encuentra a 20 cm a su derecha (objeto prácticamente en el infinito, imagen en el foco imagen) y hace de objeto virtual para el ocular, con el fin de que la imagen final sea real y, por tanto, proyectable.

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \Rightarrow \frac{1}{-5/6} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{100} \Rightarrow a = \frac{100}{121}\ \text{cm}$$

Luego la distancia entre las dos lentes será:

$$\boxed{d = 20 - \frac{100}{121} = 19{,}2\ \text{cm}}$$

Capítulo XXXVII

OPTICA FISICA. LA LUZ COMO MOVIMIENTO ONDULATORIO

A) LA LUZ COMO MOVIMIENTO ONDULATORIO

FORMULACION

LONGITUD DE ONDA:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$$

INDICE DE REFRACCIÓN:

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Problema 1. Las longitudes de onda de las luces «visibles» están comprendidas entre 7 800 Å (rojo) y 3 800 Å (violeta). Calcular, en Hz, las frecuencias de estas radiaciones extremas.

Solución

De la fórmula:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \qquad (c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s})$$

Reduciendo todo a cm y sustituyendo:

$$\boxed{\nu_1 = \frac{3 \times 10^{10}}{7\,800 \times 10^{-8}} = 3{,}85 \times 10^{14} \text{ Hz}} \qquad \boxed{\nu_2 = \frac{3 \times 10^{10}}{3\,800 \times 10^{-8}} = 7{,}89 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

Problema 2. Determinar la longitud de onda y la velocidad de propagación de la luz amarillo-verdosa de frecuencia $5{,}4 \times 10^{14}$ Hz cuando se propaga en un vidrio de índice de refracción 1,5.

Solución

$$n = \frac{c_0}{c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{c_0}{n} = \frac{3 \times 10^8}{1{,}5} = 2 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = \frac{2 \times 10^8}{5{,}4 \times 10^{14}} = 370 \times 10^{-9} \text{ m} = 370 \text{ m}\mu}$$

para el vacío sería:

$$\lambda_0 = c_0 T = \frac{c_0}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{5{,}4 \times 10^{14}} = 555 \times 10^{-9} \text{ m} = 555 \text{ m}\mu$$

Problema 3. El espectro visible de las luces en el aire está comprendido entre las longitudes de onda de la luz violeta, de 380 mμ, y la luz roja, de 780 mμ. Calcular entre qué longitudes de onda está comprendido el espectro visible en el agua, cuyo índice de refracción es 4/3.

Solución

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0 T}{\lambda T} = \frac{\lambda_0}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

λ_0: longitud de onda en el aire; λ: longitud de onda en el agua. Luego:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{380 \times 3}{4} = 285 \text{ m}\mu} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{780 \times 3}{4} = 585 \text{ m}\mu}$$

Problema 4. Demostrar la homogeneidad de la fórmula: $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$, que nos da la velocidad de propagación de la luz en un medio.

Solución

$$[c] = LT^{-1}$$

$$[\varepsilon] = \frac{[Q]\,[Q']}{[F]\,[r]^2} = \frac{[I]^2\,[t]^2}{[F]\,[r]^2} = \frac{A^2T^2}{MLT^{-2}L^2} = M^{-1}L^{-3}T^4A^2$$

$$[\mu] = \frac{[B]\,[r]}{[I]} = \frac{[F]\,[r]}{[Q]\,[v]\,[I]} = \frac{MLT^{-2}L}{ATLT^{-1}A} = MLT^{-2}A^{-2}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right] = [\varepsilon]^{-1/2}\,[\mu]^{-1/2} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}A^{-1}M^{-1/2}L^{-1/2}TA = LT^{-1}$$

Problema 5. La constante de la ley de Coulomb para el vacío vale: $K_0 = 9 \times 10^9$ N · m/C^2 y la permeabilidad del vacío es: $\mu_0 = 4\,\pi/10^7$ N/A^2; determínese con estos datos la velocidad de la luz en el vacío.

Solución

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi 9 \times 10^9} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{4\pi}{4\pi 9 \times 10^9 \times 10^7}}} = \sqrt{9 \times 10^{16}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$$

Problema 6. Calcular el índice de refracción de un medio por el que se propaga un tren de ondas luminosas, sabiendo que para ese medio $\varepsilon' = 4/3$ y $\mu' = 6/5$.

Solución

La velocidad de propagación será:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0\mu'\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon'\mu'}}$$

luego:

$$\boxed{n = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\varepsilon'\mu'} = \sqrt{\frac{4}{3}\,\frac{6}{5}} = 1{,}26}$$

B) FOTOMETRIA

FORMULARIO

FLUJO DE ENERGÍA O FLUJO RADIANTE DE UN FOCO PUNTUAL ($\Phi_{e\lambda}$) DENTRO DE UN ÁNGULO SÓLIDO DETERMINADO: «Es la energía que se propaga en la unidad de tiempo dentro de aquel ángulo sólido. Se mide en vatios.»

FACTOR DE EFICIENCIA PARA UNA RADIACIÓN (V_λ) O LUMINOSIDAD RELATIVA: «Es el cociente de los flujos energéticos de la luz de 555 mμ por el de la radiación, para que produzca en el ojo humano la misma sensación de luminosidad.»

FLUJO LUMINOSO DE UN FOCO PUNTUAL DENTRO DE UN ÁNGULO SÓLIDO DETERMINADO: «Es su flujo energético referido a su capacidad de producción de luminosidad»:

$$\Phi = \Phi_{e\lambda} V_\lambda$$

La unidad de flujo luminoso es el LUMEN (lm): se ha convenido que 1 W de flujo de energía de la luz de 555 mμ corresponda a 685 lm. Es decir: 1/685 W de radiación de 555 mμ corresponden a 1 lm de flujo luminoso.

RENDIMIENTO LUMINOSO DE UNA FUENTE: «Es el cociente entre el flujo luminoso y el flujo radiante»; o lo que es lo mismo: «Al cociente de los lúmenes que produce la fuente a los que debería producir si toda la energía radiante fuese de luz de factor de eficiencia 1» (que corresponde a la luz amarillo-verdosa de 555 mμ de longitud de onda):

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi_{e\,(555\ \mathrm{m}\mu)}}$$

INTENSIDAD LUMINOSA DE UN FOCO PUNTUAL: «Es el flujo luminoso correspondiente a un ángulo sólido de 1 sr»:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega}$$

Su unidad es la CANDELA (1 cd = 1 lm/sr).

ILUMINACIÓN DE UNA SUPERFICIE: «Es el flujo luminoso que recibe en cada unidad de área»:

$$E = \frac{d\Phi}{dA}$$

Su unidad es el LUX (1 lx = 1 lm/m^2).

ILUMINACIÓN PRODUCIDA POR UN FOCO PUNTUAL: «Es directamente proporcional a la intensidad del foco y al coseno del ángulo formado por los rayos incidentes y la normal a la superficie que los recibe, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco emisor»:

$$E = \frac{I\cos\varphi}{r^2}$$

Problema 7. ¿Cuántos lm le corresponden a 1 W de flujo radiante de una luz de factor de eficiencia 0,2?

Solución

$$\boxed{\Phi = \Phi_2 V = 685 \times 0{,}2 = 137\ \mathrm{lm}}$$

Problema 8. Teniendo en cuenta la definición de lumen, calcular el número de W de flujo radiante necesarios para que el flujo luminoso de la luz de 600 mμ, cuyo factor de eficiencia es 0,6, sea 1 lm. ¿Cuál es el flujo luminoso producido por 1 W de flujo radiante de esta luz?

Solución

Sabemos que «1 W de flujo radiante de la luz de 555 mμ, cuyo factor de eficiencia es 1, corres-

ponde a 685 lm». Luego para esta luz obtenemos un flujo luminoso de 1 lm con un flujo radiante de:

$$\Phi_{e\lambda} = \frac{1}{685} = -\ 1{,}46 \times 10^{-3}\ \mathrm{W}$$

Para 1 W de flujo radiante de longitud de onda de 600 mμ necesitaremos un flujo luminoso:

$$\boxed{\Phi = 0{,}6 \times 685 = 411\ \mathrm{lm}}$$

luego para producir 1 lm de flujo luminoso necesitaremos:

$$\boxed{\Phi_{e\lambda} = \frac{1}{411} = 2{,}433 \times 10^{-3}\ \mathrm{W}}$$

de flujo radiante.

Problema 9. Calcular el factor de eficiencia de una luz de una determinada longitud de onda, sabiendo que 7 W de flujo radiante producen 1 918 lm.

Solución

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Si } 7\ \mathrm{W} & \text{de flujo radiante} & \text{producen} & 1\,918\ \mathrm{lm} \\ \quad 1\ \mathrm{W} & \text{»} \qquad \text{»} & \text{»} & \Phi \end{array}\right| \Rightarrow \Phi = \frac{1\,918}{7} = 274\ \mathrm{lm}$$

luego, como «1 W de flujo radiante de la luz de factor de eficiencia 1 (λ = 555 mμ) producen 685 lm», tendremos:

$$\boxed{V = \frac{274}{685} = 0{,}4}$$

Podremos resolverlo de la siguiente forma:

$$\Phi = \Phi_e V \Rightarrow V = \frac{\Phi}{\Phi_e} \left| \begin{array}{l} \Phi = 1\,918\ \mathrm{lm} \\ \\ \Phi_e = 7 \times 685\ \mathrm{lm} \end{array} \right| \Rightarrow V = \frac{1\,918}{7 \times 685} = 0{,}4$$

Problema 10. Una fuente luminosa proporciona un flujo radiante compuesto por $\Phi_{e1} = 30$ W de luz monocromática de factor de eficiencia $V_1 = 0{,}6$, $\Phi_{e2} = 50$ W de luz de $V_2 = 0{,}8$ y $\Phi_{e3} = 10$ W de luz de $V_3 = 0{,}3$. Calcular:
1. Flujo luminoso de la fuente.
2. Rendimiento fotométrico de la fuente.

Solución

1)

$$\Phi = \Sigma \Phi_{ei} V_i \left| \begin{array}{l} \Phi_1 = 0{,}6 \times 30 \times 685 = 12\,330\ \mathrm{lm} \\ \Phi_2 = 0{,}8 \times 50 \times 685 = 27\,400\ \mathrm{lm} \\ \Phi_3 = 0{,}3 \times 10 \times 685 = 2\,055\ \mathrm{lm} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\Phi = 41\,785\ \mathrm{lm}}$$

2)

$$\eta = \frac{\Phi}{\Phi_{e\,(555\ \mathrm{m\mu})}} = \frac{41\,785}{30 \times 685 + 50 \times 685 + 10 \times 685} = 0{,}68 \Rightarrow \boxed{68\ \%}$$

Problema 11. Una fuente luminosa puntual de 40 W proporciona una intensidad media esférica (intensidad media en todas las direcciones) de 250 cd. Calcular:
1. El flujo luminoso total radiado por la fuente.
2. La eficiencia de la fuente.

Solución

1)

$$I = \frac{\Phi}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi = 4\pi I = 4\pi 250 = 1\,000\pi \text{ lm}}$$

2)

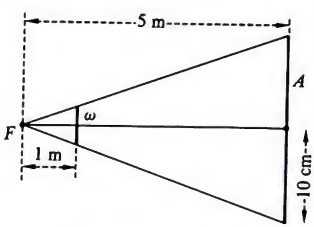
$$\Phi = \Phi_e V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{\Phi}{\Phi_e} = \frac{1\,000\pi}{40 \times 685} = 0{,}11}$$

Problema 12. Una superficie circular de 10 cm de radio recibe un flujo luminoso de 0,2 lm de un foco puntual a una distancia de 5 m de su centro y emite uniformemente en todas las direcciones luz monocromática de 600 mμ, que tiene un factor de eficiencia 0,6. La línea que une el foco con el centro de la superficie es perpendicular a la superficie. Calcular:
1. La intensidad del manantial en la dirección de la superficie.
2. El flujo luminoso total emitido por el foco.
3. El flujo radiante total emitido por el foco.

Solución

1) Calculemos primero el ángulo sólido correspondiente a la superficie (trabajemos en metros):

$$\frac{A}{\omega} = \frac{25}{1} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{A}{25} = \frac{\pi 10^{-2}}{25} \text{ sr}$$



Problema XXXVII-12

luego:

$$\boxed{I = \frac{\Phi}{\omega} = \frac{0{,}2 \times 25}{\pi \times 10^{-2}} = 159 \text{ cd}}$$

2) El flujo luminoso correspondiente a 4π sr será:

$$\boxed{\Phi = 4\pi I = 2\,000 \text{ lm}}$$

3)

$$\Phi = 685\, V \Phi_e \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Phi_e = \frac{\Phi}{685\, V} = \frac{2\,000}{685 \times 0{,}6} = 4{,}9 \text{ W}}$$

Problema 13. La iluminación que la luz solar produce, cuando incide normalmente a una superficie situada en la Tierra, es de 100 000 lx. Calcular el número de arcos voltaicos de 4 000 cd de intensidad luminosa que producen la misma iluminación que el Sol, situándolos a 2 m de la superficie, en iluminación normal.

Solución

La iluminación producida por el Sol es análoga a la de 100 000 cd a 2 m de distancia, en iluminación normal a la superficie.

$$E = \frac{nI\cos\varphi}{r^2} \quad \left| \begin{array}{l} I = 4\,000 \text{ cd} \\ E = 100\,000 \text{ lx} \\ \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \\ r = 2 \text{ m} \end{array} \right| \quad 100\,000 = \frac{n\,4\,000}{2^2} \Rightarrow \boxed{n = 100 \text{ arcos voltaicos}}$$

Problema 14. Calcular la distancia necesaria para que 2 500 arcos voltaicos de 4 000 cd de intensidad produzcan la misma iluminación que la luz solar, suponiendo que los rayos, en uno y otro caso, incidan normalmente a la superficie iluminada. (La iluminación de la luz solar cuando incide normalmente sobre la Tierra es de 100 000 lx.)

Solución

$$E = \frac{I\cos\varphi}{r^2} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{\frac{I\cos\varphi}{E}} = \sqrt{\frac{2\,500 \times 4\,000}{100\,000}} = 10 \text{ m}}$$

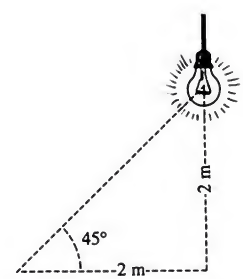
Problema 15. Una bombilla de 100 cd de intensidad luminosa está a 2 m de altura sobre el suelo. Calcular la iluminación que produce en un punto de éste, situado en el pie de la vertical que pasa por el centro de la bombilla y en otro punto del suelo distante del primero 2 m.

Solución

$$E = \frac{I\cos\varphi}{r^2}$$

1)

$$\left. \begin{array}{l} I = 100 \text{ cd} \\ \varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \\ r = 2 \text{ m} \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{100}{4} = 25 \text{ lx}}$$

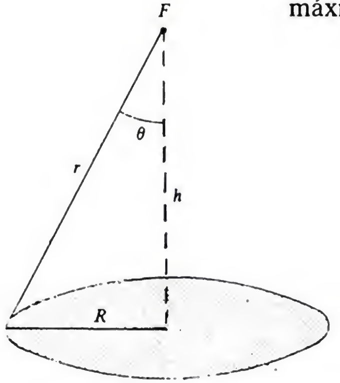


Problema XXXVII-15

2)

$$\left. \begin{array}{l} I = 100 \text{ cd} \\ \varphi = 45° \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ r^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \text{ m}^2 \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{E = \frac{100\sqrt{2}}{2 \times 8} = 8{,}8 \text{ lx}}$$

Problema 16. Determinar a qué altura del centro de una mesa redonda de radio 1 m debe de colocarse un foco puntual para que la iluminación en los bordes sea máxima.



Problema XXXVII-16

Solución

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{I\cos\theta}{r^2} \\[2ex] r^2 = R^2 + h^2 \\[2ex] \cos\theta = \dfrac{h}{r} \end{array}\right| \Rightarrow E = \frac{Ih}{(R^2+h^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dE}{dh} = \frac{(R^2+h^2)^{3/2} I - Ih\dfrac{3}{2}(R^2+h^2)^{1/2} 2h}{(R^2+h^2)^3} = \frac{(R^2-2h^2)I}{(R^2+h^2)^{5/2}}$$

$$\frac{dE}{dh} = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}7 \text{ m} = 70 \text{ cm}}$$

C) INTERFERENCIAS Y DIFRACCION

FORMULARIO

CONDICIONES DE MÁXIMO Y MÍNIMO:

$$F_1P - F_2P = K\lambda$$

$$F_1P - F_2P = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

LÁMINAS DELGADAS (POR REFRACCIÓN):

$$2en = K\lambda$$

$$2en = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

Si la observación se hace por reflexión, las condiciones de máximo y mínimo son las de mínimo y máximo por refracción.

ANILLOS DE NEWTON:

$$r^2 = K\lambda R$$

DIFRACCIÓN DE UNA RENDIJA:

$$n\,\text{sen}\,\varphi = \frac{K\lambda}{d}$$

REDES DE DIFRACCIÓN:

$$n\delta\,\text{sen}\,\varphi = K\lambda$$

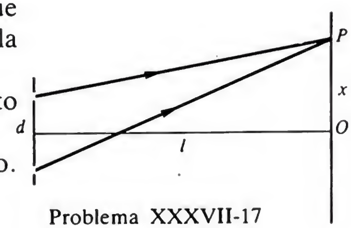
$$n\delta\,\text{sen}\,\varphi = (2K+1)\frac{\lambda}{2}$$

Problema 17. Iluminamos con luz monocromática de 700 mμ una rendija muy delgada practicada en una superficie opaca (ver Fig. Rendijas de Young), transformándose por difracción en un foco emisor de luz en todas las direcciones. Los rayos emitidos iluminan dos pequeñas rendijas que están separadas 0,1 mm y que funcionarán como focos coherentes productores de interferencias en una pantalla que se encuentra a 40 cm de ellas. Determínese:

1. Posición del primer mínimo contado a partir del centro de la pantalla (punto O en la figura).

2. Posición del décimo máximo (sin contar el central) respecto del mismo punto.

3. Distancia entre dos máximos consecutivos.



Problema XXXVII-17

Solución

La condición de mínimo es:

$$x = (2K + 1)\frac{\lambda}{2}\,\frac{l}{d}$$

la de máximo:

$$x = K\lambda\,\frac{l}{d}$$

1)

$$K = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\lambda l}{2d} = \frac{700 \times 10^{-9}\, 0{,}4}{2 \times 10^{-4}} = 14 \times 10^{-4}\ \text{m} = 1{,}4\ \text{mm}}$$

2)

$$K = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{10\lambda l}{d} = \frac{10 \times 700 \times 10^{-9} \times 0{,}4}{10^{-4}} = 28 \times 10^{-3}\ \text{m} = 28\ \text{mm}}$$

3) La distancia entre dos máximos consecutivos es:

$$\boxed{(K+1)\lambda\,\frac{l}{d} - K\lambda\,\frac{l}{d} = \lambda\,\frac{l}{d} = 700 \times 10^{-9}\,\frac{0{,}4}{10^{-4}} = 28 \times 10^{-4}\ \text{m} = 2{,}8\ \text{mm}}$$

Problema 18. Se ilumina normalmente, con luz blanca, una lámina de vidrio de 1 μ (micra) de espesor. Determinar la longitud de onda de las radiaciones que atraviesa la lámina con máxima intensidad. La luz visible tiene longitudes de onda comprendidas entre 3 800 y 7 800 Å; el índice de refracción del vidrio es 1,5.

Solución

$$e = 1\ \mu = 10^4\ \text{Å}$$

Para la producción de máximos por refracción es necesario:

$$2en = K\lambda$$

K, número entero, estará comprendido entre los valores obtenidos en la igualdad anterior, sustituyendo valores:

$$\frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{3\,800} = 7{,}9 \geqslant K \geqslant \frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{7\,800} = 3{,}8$$

Los valores de K serán:

$$7,\ 6,\ 5,\ 4$$

correspondientes a las siguientes longitudes de onda en el vacío:

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{7} = 4\,285\ \text{Å}} \qquad \boxed{\lambda_2 = \frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{6} = 5\,000\ \text{Å}}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{5} = 6\,000\ \text{Å}} \qquad \boxed{\lambda_4 = \frac{2 \times 10^4 \times 1{,}5}{4} = 7\,500\ \text{Å}}$$

Problema 19. Sobre una lámina de agua jabonosa de índice de refracción 4/3 y 10^{-3} mm de espesor incide luz blanca. Determínese las longitudes de onda de las radiaciones luminosas que faltarán en la luz reflejada en dicha lámina.

Solución

Para la producción de mínimos por reflexión es necesario:

$$2en = K\lambda$$

K, número entero, estará comprendido entre los valores comprendidos en la igualdad anterior para los límites del espectro visible (3 800 Å y 7 800 Å), sustituyendo valores:

$$\frac{2 \times 10^{-6}\, 4}{3 \times 3\,800 \times 10^{-10}} = 7{,}0 > K > \frac{2 \times 10^{-6}\, 4}{3 \times 7\,800 \times 10^{-10}} = 3{,}4$$

se obtendrán las radiaciones perdidas para:

$$K = 4 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2en}{K} = \frac{2 \times 10^{-6}\, 4}{3 \times 4}\, 10^{10}\ \text{Å} = 6\,667\ \text{Å}}$$

$$K = 5 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2 \times 10^{-6}\, 4}{3 \times 5}\, 10^{10}\ \text{Å} = 5\,333\ \text{Å}}$$

$$K = 6 \quad \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2 \times 10^{-6}\, 4}{3 \times 6}\, 10^{10}\ \text{Å} = 4\,444\ \text{Å}}$$

Problema 20. Se introduce, entre los bordes de dos láminas de vidrio superpuestas, otra lámina, de manera que quede formada una cuña de aire. Suponiendo la separación máxima de las láminas $h = 5 \times 10^{-3}$ cm y la longitud $l = 4$ cm, calcular el número de franjas de interferencias que se producirán en cada cm, iluminando al sistema normalmente con luz de 6 250 Å.

Solución

Los máximos por refracción se producirán en los lugares en que el espesor de la cuña de aire sea:

$$e = K\,\frac{\lambda}{2}$$

El primer máximo se formará a una distancia d del vértice de la cuña, que podremos calcular por la proporción:

$$\frac{l}{h} = \frac{d}{\lambda/2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{l\lambda}{2h}$$

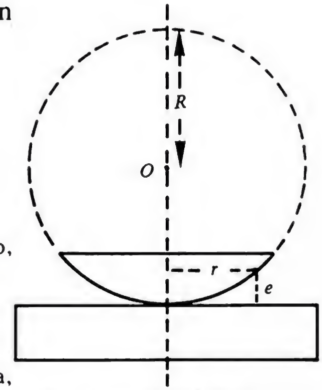
expresando todas las longitudes en cm:

$$d = \frac{4 \times 6\,250 \times 10^{-8}}{2 \times 5 \times 10^{-3}} = 0{,}025 \text{ cm}$$

El número de líneas por centímetro será:

$$\boxed{n^0 = \frac{1}{0{,}025} = 40}$$

Problema 21. Una lente plano-convexa de 1 dp (índice de refracción del vidrio: 1,5) se coloca sobre una placa de vidrio plana, apoyándola por su cara convexa. Al sistema se le ilumina desde lo alto con una luz de 5 000 Å. Calcular el radio de la novena circunferencia del máximo de interferencias, haciendo la observación por reflexión.



Problema XXXVII-21

Solución

La condición de máximo por reflexión es:

$$2en = (2K - 1)\frac{\lambda}{2}$$

siendo para la primera circunferencia $K = 1$, para la segunda $K = 2$... En nuestro caso, $K = 9$.
El radio r es media proporcional entre los segmentos que divide al diámetro $2R$:

$$r^2 = e(2R - e)$$

teniendo en cuenta que $n = 1$ y sustituyendo el valor de e despejado en la primera fórmula, nos queda:

$$r^2 = (2K - 1)\frac{\lambda}{4}\left[2R - (2K - 1)\frac{\lambda}{4}\right]$$

El sustraendo del paréntesis es despreciable en comparación con el minuendo; eliminándolo se obtiene:

$$r = \sqrt{\frac{(2K - 1)\lambda R}{2}} \qquad [1]$$

El radio R de la lente se calcula por la fórmula de su convergencia:

$$\varphi' = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

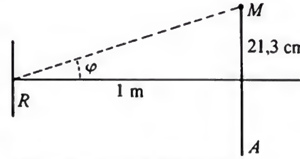
que, en nuestro caso, se reduce a:

$$1 = 0{,}5\,\frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R = 0{,}5 \text{ m}$$

Expresando en [1] todas las longitudes en cm, obtenemos:

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{(2 \times 9 - 1) \times 5\,000 \times 10^{-8} \times 50}{2}} = 0{,}15 \text{ cm}}$$

Problema 22. **1.** Tras una regla A con una pequeña rendija colocamos un foco F productor de luz de 4 160 Å. Observamos tal luz a través de una red de difracción R y vemos el primer máximo de difracción a 21,3 cm de la rendija; la distancia entre ésta y la red es 1 m. Calcular el número de trazos por mm que tiene la red.



Problema XXXVII-22

2. Iluminamos el aparato con una luz de longitud de onda desconocida y observamos la formación del primer máximo de difracción a 24,9 cm de la rendija. Calcular la longitud de onda de la luz.

Solución

1) La fórmula que da el primer máximo de difracción en una red es:

$$\delta \operatorname{sen} \varphi = \lambda$$

en la que δ es la constante de la red, igual a $1/n$, siendo n el número de rendijas por unidad de longitud; φ es el ángulo de difracción. La tangente del ángulo φ es:

$$\operatorname{tag} \varphi = \frac{21{,}3}{100} = 0{,}213 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 12^\circ$$

luego:

$$\delta = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} = \frac{\lambda}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\lambda} = \frac{\operatorname{sen} 12^\circ}{4\ 160 \times 10^{-7}} = 500 \text{ rend/mm}}$$

2) En este caso:

$$\operatorname{tag} \varphi = \frac{24{,}9}{100} = 0{,}249 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 14^\circ$$

y como:

$$\delta = \frac{1}{5\ 000} \text{ cm} = \frac{10^8}{5 \times 10^3} \text{ Å} = 2 \times 10^4 \text{ Å}$$

se obtiene:

$$\boxed{\lambda = \delta \operatorname{sen} \varphi = 2 \times 10^4 \operatorname{sen} 14^\circ = 4\ 832 \text{ Å}}$$

D) LUZ POLARIZADA

FORMULARIO

LEY DE BREWSTER: «Un rayo de luz se polariza totalmente por reflexión cuando la tangente del ángulo de incidencia es igual al índice de refracción; a tal ángulo se le llama ángulo de polarización.»

$$\operatorname{tag} \varphi = n$$

LEY DE MALUS (NICOLES Y LÁMINAS POLARIZANTES): «Cuando en un nicol incide un rayo de luz polarizada la intensidad luminosa del rayo emergente es directamente proporcional al coseno cuadrado del ángulo que forman el plano principal del nicol y el de vibración de la luz.»

$$I = I_0 \cos^2 \varphi$$

LEYES DE BIOT: «El poder rotatorio de los cuerpos sólidos es directamente proporcional al espesor de las sustancias atravesadas por la luz polarizada y a su densidad.»

$$\alpha = [\alpha] e \rho$$

$[\alpha]$ se llama poder rotatorio específico, cuyo valor es constante para cada sustancia.

«El poder rotatorio de las disoluciones es directamente proporcional al espesor de la capa líquida y a la concentración.»
Siendo l la longitud de un tubo lleno de líquido y atravesado por la luz polarizada, las leyes de Biot se expresan:

$$\alpha = [\alpha] l c$$

El poder rotatorio específico de una disolución es:

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{lc}$$

o sea: el giro del plano de polarización producido por una disolución de concentración unidad (1 %, por ejemplo), haciendo la observación a través de un tubo de la unidad de longitud (1 dm, por ejemplo).

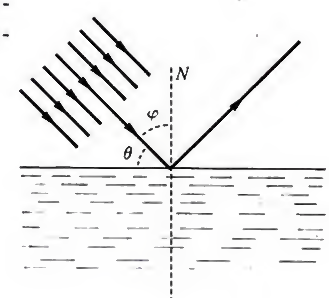
Problema 23. Calcular el ángulo de incidencia con que debe llegar un rayo de luz natural para polarizarse totalmente por reflexión, en un cristal de índice de refracción 1,5.

Solución

Para que el rayo de luz se polarice totalmente es necesario que:

$$\operatorname{tag}\varphi = n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\varphi = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi \simeq 56^\circ 18'}$$

Problema 24. Determínese la altura del Sol sobre el horizonte para que al reflejarse sus rayos sobre una piscina con agua (índice de refracción: 4/3) esté totalmente polarizada.



Problema XXXVII-24

Solución

Para que el rayo de luz se polarice totalmente:

$$\operatorname{tag}\varphi = n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tag}\varphi = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 53^\circ 8'$$

luego la altura del Sol sobre el horizonte es:

$$\boxed{\theta = 90 - \varphi = 36^\circ 52'}$$

Problema 25. Las direcciones de polarización de dos láminas polarizantes son paralelas, de forma que para una determinada posición de ambas se obtiene intensidad máxima. Determínese el ángulo que tenemos que girar una de las láminas para que la intensidad se reduzca a la cuarta parte.

Solución

Siendo:

$$I = \frac{1}{4} I_0$$

y como:

$$I = I_0 \cos^2\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\varphi = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \pm\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \pm 60^\circ} \quad \boxed{\varphi = \pm 120^\circ}$$

Problema 26. Se observa con un polarímetro una disolución de sacarosa; su poder rotatorio es de 5°. La longitud del tubo es de 1 dm. El poder rotatorio específico de la sacarosa es 66,5° $cm^3/g \cdot dm$. Calcular la concentración en g/l.

Solución

Aplicando la ley de Biot:

$$\alpha = [\alpha] l c \quad \Rightarrow \quad 5 = 66{,}5 \times 1 \times c \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{5}{66{,}5} = 0{,}075 \text{ g/cm}^3 = 75 \text{ g/l}}$$

Problema 27. Se disuelven 10 g de una mezcla de sacarosa y maltosa hasta obtener 50 cm^3 de disolución. El poder rotatorio de la disolución es 16,9°. Calcular la proporción de los dos componentes en la mezcla. Poder rotatorio específico de sacarosa y maltosa: 66,5 y 138 $cm^3/g \cdot dm$. La longitud del tubo es 1 dm.

Solución

La concentración de la mezcla de sacarosa y maltosa es:

$$c = \frac{10}{50} = 0{,}2 \text{ g/cm}^3$$

Si x e y son las concentraciones de sacarosa y maltosa en g/cm^3, se habrá de verificar:

$$x + y = 0{,}2$$

El poder rotatorio de la disolución, suma de los poderes rotatorios de los componentes de ella, es:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = l([\alpha_1]x + [\alpha_2]y) \quad \Rightarrow \quad 16{,}9 = 66{,}5x + 138y$$

$$16{,}9 = 66{,}5x + 138(0{,}2 - x) = 66{,}5x + 27{,}6 - 138x \quad \Rightarrow \quad 71{,}5x = 10{,}7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{10{,}7}{71{,}5} = 0{,}15 \text{ g/cm}^3}$$

$$\boxed{y = 0{,}2 - 0{,}15 = 0{,}05 \text{ g/cm}^3}$$

$$\boxed{\text{La disolución contiene 150 g de sacarosa y 50 g de maltosa por cada litro.}}$$

Problema 28. Explicar la teoría del cinematógrafo en relieve, sabiendo las siguientes cuestiones:

1. El tomavistas toma dos películas de la escena, estando situados los dos objetivos en tubos paralelos a la distancia de los ojos humanos.

2. Las dos fotografías se proyectan superpuestas en la pantalla, pasando los haces luminosos por láminas polaroides con sus ejes formando ángulo de $+45°$ y $-45°$ con la vertical.

3. El espectador ve la escena proyectada a través de gafas polaroides con sus ejes formando ángulos con la vertical de $+45°$ (una lámina) y $-45°$ (la otra).

Solución

En la pantalla se proyectan dos fotografías correspondientes a lo que sería la visión de la escena con cada uno de los ojos.

Sin gafas polaroides el ojo derecho ve en la pantalla lo que verían en la realidad el ojo derecho y el izquierdo, siendo, por tanto, la imagen borrosa. Si ante el ojo derecho se coloca una lámina polaroide, cuyo eje coincida con la vibración de la luz polarizada que ilumina la proyección correspondiente al ojo derecho y tal eje es perpendicular a la dirección de vibración de la luz que forma la otra imagen, se formará, exclusivamente, en la retina del derecho la imagen que en la visión de la realidad se hubiese formado. El mismo efecto se produce en el ojo izquierdo.

Capítulo XXXVIII

EL ATOMO

FORMULARIO

QUANTUM DE ENERGÍA:

$$E = h\nu$$

h: quantum de acción de Planck ($6{,}626 \times 10^{-27}$ erg · s); ν: frecuencia de la radiación.

ECUACIÓN DE EINSTEIN:

$$E = mc^2$$

MASA DE INERCIA DE UN FOTÓN:

$$E = mc^2 = h\nu \quad \Rightarrow \quad m = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$$

c: velocidad de la luz; λ: longitud de onda.

NÚCLEO:

N.° protones = n.° atómico = Z
N.° protones + n.° neutrones = masa atómica

$$Z + N = A$$

LA CORTEZA DEL ÁTOMO:

	NIVEL ENERGETICO						
NUMERO	1	2	3	4	5	6	...
LETRA	K	L	M	N	O	P	...

Los subniveles se les designa con las letras s, p, d, f, g, ...
La distribución de electrones en los distintos subniveles obedece a las leyes de Bohr-Bury.
1. El número máximo de electrones en cada nivel es $2n^2$.

2. El número máximo de electrones en el último nivel es 8. Por tanto, en el último nivel sólo puede haber electrones *s* y *p*.
3. El número máximo de subniveles por nivel es *n*.
4. En el penúltimo nivel sólo puede haber electrones *s*, *p* y *d*.
5. En el nivel exterior sólo puede haber electrones *s* si el penúltimo nivel no está completo, según las reglas 1 y 2.

La siguiente regla nemotécnica nos da la ordenación y distribución de electrones en los subniveles y niveles de la corteza del átomo:

$1s$					
$2s$	$2p$				
$3s$	$3p$	$3d$			
$4s$	$4p$	$4d$	$4f$		
$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$	
$6s$	$6p$	$6d$	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Se van completando los distintos subniveles, yendo de arriba abajo, según la dirección que marcan las flechas, hasta colocar tantos electrones como indica el número atómico del átomo, agrupándose, finalmente, los distintos subniveles en el nivel que le corresponde.

RADIACTIVIDAD: LEYES DE SODDY:

1.ª Al perder un átomo de un cuerpo radiactivo una partícula α disminuye su masa atómica cuatro unidades y su número atómico dos; transformándose el elemento en otro situado dos lugares antes en la clasificación periódica.

Se comprende perfectamente esta ley, puesto que las partículas α eliminadas proceden del núcleo; cada partícula perdida significa la eliminación de dos protones y dos neutrones.

2.ª Al perder un átomo de un cuerpo radiactivo una partícula β no se altera su masa atómica y su número atómico aumenta una unidad, transformándose el cuerpo en otro situado un lugar más avanzado en la clasificación periódica.

Ello es debido a que un fotón γ se materializa en un electrón que emerge del núcleo y un positrón, que aumenta una unidad el número de cargas positivas del núcleo.

La transformación de unos elementos en otros constituye la transformación de la materia por medio de las llamadas reacciones nucleares.

LEY DE TRASMUTACIONES RADIACTIVAS:

El número de átomos de un cuerpo radiactivo que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional al número total de tales átomos existentes en el cuerpo:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

N: número de átomos sin desintegrar; dN: número de átomos que se desintegran en el tiempo dt.

De la que se obtiene:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

«Cuando el tiempo crece en progresión aritmética el número de átomos del cuerpo radiactivo original disminuye en progresión geométrica.»

VIDA MEDIA:

«Es el tiempo medio que un átomo de cuerpo radiactivo permanece sin desintegrar.»

$$v = \frac{1}{\lambda}$$

PERÍODO DE SEMIDESINTEGRACIÓN:

«Es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de un cuerpo.»

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0{,}693\,v$$

PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE (HEISENBERG):

$$\Delta p \Delta q = h$$

«El producto de las imprecisiones de la localización y la cantidad de movimiento es igual a la constante de acción de Planck.»

Problema 1. Determinar la estructura del núcleo de los tres isótopos del uranio (masas atómicas: 234, 235 y 238). El número atómico de U es 92.

Solución

$Z + N = A$	$A_1 = 234 \Rightarrow N_1 = 234 - 92 = 142$ neutrones
$Z = 92$ protones	$A_2 = 235 \Rightarrow N_2 = 235 - 92 = 143$ neutrones
	$A_3 = 238 \Rightarrow N_3 = 238 - 92 = 146$ neutrones

Problema 2. Determinar la estructura electrónica del bromo (Br), sabiendo que $Z = 35$.

Solución

Siguiendo la regla nemotécnica del formulario, se obtiene:

$$1s^2;\ 2s^2;\ 3p^6;\ 3s^2;\ 3p^6;\ 4s^2;\ 3d^{10};\ 4p^5$$

luego:

$$\boxed{1s^2 - 2s^2,\ 2p^6 - 3s^2,\ 3p^6,\ 3d^{10} - 4s^2\ 4p^5}$$

Problema 3. Calcular la energía que posee un átomo de hidrógeno excitado al absorber luz ultravioleta de longitud de onda $121{,}6 \times 10^{-7}$ m.

Solución

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{121{,}6 \times 10^{-7}} = 2{,}45 \times 10^{13}\ \text{Hz}$$

$$\boxed{E = h\nu = 6{,}626 \times 10^{-34} \times 2{,}45 \times 10^{13} = 1{,}62 \times 10^{-20}\ \text{J}}$$

Problema 4. Calcular la longitud de onda asociada a un electrón que se propaga con 4 000 km/s de velocidad.

Solución

Vendrá dada por la ecuación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \left| \begin{array}{l} h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \\ m = 9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg} \\ v = 4 \times 10^6\ \text{m/s} \end{array} \right| \quad \boxed{\lambda = 1{,}82 \times 10^{-10}\ \text{m} = 1{,}82\ \text{Å}}$$

Problema 5. ¿Qué fotón tiene más energía: el de la luz roja o el de la violeta? Calcular ambas energías suponiendo $\lambda_r = 8\,000$ Å, $\lambda_v = 4\,000$ Å.

Solución

La velocidad de la luz en unidades angström es:

$$c = 3 \times 10^{18}\ \text{Å/s}$$

La energía de una radiación viene dada por la expresión:

$$E = h\nu$$

donde h = quanto de acción de Planck y ν = frecuencia de la radiación.
La frecuencia de la luz roja será:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{18}}{8 \times 10^3} = \frac{3}{8}\, 10^{15}\ \text{Hz}$$

La energía del fotón rojo será:

$$\boxed{E = \frac{3}{8}\, 10^{15} \times 6{,}62 \times 10^{-27} = 2{,}4825 \times 10^{-12}\ \text{erg}}$$

La frecuencia de la luz violeta será:

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{3 \times 10^{18}}{4 \times 10^3} = \frac{3}{4}\, 10^{15}\ \text{Hz}$$

La energía del fotón violeta será:

$$\boxed{E = \frac{3}{4}\, 10^{15} \times 6{,}62 \times 10^{-27} = 4{,}965 \times 10^{-12}\ \text{erg}}$$

Como vemos, mayor que la de la luz roja.

Problema 6. El primer término de la serie radiactiva $4n$ es el torio (masa atómica: 232; número atómico: 90). Las radiaciones sucesivas emitidas hasta llegar al plomo son: α, β, β, α, α, α, α. Distribuir en un encasillado los cuerpos de la serie, expresando masa atómica y número atómico.

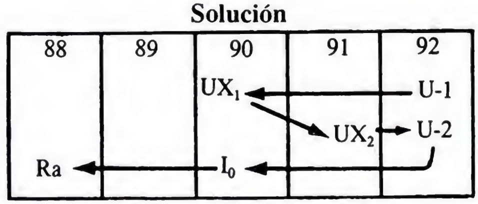
Solución

Aplicando las leyes de Soddy:

$$
\begin{array}{ccc}
90 & & 232 \\
 & \downarrow \alpha & \\
88 & & 228 \\
 & \downarrow \beta & \\
89 & & 228 \\
 & \downarrow \beta & \\
90 & & 228 \\
 & \downarrow \alpha & \\
88 & & 224 \\
 & \downarrow \alpha & \\
86 & & 220 \\
 & \downarrow \alpha & \\
84 & & 216 \\
 & \downarrow \alpha & \\
82 & & 212 \text{ isótopo del plomo}
\end{array}
$$

Problema 7. El uranio (número atómico: 92) pierde sucesivamente las siguientes partículas: α, β, β, α, α, transformándose en radio. Dibujar en un encasillado ordenado por números atómicos esta transformación.

Solución



Problema XXXVIII-7

Problema 8. ¿En qué difieren los conceptos: constante radiactiva, vida media y período de semidesintegración?

Solución

Constante radiactiva λ: tanto por 1 de átomos desintegrados en la unidad de tiempo.
Vida media: tiempo medio que un átomo de cuerpo radiactivo permanece sin desintegrar:

$$\nu = \frac{1}{\lambda}$$

Período de semidesintegración: tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de un cuerpo.

Problema 9. Determinar la vida media de un átomo de uranio, sabiendo que su período de semidesintegración es 4 500 millones de años.

Solución

$$T = 0{,}693\nu \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{T}{0{,}693} = \frac{4\,500}{0{,}693} \simeq 6\,493 \text{ millones de años}$$

Problema 10. El período de semidesintegración del ^{51}Cr es de 27 días; en un momento determinado tenemos $N_0 = 6{,}022 \times 10^{23}$ átomos de esta sustancia. ¿Cuántos quedarán transcurridos 5 meses?

Solución

Siendo el período de semidesintegración:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T}$$

y el número de núcleos que existe en un instante t será:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{N = 6{,}022 \times 10^{23} e^{-\frac{\ln 2}{27} 60 \times 30} = 5{,}92 \times 10^{21} \text{ núcleos}}$$

Problema 11. Calcular el tiempo que podrían estar alumbrando un millón de lámparas de 100 W con la energía producida al desintegrarse completamente 1 kg de materia.

Solución

Según la fórmula de Einstein, la energía producida en la desintegración viene dada por:

$$E = mc^2$$

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ g} \\ c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s} \end{array}\right| \quad E = 9 \times 10^{23} \text{ erg} = 9 \times 10^{16} \text{ J}$$

Este valor tendrá que ser igual al producto de la potencia de las lámparas ($100 \times 10^6 = 10^8$ W) por el tiempo que luzcan:

$$9 \times 10^{16} = 10^8 t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{9 \times 10^{16}}{10^8} = 9 \times 10^8 \text{ s} \simeq 28 \text{ años}}$$

Problema 12. Calcular el número de metros cúbicos de agua que se podrían calentar de 0° a 100° con la energía proporcionada por 1 g de materia al desintegrarse totalmente.

Solución

El calor necesario para calentar 1 m^3 de agua de 0° a 100° C:

$$Q = 1\,000 \times 100 = 100\,000 \text{ kcal}$$

que equivalen a:

$$W = 427 \times 10^5 \text{ kgm}$$

Un gramo de sustancia produce al desintegrarse:

$$E = 9 \times 10^{20} \text{ erg} = 9 \times 10^{13} \text{ J} = \frac{9 \times 10^{13}}{9{,}8} \text{ kgm}$$

Dividiendo los dos valores, obtendremos el número de metros cúbicos de agua que cumplen la condición del enunciado:

$$\boxed{n = \frac{9 \times 10^{13}}{9{,}8 \times 427 \times 10} = 2 \times 10^5 \text{ m}^3}$$

Problema 13. La desintegración del uranio 235 se acelera bombardeando su núcleo con neutrones. Suponiendo que en la reacción nuclear de Hahn y Strassman hay un defecto de masa atómica, de 0,2154 unidades de masa atómica, calcular en erg y en eV la energía producida en la desintegración de un átomo de uranio.

Solución

$E = mc^2$

$m = 0{,}2154 \times 1{,}661 \times 10^{-24}$ g

$c = 3 \times 10^{10}$ cm/s

$1 \text{ eV} = 1{,}60 \times 10^{-12}$ erg

$$\Rightarrow \boxed{E = 0{,}2154 \times 1{,}661 \times 10^{-24} \times 9 \times 10^{20} \text{ erg} = 3{,}22 \times 10^{-4} \text{ erg} = 2{,}01 \times 10^8 \text{ eV}}$$

Problema 14. Una de las cargas de proyección de una pieza de montaña de 75/22 está constituida por 300 g de pólvora sin humo, y con ella se consigue impulsar a un proyectil de 7 kg a una velocidad inicial de 350 m/s. ¿Qué cantidad de materia transformada en energía sería necesaria para producir el efecto de la carga de pólvora?

Solución

La energía del proyectil es:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} 7\,000 \times 35\,000^2 = 4\,287{,}5 \times 10^9 \text{ erg}$$

Esta energía sería igual a la producida por m gramos desintegrados (mc^2):

$$4\,287{,}5 \times 10^9 = 9m\,10^{20} \quad \Rightarrow \boxed{m = \frac{4\,287{,}5 \times 10^9}{9 \times 10^{20}} = 476 \times 10^{-11} \text{ g}}$$

Problema 15. Aceleramos un electrón hasta que adquiere una velocidad de 300 m/s, medida con una precisión del 0,01 %. ¿Con qué precisión se puede localizar la posición de este electrón?

Solución

El momento lineal del electrón será:

$$p = mv = 9{,}1 \times 10^{-31} \times 300 = 2{,}7 \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La incertidumbre del momento lineal vendrá dada por el 0,01 % de este valor:

$$\Delta p = 0{,}0001 \times 2{,}7 \times 10^{-28} = 2{,}7 \times 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La incertidumbre mínima en su localización será:

$$\boxed{\Delta x = \frac{h}{\Delta p} = \frac{6{,}62 \times 10^{-34}}{2{,}7 \times 10^{-32}} = 2{,}45 \times 10^{-2} \text{ m} = 2{,}45 \text{ cm}}$$

Problema 16. Determinamos la posición de un electrón con una imprecisión de 1 Å. ¿Cuál es la imprecisión en la medida de su cantidad de movimiento, de su velocidad y de su energía cinética? (Suponer la masa del electrón $9{,}106 \times 10^{-28}$ g y no considerar la corrección relativista.)

Solución

Δq = imprecisión en la localización = 1 Å = 10^{-8} cm.
Δp = imprecisión en la medida de la cantidad de movimiento.
h = quanto de acción de Planck = $6{,}62 \times 10^{-27}$ erg · s.

1)

$$\boxed{\Delta p = \Delta(mv) = m\Delta v = \frac{h}{\Delta q} = \frac{6{,}62 \times 10^{-27}}{10^{-8}} = 6{,}62 \times 10^{-19} \text{ g} \cdot \text{cm/s}}$$

2)

$$\boxed{\Delta v = \frac{\Delta p}{m} = \frac{6{,}62 \times 10^{-19}}{9{,}106 \times 10^{-28}} = 0{,}727 \times 10^{9} \text{ cm/s} = 7\,270 \text{ km/h}}$$

3)

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \frac{1}{2} m\Delta v^2 = \frac{1}{2} m2v\Delta v = v\Delta(mv) = v\Delta p = v6.62 \times 10^{-19} \text{ erg}}$$

(expresado v en cm/s).

Capítulo XXXIX

ELECTRONICA. RAYOS CATODICOS Y RAYOS X

Problema 1. El filamento de un diodo es de platino, tiene un área de 0,5 cm^2 y se pone incandescente a 1 600° K. Sabiendo que la constante de la ley de Richardson-Dushman vale 32 $A/cm^2 \cdot °K^2$ y que el trabajo de extracción es 5,3 eV. Calcular la intensidad de corriente de saturación.

Solución

La ecuación de Richardson-Dushman es:

$$\frac{I}{S} = AT^2 \varepsilon^{-\frac{eV_w}{kT}}$$

siendo:

$S = 5 \times 10^{-5}\ m^2$	$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J/°K$
$A = 32 \times 10^4\ A/m^2 \cdot °K^2$	$T = 1\ 600°\ K$
$E_w = eV_w = 5{,}3 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ J$	$\varepsilon = 2{,}718$

obtenemos:

$$\boxed{I = 5 \times 10^{-5}\ 32 \times 10^4\ 1\ 600^2 \varepsilon^{-\frac{5{,}3 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{1{,}38 \times 10^{-23}\ 1\ 600}} = 4{,}096 \times 10^7 \varepsilon^{-38{,}406} = 8{,}57\ A}$$

Problema 2. Sobre un haz de rayos catódicos actúa un campo eléctrico y un campo magnético, perpendiculares entre sí y perpendiculares a la velocidad de estos rayos. Sabiendo que el tubo de producción de los rayos tiene 1 V de caída de potencial, que la carga de un electrón es $1{,}6 \times 10^{-19}$ C y que el valor del campo eléctrico es 6×10^5 veces mayor que el magnético, medidos ambos en el SI. Determinar:

1. ¿Cuándo no sufrirán los rayos desviación alguna? ¿Qué velocidad tienen los electrones?

2. ¿Cuál es la masa del electrón?

Solución

1) Si el campo eléctrico es $\boldsymbol{E}$, la fuerza $\boldsymbol{F}_1$ (que actúa sobre un electrón de carga e) tiene por valor:

$$F_1 = eE$$

dirección la del campo y el sentido contrario a él, ya que la carga es negativa.
Si el campo magnético es $\boldsymbol{B}$ y el electrón se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$, perpendicular a $\boldsymbol{B}$, la fuerza que actúa sobre él por efecto del campo magnético es:

$$F_2 = evB$$

la dirección de esta fuerza es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{B}$ y el sentido contrario al giro de un sacacorchos que gira de $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{B}$ por el camino más corto, por ser la carga negativa.
Para que no se produzca desviación en el electrón las fuerzas deben ser iguales y de sentido contrario.

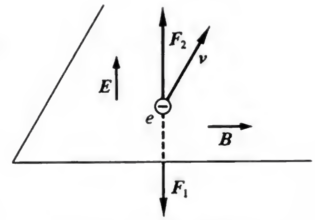
$$eE = evB \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{E}{B} = 6 \times 10^5 \text{ m/s} = 600 \text{ km/s}}$$

2) Como el electrón sufre una caída de potencial de 1 V, la energía que adquiere será:

$$W = 1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

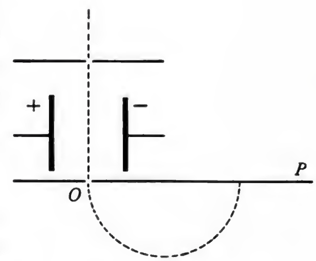
que se emplea en energía cinética, puesto que alcanza la velocidad v, luego:

$$W = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = \frac{2W}{v^2} = \frac{2 \times 1{,}6 \times 10^{-19}}{36 \times 10^{10}} \simeq 9 \times 10^{-31} \text{ kg}}$$



Problema XXXIX-2

Problema 3. Entre las armaduras de un condensador separadas entre sí 2 cm establecemos una diferencia de potencial de 200 V. Perpendicularmente al campo eléctrico originamos un campo magnético de 10^{-3} T (perpendicular al plano del papel y hacia el exterior). Entre las armaduras lanzamos un finísimo haz de rayos positivos (perpendicular a los dos campos), del que seleccionamos, a la salida de éstos, un haz por medio de un diafragma cuyo estrecho orificio está en línea recta con el haz primitivo. Habremos realizado así un «selector» de velocidades. Calcular:
1. La velocidad de las partículas que atraviesan el orificio O.
2. Si las partículas seleccionadas penetran en un nuevo campo magnético perpendicular al plano del dibujo, describiendo una trayectoria circular, y sabemos que el gas del que proceden los iones positivos es neón, ¿cuántos impactos habrá en una placa fotográfica situada en P? (espectrógrafo de masas de Baimbrige).
3. Siendo las masas atómicas de los isótopos que forman el neón 20 y 22, el campo magnético uniforme que existe a la salida del selector de velocidades de 2 T, estando la experiencia realizada en el vacío y el átomo de neón ionizado por la pérdida de un solo electrón, ¿cuál es la distancia entre los impactos obtenidos en la placa P?



Problema XXXIX-3

Solución

1) Para que la partícula no se desvíe de su trayectoria rectilínea que pasa por O es necesario que:

$$F_1 = F_2 \left| \begin{array}{l} F_1 = Eq \\ \\ F_2 = B_1 qv \end{array} \right| \Rightarrow \quad Eq = B_1 qv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{E}{B_1}$$

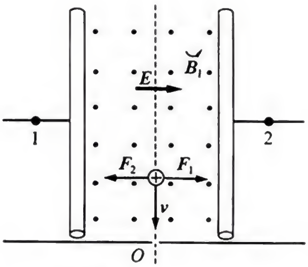
y como:

$$E = \frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{200}{0{,}02} = 10^4 \text{ N/C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{10^4}{10^{-3}} = 10^7 \text{ m/s}}$$

2) El radio de la trayectoria circular a la salida del orificio O es:

$$r = \frac{mv}{qB_2}$$

v = velocidad partículas positivas, igual para todas ellas, debida al «selector» de velocidades.
q = carga de cada partícula, igual para todas ellas si han sufrido la misma ionización.
B_2 = campo magnético a la salida del selector de velocidades (constante, por ser el campo uniforme).
El radio de los trayectos es proporcional a la masa de las partículas; se producen, así, tantos impactos distintos cuantos sean los isótopos del neón (dos, de masas atómicas 20 y 22).



Problema XXXIX-3-1.

3) Como 1 u = $1{,}66 \times 10^{-27}$ kg, las masas en kg de cada partícula de ambos isótopos serán:

$$m_{20} = 20 \text{ u} = 33{,}2 \times 10^{-27} \text{ kg} \qquad m_{22} = 22 \text{ u} = 36{,}54 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

la carga positiva de cada partícula será igual a la del electrón ($1{,}6 \times 10^{-19}$ C), y la distancia entre los impactos, d, la diferencia entre los dos diámetros; por tanto:

$$\left.\begin{aligned} r_{20} &= \frac{m_{20}v}{eB_2} \\ r_{22} &= \frac{m_{22}v}{eB_2} \end{aligned}\right| \quad \boxed{d = 2(r_{22} - r_{20}) = \frac{2v}{eB_2}(m_{22} - m_{20}) = \frac{2 \times 10^7 \, 1{,}66 \times 10^{-27}}{1{,}6 \times 10^{-19} \, 2}(22 - 20) \text{ m} = 20{,}7 \text{ cm}}$$

Problema 4. Hacemos incidir una radiación de 1 μ de longitud de onda sobre un metal. La velocidad de los fotoelectrones producidos es de 100 km/s. Calcular la energía necesaria para arrancar un electrón del átomo del cuerpo iluminado.

Solución

La energía de una radiación es $h\nu$, luego:

$$\left.\begin{aligned} E &= h\nu \\ \nu &= \frac{c}{\lambda} \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34} \, 2{,}998 \times 10^8}{10^{-6}} = 1{,}986 \times 10^{-19} \text{ J}$$

esta energía se emplea en separar al electrón del átomo y comunicarle energía cinética:

$$E = E_0 + \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad E_0 = E - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$m = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg; $v_0 = 10^5$ m/s; luego:

$$\boxed{E_0 = 1{,}986 \times 10^{-19} - \frac{1}{2} 9{,}109 \times 10^{-31} \, 10^{10} = 1{,}940 \times 10^{-19} \text{ J} = 1{,}2 \text{ eV}}$$

Problema 5. Iluminando con radiación de longitud de onda decreciente el cátodo de aluminio de una célula fotoeléctrica, se observa que se inicia la corriente al incidir sobre el metal una radiación cuya longitud de onda es 4 700 Å. Calcular, en eV, el trabajo necesario para arrancar fotoelectrones del átomo de aluminio ($c = 2{,}998 \times 10^5$ km/s; $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C; $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s).

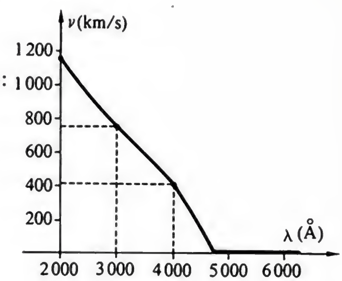
Solución

$$\left.\begin{array}{l} E = h\nu \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{E = h\,\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\, 2{,}998 \times 10^{8}}{47 \times 10^{-10}\, 1{,}602 \times 10^{-19}} = 263{,}8 \text{ eV}}$$

Problema 6. Dibujar un gráfico en el que se relacionen las longitudes de onda de las radiaciones que inciden sobre una lámina de aluminio y las velocidades de los fotoelectrones. Realizar los cálculos para longitudes de onda de 5 500 Å, 4 700 Å (longitud de onda «crítica»), 4 000 Å, 3 000 Å y 2 000 Å.

Solución

$$\left.\begin{array}{l} E = E_0 + \dfrac{1}{2}mv^2 \\ E = h\nu \\ E = h\nu_0 \\ \nu = \dfrac{c}{\lambda} \\ \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0} \end{array}\right| \Rightarrow h\left[\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda_0}\right] = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right]}$$



Problema XXXIX-6

Las longitudes de onda mayores que la crítica no provocan emisión de fotoelectrones; luego:

$$\lambda = 5\,500 \text{ Å} \Rightarrow v = 0$$

$$\lambda = 4\,700 \text{ Å} \Rightarrow v = 0$$

para las demás:

$$\sqrt{\frac{2hc}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}626 \times 10^{-34} \times 2{,}998 \times 10^{8}}{9{,}109 \times 10^{-31}}} = 660{,}603 \text{ m}^{3/2}/\text{s}$$

$$\lambda = 4\,000 \text{ Å} \Rightarrow v = \frac{660{,}403}{10^{-5}}\sqrt{\frac{1}{4\,000} - \frac{1}{4\,700}} \text{ m/s} = 403 \text{ km/s}$$

$$\lambda = 3\,000 \text{ Å} \Rightarrow v = \frac{660{,}403}{10^{-5}}\sqrt{\frac{1}{3\,000} - \frac{1}{4\,700}} \text{ m/s} = 725 \text{ km/s}$$

$$\lambda = 2\,000 \text{ Å} \Rightarrow v = \frac{660{,}403}{10^{-5}}\sqrt{\frac{1}{2\,000} - \frac{1}{4\,700}} \text{ m/s} = 1\,119 \text{ km/s}$$

Problema 7. Demostrar que el producto de la longitud de onda en Å de los rayos X correspondientes a la máxima intensidad de los rayos heterogéneos, por el potencial en voltios del tubo de producción, es, aproximadamente, 12 400.

Solución

$$E = Ve = h\nu = h\,\frac{c}{\lambda} \Rightarrow V\lambda = \frac{hc}{e}$$

sustituyendo valores:

$$\boxed{V\lambda = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\, 2{,}998 \times 10^{8}}{1{,}602 \times 10^{-19}}\, 10^{10} = 12\,400 \text{ V} \cdot \text{Å}}$$

Problema 8. ¿Qué potencial habremos de dar a un tubo de rayos X para que la longitud de onda correspondiente a la máxima intensidad de la radiación heterogénea sea de 10 unidades X? ¿Cuál será la frecuencia reducida o número de ondas por cm de la radiación?

Solución

1)

$$1 \text{ uX} = 10^{-13} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 10 \text{ uX} = 10^{-12} \text{ m}$$

de $V\lambda = 12\,400 \text{ V} \cdot \text{Å} = 124 \times 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{m}$, obtenida en el problema anterior, se obtiene:

$$\boxed{V = \frac{124 \times 10^{-8}}{10^{-12}} = 124 \times 10^{4} \text{ V}}$$

2)

$$\boxed{n = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10^{-10}} = 10^{10} \text{ ondas/cm}}$$

Capítulo XL

IDEAS SOBRE RELATIVIDAD

Problema 1. 1. Determinar la velocidad relativa de una regla que para un observador ligado a ella mide 1 m y para nosotros (observadores que consideramos fijos) la medida es de 99 cm.
2. ¿Cuál es la masa de un cuerpo de 1 kg en movimiento con la regla, medida por nosotros?
3. El observador ligado al sistema móvil lleva consigo un péndulo que «bate»-segundos. ¿Cuál es el período de tal péndulo observado desde el sistema fijo?
4. En un instante determinado (por ejemplo: en el instante en que el sistema móvil inicia su movimiento a la velocidad determinada en 1) se sincronizan dos relojes en las 12; cuando el reloj del observador fijo marca de nuevo las 12, ¿qué hora marcará el reloj del sistema móvil?

Solución

1) $x'_2 - x'_1$ = distancia entre dos puntos en la dirección de la velocidad, medida por un observador ligado al sistema móvil. $x_2 - x_1$ = distancia entre los mismos puntos para un observador exterior con respecto al cual se desplaza el sistema móvil a velocidad v. c = velocidad de la luz en el vacío:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \left[\frac{x_2 - x_1}{x'_2 - x'_1}\right]^2} = c\sqrt{1 - \left[\frac{99}{100}\right]^2} = 0{,}141\,c$$

$$\boxed{v = 42\ 300\ \text{km/s}}$$

2)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left[\dfrac{42\ 300}{300\ 000}\right]^2}} = 1{,}010\,m_0$$

$$\boxed{m = 1{,}010 \times 1\ 000 = 1\ 010\ \text{g}}$$

3) Llamando T_0 al período para nosotros y $T = 2$ s el período para el sistema móvil:

$$T_0 = \frac{T}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 1{,}010\,T \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2{,}020\ \text{s}$$

4) Para el observador del sistema fijo han transcurrido $12 \times 60 \times 60 = 43\ 200$ fenómenos periódicos de un segundo de duración y $12 \times 60 \times 60/1{,}010$ fenómenos periódicos iguales

en el sistema móvil; si por cada semiperíodo en uno y en otro una saeta avanza una división de un reloj, a la que llamamos segundo, se habrán sucedido en el sistema móvil (para el observador del fijo) un número de segundos dado por el cociente anterior, e igual a 42 772, el reloj del sistema móvil se «retrasa» para el observador exterior: $43\,200 - 42\,772 = 4\,280 = 7^m 8^s$, marcando, por tanto:

$$\boxed{11^h 52' 52''}$$

Problema 2. Calcular la velocidad, con respecto a nosotros, de un sistema para que la masa de los cuerpos situados en él se nos duplique. ¿Qué longitud adquirirán los cuerpos medida desde nuestro sistema en la dirección del movimiento? ¿Qué fenómeno se presentaría en la medida del tiempo?

Solución

1)

$$2m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 4 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \beta = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{v = \frac{3 \times 10^5 \sqrt{3}}{2} = 259\,800 \text{ km/s}}$$

2) Si l es la longitud que tiene 1 m situado en el sistema móvil, observado desde el fijo se verifica:

$$1 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow \boxed{l = \sqrt{1-\beta^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \text{ m}}$$

Las longitudes en la dirección del movimiento se reducirán para nosotros a la mitad.

3) El tiempo t transcurrido entre dos sucesos sería para nosotros, suponiendo un tiempo unidad en nuestro sistema para el mismo fenómeno:

$$\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1/4}} = 2 \text{ s}}$$

Los sucesos del sistema móvil consumirán, para nosotros, doble tiempo que los acaecidos en nuestro sistema.

Problema 3. La masa de un electrón en reposo es $m = 9{,}109 \times 10^{-28}$ g. Calcular:

1. La masa del electrón a 210 000 km/s.
2. Su energía total.
3. La energía debida a su masa.
4. Su energía cinética.
5. La longitud de onda asociada a estos electrones.

Solución

1)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{21}{30}\right)^2}} = 1{,}400 m_0 \Rightarrow \boxed{m = 12{,}753 \times 10^{-28} \text{ g}}$$

2)

$$\boxed{E = mc^2 = 12{,}753 \times 10^{-28}\, 9 \times 10^{20} = 114{,}777 \times 10^{-8}\ \text{erg}}$$

3)

$$\boxed{E_0 = m_0c^2 = 9{,}109 \times 10^{-28}\, 9 \times 10^{20} = 81{,}981 \times 10^{-8}\ \text{erg}}$$

4) La energía cinética será:

$$\boxed{T = E - E_0 = 32{,}796 \times 10^{-8}\ \text{erg}}$$

5)

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h\sqrt{1 - v^2/c^2}}{m_0 v} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}}{12{,}753 \times 10^{-31}\, 21 \times 10^{7}}\ \text{m} = 0{,}025\ \text{Å}}$$

SIMBOLOGIA Y NOMENCLATURA UTILIZADAS EN EL TEXTO

A	Amperímetro.
	Amperio.
	Amplitud.
	Aumento visual de un aparato óptico.
	Constante de Richardson.
	Dimensión de una intensidad de corriente.
	Masa atómica.
$\boldsymbol{A}$	Vector área o superficie.
Å	Agnström (1 Å $= 10^{-10}$ m).
a	Año.
	Area (1a $= 10^2$ m^2).
	Como prefijo es Atto... (10^{-18}).
a	Distancia objeto en lentes.
a'	Distancia imagen en lentes.
$\mathbf{a}$	Vector aceleración.
$\mathbf{a}_n$	Vector aceleración normal.
$\mathbf{a}_\tau$	Vector aceleración tangencial.
$\bar{\mathbf{a}}$	Vector aceleración media.
arc	Arco...
atm	Atmósfera (1 atm = 10129280 Pa).
$a(x, y, z)$	Intensidad de un campo escalar.
B	Módulo de compresibilidad.
$\boldsymbol{B}$	Vector campo Magnético.
b	Baria (1 b = 1 dyn/cm^2 $= 10^{-1}$ Pa).
b	Distancia.
bar	Bar (1 bar $= 10^5$ Pa $= 10^6$ b).
C	Culombio (1 C = 1A · s).
ºC	Grado Celsius.
C	Camino óptico.
	Capacidad eléctrica.
	Centro de curvatura de un espejo o dioptrio.
	Precio, costo.
c	Como prefijo es Centi... (10^{-2}).
	Ciclo.
c	Calor específico.
	Velocidad de la luz.
	Velocidad de la onda.
	Velocidad del sonido.
	Coeficiente de restitución.
	Concentración molar.
$\bar{c}$	Velocidad cuadrática media.
c_p	Calor específico a presión constante.
c_v	Calor específico a volumen constante.
c_o	Velocidad de la luz en el vacío.
cal	Caloría (1 cal = 4,18 J).
cd	Candela (1 cd = 1 lm/sr).
CG	Centro de gravedad.
CGS	Sistema cegesimal.
CM	Centro de Masa.
cm	centímetro (1 cm $= 10^{-2}$ m).
	Unidad de capacidad en UEE (1 cm $= 1/9 \times 10^{11}$ F).
c.q.d.	Como queríamos demostrar.
cos	Coseno.
cosec	Cosecante.
cte.	Constante.
CV	Caballo de Vapor (1 CV $= 75 \times 9{,}8$ W).
D	Diámetro.
	Longitud de la división de la regla de un nonius.
	Paso de rosca de un nonius circular.
$\boldsymbol{D}$	Vector desplazamiento eléctrico.
d	Día.
	Como prefijo es deci... (10^{-1}).
d	Carga del deuterón.
	Derivada.
	Diámetro.
	Distancia.
	Flecha.
	Longitud de una división del nonius.
d_N	Distancia entre nodos.
d_V	Distancia entre vientres.
da	Como prefijo en deca... (10).
dam	Decametro (1 da = 10 m).
db	Decibel.
div	Operador divergencia.
dm	Decímetro (1 dm $= 10^{-1}$ m).
dp	Dioptría.
dyn	Dina (1 dyn $= 10^{-5}$ N).
E	Empuje.
	Energía.
	Error relativo.
	Espejo.
	Humedad relativa.
	Iluminación.
	Módulo de Young.

$\boldsymbol{E}$	Vector campo eléctrico.
e	Base de los ln ($e = 2{,}718281828$).
	Carga del electrón ($e = -1{,}6021892 \times 10^{-19}$ C).
	Entrehierro.
	Espesor.
E_c	Energía cinética.
E_q	Equivalente químico.
E_w	Trabajo de extracción.
erg	Ergio (1 erg $= 10^{-7}$ J).
eV	Electronvoltio (1 eV $= 1{,}602 \times 10^{-19}$ J).
$\boldsymbol{E}(x, y, z)$	Campo vectorial.
F	Faradio (1 F = 1 A·s/V).
F	Constante de Faraday ($9{,}648455$ C·mol^{-1}).
	Dimensión de una fuerza.
	Foco emisor de ondas.
	Foco objeto.
$\boldsymbol{F}$	Vector fuerza.
F'	Foco imagen.
ºF	Grados Fahrenheit.
f	Como prefijo es fento... (10^{-15}).
f	Distancia focal objeto.
	Flecha del esferómetro.
	Tensión máxima de vapor.
f'	Distancia focal imagen.
$\boldsymbol{f}$	Fuerza.
$\boldsymbol{F}_B$	Fuerza debida al campo magnético.
$\boldsymbol{F}_C$	Fuerza centrípeta y centrífuga.
$\boldsymbol{F}_E$	Fuerza debida al campo eléctrico.
$\boldsymbol{F}_{ext}$	Fuerzas exteriores.
$\boldsymbol{F}_{int}$	Fuerzas interiores.
FEM	Fuerza electromotriz.
fm	Fermi (1 fm $= 10^{-15}$ m).
ft	Pie (1 ft = 0,3048 m).
G	Como prefijo es Giga... (10^9).
G	Constante de gravitación universal ($6{,}672 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2).
	Galbanómetro.
	Gasto, caudal.
	Módulo de deslizamiento, cizalladura o torsión.
g	Gramo (1 g $= 10^{-3}$ kg).
$\boldsymbol{g}$	Intensidad del campo gravitatorio.
$\boldsymbol{g}_0$	Intensidad del campo gravitatorio terrestre en la superficie.
g-f	Gramos fuerza o gramospondio.
gp	Gramospondio.
grad	Operador gradiente.
H	Henrio (1 H = 1 Wb/A).
H	Presión atmosférica.
	Punto principal objeto.
H'	Punto principal imagen.
$\boldsymbol{H}$	Excitación. Vector intensidad del campo magnético.
h	Como prefijo es hecto... (10^2).
	Hora.
h	Altura.
	Coeficiente de radiación de una substancia.
	Quantum de acción de Plank ($6{,}626176 \times 10^{-34}$ J·s).
h_f	Pérdida de carga.
h_G	Altura del centro de gravedad.
ha	Hectárea (1 ha $= 10^4$ m^2).
hm	Hectómetro (1 hm $= 10^2$ m).
Hz	Herz (1 Hz = 1 revolución/segundo).
I	Intensidad.
	Intensidad de corriente.
	Intensidad luminosa.
	Momento de inercia.
	Rayo incidente.
$\bar{I}$	Expresión fasorial de la intensidad.
$\boldsymbol{I}$	Impulso mecánico.
i	Angulo de incidencia.
	Intensidad de corriente.
	Unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$).
$\boldsymbol{i}$	Vector unitario en la dirección del eje OX.
I_0	Intensidad máxima.
I_c	Intensidad de corriente a la capacitancia.
I_e	Intensidad de corriente alterna eficaz.
I_G	Momento de inercia respecto a un eje que pasa por el CM.
I_L	Intensidad de corriente a la inductancia.
in	Pulgada (1 in $= 2{,}54 \times 10^{-2}$ m).
$[I]$	Forma compleja de la intensidad de corriente.
J	Julio (15 = 1 N·m).
J	Constante de Joule (1 J = 4,18 J/cal).
$\boldsymbol{J}$	Vector densidad de corriente.
	Vector momento angular.
$\boldsymbol{j}$	Vector unitario en la dirección del eje OY.
K	Eficiencia de un frigorífico.
	Coeficiente de conductividad.
	Coeficiente de solubilidad.
	Coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura.
	Constante.
	Constante de la ley de Coulomb.
	Constante de la ley de Hooke.
	Constante de tiempo de un circuito.
	Número entero.
k	Como prefijo es kilo... (10^3).
k	Coeficiente de velocidad.
	Constante de Boltzman ($1{,}380\,662 \times 10^{-23}$ J/ºK).
	Número de ondas.
$\boldsymbol{k}$	Vector unitario en la dirección del eje OZ.
K_0	Constante de la ley de Coulomb para el vacío (9×10^9 N·m^2/C^2).
ºK	Grados Kelvin.
kc	Kilociclo (1 kc = 1 kHz $= 10^3$ Hz).

kg	Kilogramo.
kgm	Kilográmetro (1 kgm = 9,8 J).
km	Kilómetro (1 km = 10^3 m).
kp	Kilopondio o kilogramo fuerza (1 kp = 9,8 N).
kW	Kilovatio (1 kW = 10^3 W).
kW·h	Kilovatio por hora (1 kW·h = $3{,}6 \times 10^6$ J).
L	Autoinducción.
	Brillo o luminancia.
	Dimensión de una longitud.
	Lente.
l	litro (1 l = 10^{-3} m^3).
l	Angulo límite o de reflexión total.
	Arco sobre una circunferencia.
	Calor latente de cambio de estado.
$\boldsymbol{l}$	Vector longitud.
lb	Libra-masa (1 lb = 0,4536 kg).
lm	Lumen (1 lm = 1 cd·sr).
ln	Logaritmo neperiano.
log	Logaritmo decimal.
lx	Lux (1 lx = 1 lm/m^2).
M	Como prefijo es mega... (10^6).
M	Dimensión de una masa.
	Coeficiente de Inducción Mutua.
	Fuerza magnetomotriz.
	Masa.
	Masa molecular.
$\boldsymbol{M}$	Vector Imanación.
m	Como prefijo es mili (10^{-3}).
	Metro.
m	Masa.
$\boldsymbol{m}$	Vector momento magnético.
m_e	Masa del electrón en reposo ($9{,}10953 \times 10^{-31}$ kg).
m_n	Masa del neutrón en reposo ($1{,}674954 \times 10^{-27}$ kg).
m_p	Masa del protón en reposo ($1{,}672648 \times 10^{-27}$ kg).
M_0	Masa de la Tierra.
M_{At}	Masa atómica.
mb	Milibar (1 mb = 10^{-3} bar = 10^3 b).
mile	Milla (1 mile = 1609 m. Una mile marina = 1 852 m).
min	Minuto (1 min = 60 s).
mm	Milímetro (1 mm = 10^{-3} m).
MVA	Movimiento vibratorio armónico.
mμ	Milimicra (1 mμ = 10^{-9} m).
N	Newton (1 N = 1 kg·m/s^2).
N	Número de Abogadro ($6{,}022045 \times 10^{23}$ mol^{-1}).
	Número de espiras por unidad de longitud.
	Número de neutrones del núcleo.
$\boldsymbol{N}$	Vector momento de una fuerza.
	Fuerza normal a una superficie.
n	Como prefijo es nano... (10^{-9}).
n	Indice de refracción.
	Número de divisiones del nonius.
	Número de espiras de un solenoide.
	Número de moles.
	Número de protones del núcleo.
	Número de rendijas por unidad de longitud.
nº	Número.
$\boldsymbol{n}^{o}$	Vector unitario en la dirección de la normal.
N_e	Momento de un vector con respecto a un eje.
N_R	Momento del par de rodadura.
	Momento mínimo de un sistema de vectores deslizantes.
n_i	Frecuencia de un dato.
O	Origen de un sistema de referencia.
	Centro geométrico.
ob	Observador
Oe	Oersted (1 Oe = $10^3/4\pi$ A·m^{-1}).
$OXYZ$	Sistema de ejes cartesianos hortogonales.
P	Poise (1 P = 0,1 Pa·s).
P	Potencia mecánica.
$\boldsymbol{P}$	Peso de un cuerpo.
	Vector Polarización eléctrica.
p	Como prefijo es pico... (10^{-12}).
p	Carga del protón ($1{,}6021892 \times 10^{-19}$ C).
	Esfuerzo de tracción.
	Precisión de un aparato.
	Presión.
	Tensión de vapor.
$\boldsymbol{p}$	Vector momento dipolar.
	Vector momento lineal o cantidad de movimiento.
P_A	Potencia activa.
$\boldsymbol{P}_A$	Peso aparente.
P_M	Potencia motor.
P_R	Potencia reactiva.
P_T	Potencia teórica.
P_U	Potencia útil.
Pa	Pascal (1 Pa = 1 N/m^2).
pc	Parsec (1 pc = $3{,}07 \times 10^{16}$ m).
pF	Picofaradio (1 pF = 10^{-12} F).
proy.	Proyección.
ptas.	pesetas.
Q	Carga eléctrica.
	Calor.
q	Carga eléctrica.
R	Coeficiente de ruptura.
	Constante de los gases perfectos (0,082 atm·l/ºK·mol).
	Número de Reinolds.
	Radio.
	Reluctancia.
	Resistencia.

$\boldsymbol{R}$ .... Resultante de un sistema de vectores deslizantes.
Vector de posición del CM.
Fuerza de rozamiento.
r .... Angulo de reflexión.
Angulo de refracción.
Radio.
$\boldsymbol{r}$ .... Vector de posición.
ºR .... Grados Reaumur.
R_0 .... Radio terreste.
$\boldsymbol{r}_0$ .... Vector de posición del origen de los tiempos.
$\boldsymbol{R}_e$ .... Fuerza de rozamiento estático.
$\boldsymbol{R}_d$ .... Fuerza de rozamiento dinámico.
rad .... Radián.
rot .... Operador rotacional.

S .... Coeficiente de seguridad.
Centro óptico.
Entropía.
S .... Vector área o superficie.
s .... Segundo.
s .... Espacio.
Distancia objeto.
s' .... Distancia imagen.
s_0 .... Espacio inicial.
sec .... Secante.
sen .... Seno.
sr .... Estereorradián.

T .... Tesla (1 T = 1 Wb/m^2 = 1 $kg/A{\cdot}s^2$).
Como prefijo es Tera... (10^{12}).
T .... Dimensión del tiempo.
Energía cinética.
Temperatura absoluta.
Período.
$\boldsymbol{T}$ .... Tensión mecánica.
t .... Tonelada (1 t = 10^3 kg).
t .... Temperatura centígrada.
Tiempo.
T_0 .... 273 ºK.
T_{int} .... Energía cinética interna.
tag .... Tangente.

U .... Energía potencial.
u .... Unidad de masa atómica (1 u = 1,661 × 10^{-27} kg).
u .... Energía de la unidad de volumen.
UEE .... Sistema de unidades electrostático.
$U(\boldsymbol{r})$ .... Energía potencial de punto.
utm .... Unidad técnica de masa (1 utm = 9,8 kg).
uX .... Unidad X (1 uX = 10^{-13} m).
$U(x, y, z)$ ...... Energía potencial de punto.

V .... Voltio (1 V = 1 J/C).
V .... Función Potencial.
Tensión eléctrica.
Voltímetro.
Volumen.
$\boldsymbol{V}$ .... Vector velocidad
v .... Valencia.
Vida media.
Volumen molar.
$\boldsymbol{v}$ .... Vector velocidad.
$\bar{V}$ .... Forma fasorial del potencial.
V_0 .... Potencial máximo de una corriente alterna.
v_0 .... Volumen de 1 mol en condiciones normales (22,4 l).
$\boldsymbol{v}_0$ .... Vector velocidad inicial.
$\bar{\boldsymbol{v}}$ .... Vector velocidad media.
v_{12} .... Velocidad relativa del sistema 1 respecto del 2.
V_C .... Potencial a la capacitancia.
V_e .... Potencial eficaz.
V_L .... Potencial a la inductancia.
V_S .... Volumen sumergido.
V_W .... Potencial de extracción.
V_X .... Potencial a la Reactancia.
$\boldsymbol{V}_\lambda$ .... Factor de eficiencia o luminosidad relativa.
$V(P)$ .... Potencial en un punto.
$V(\boldsymbol{r})$ .... Potencial en un punto.
$V(x, y, z)$ ...... Potencial en un punto.
$[V]$ .... Forma compleja del potencial.

W .... Vatio (1 W = 1 J/s).
W .... Trabajo, energía.
W_{ext} .... Trabajo de las fuerzas exteriores.
W_{int} .... Trabajo de las fuerzas interiores.
W_M .... Trabajo motor.
W_R .... Trabajo de las fuerzas no conservativas.
Trabajo resistente.
W_U .... Trabajo útil.
Wb .... Weber (1 Wb = 1 V·s = 1 N·m/A).

X .... Reactancia.
x .... Abcisa de un punto.
Elongación.
$\bar{x}$ .... Media aritmética.
X_C .... Capacitancia.
X_L .... Inductancia.
x_G .... Abcisa del centro de gravedad.
x_i .... Dato número i

y .... Ordenada de un punto.
Tamaño del objeto.
y' .... Tamaño de la imagen óptica.
y_G .... Ordenada del CG.
yd .... Yarda (1 yd = 0,9144 m).

Z .... Conjunto de los números enteros.
Impedancia
Número atómico
z .... Coordenada eje OZ.
Distancia Foco-objeto.
z' .... Distancia Foco-Imagen.
Z_{eq} .... Impedancia equivalente.
Z_G .... Coordenada del CG.

α	Angulo.
	Angulo del prisma o de refringencia.
	Angulo de torsión.
	Coeficiente de dilatación líneal.
	Coeficiente de temperatura (1/273,16).
	Poder rotatorio.
$\boldsymbol{\alpha}$	Aceleración angular
$[\alpha]$	Poder rotatorio específico.
β	Angulo.
	Aumento lateral.
	Coeficiente de dilatación superficial.
	Relación v/c.
	Sensación sonora o sonoridad.
γ	Angulo.
	Aumento angular.
	Coeficiente de dilatación cúbica.
	Coeficiente de las adiabáticas ($c_p / c_v = 1{,}41$).
	Módulo de Coulomb.
Δ	Incremento, variación.
	Intervalo óptico (distancia $F_1'F_2$).
	Operador laplaciana.
δ	Angulo.
	Angulo de desviación del prisma óptico.
	Constante de una red de difracción ($1/n$).
	Desplazamiento del rayo luminoso en láminas planoparalelas.
δ_m	Angulo de mínima desviación en un prisma.
ϵ	Angulos de incidencia, reflexión y refracción.
	Base de los ln.
	Constante dieléctrica de un medio.
	Error absoluto.
ϵ'	Constante dieléctrica relativa al vacío.
ϵ_0	Constante dieléctrica del vacío ($1/4\,\pi\,9 \times 10^9$ C²/N·m²).
ϵ_r	Error relativo.
η	Coeficiente de viscosidad.
	Rendimiento.
θ	Angulo.
χ	Susceptibilidad eléctrica.
χ_M	Susceptibilidad magnética.
Γ	Circulación.
λ	Densidad lineal.
	Longitud de onda o período espacial.
λ_0	Longitud de onda de la luz en el vacío.
μ	Como prefijo es micro... (10^{-6}).
	Densidad líneal.
	Micra ($1\ \mu = 10^{-6}$ m).
	Permeabilidad magnética.
μ'	Permeabilidad relativa al vacío.
μ_0	Permeabilidad del vacío ($4\pi/10^7$ N/A²).
μ_d	Coeficiente dinámico de rozamiento.
μ_e	Coeficiente estático de rozamiento.
ν	Frecuencia.
π	Número (3,141592654).
ρ	Coeficiente de resistencia a la rodadura.
	Densidad volumétrica.
	Radio de curvatura.
ρ_r	Densidad relativa.
Σ	Sumatorio.
σ	Constante de tensión superficial.
	Densidad superficial.
	Módulo de Poisson.
τ	Tiempo.
	Volumen.
$\boldsymbol{\tau}^0$	Vector unitario en la dirección de la tangente.
Φ	Diámetro.
	Flujo.
	Flujo luminoso de un foco puntual.
φ	Angulo.
	Convergencia de un sistema óptico.
	Corrección de fase.
$\Phi_{e\lambda}$	Flujo de energía o flujo radiante.
ψ	Elongación de la onda.
ψ_0	Amplitud de la onda.
Ω	Ohmio ($1\ \Omega = 1$ V/A).
ω	Angulo sólido.
	Pulsación o frecuencia angular.
$\boldsymbol{\omega}$	Velocidad angular.
º	Grado.
′	Minuto.
″	Segundo.
‾	Media de una magnitud.
	Fasor de una magnitud en alternas.
%	Tanto por ciento.
[ ]	Ecuación de dimensiones.
	Magnitud compleja.
| |	Módulo de un vector.
	Valor absoluto de una magnitud.
·	Producto escalar.
$\times$	Producto vectorial.
$\geqslant$	Mayor o igual.
$\leqslant$	Menor o igual.
$\Rightarrow$	Entonces, luego, por tanto, implica que...
$\Leftrightarrow$	equivalente.
$\in$	Pertenece a ...
	FEM
$\mathcal{E}_0$	FEM máxima de una corriente alterna.

ϵ_e	FEM eficaz.	$\int$	Integral.
$\bar{\epsilon}$	Fasor de la FEM.	$\int_C$	Integral de línea.
$[\epsilon]$	Expresión compleja de la FEM.	$\oint_C$	Integral de línea cerrada.
∂	Derivada parcial.	$\int_A$	Integral de área.
$\boldsymbol{\nabla}$	Operador Gradiente.	$\oint_A$	Integral de área cerrada.
∇^2	Operador Laplaciana.	$\int_V$	Integral de volumen.

CONSTANTES FISICAS FUNDAMENTALES

Nombre	*Símbolo*	*Valor en unidades SI*
Carga eléctrica elemental	e	$1{,}602\,189\,2 \times 10^{-19}$ C
Constante de Avogradro	N	$6{,}022\,045 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Boltzmann	$k = R/N$	$1{,}380\,662 \text{ x } 10^{-23}$ J · °K^{-1}
Constante de Faraday	$F = N \cdot e$	$9{,}648\,455 \times 10^{4}$ C · mol^{-1}
Constante de los gases ideales	R	$8{,}314\,41$ J · mol^{-1} · °K^{-1}
Constante de Planck	h	$6{,}626\,176 \times 10^{-34}$ J · s
Constante dieléctrica del vacío	ϵ_0	$1/4\pi\, 9 \times 10^{9}$ C^2 · N^{-1} · m^{-2}
Constante gravitatoria	G	$6{,}672\,0 \cdot 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
Masa del electrón en reposo	m_e	$9{,}109\,534 \times 10^{-31}$ kg
Masa del neutrón en reposo	m_n	$1{,}674\,954\,3 \times 10^{-27}$ kg
Masa del protón en reposo	m_p	$1{,}672\,648\,5 \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del vacío	μ_0	$4\pi\, 10^{-7}$ N·A^{-2}
Unidad de masa atómica	u	$1{,}660\,565\,5 \times 10^{-27}$ kg
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2{,}997\,924\,58 \times 10^{8}$ m · s^{-1}
Volumen molar de un gas perfecto ($T_0 = 273{,}15$ °K; $p_0 = 1$ atm)	v_0	$2{,}241\,383 \times 10^{-2}$ m^3

ALFABETO GRIEGO

A	α	Alfa	Ξ	ξ	Xi
B	β	Beta	N	ν	nu
Γ	γ	Gamma	O	o	Omicron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ϵ	Epsilón	P	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Upsilón
I	ι	Iota	Φ	φ	Fi
K	$\varkappa$	Kappa	X	χ	Ji
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	Mu	Ω	ω	Omega